Damien Gobin • Johan Leray

MATHS

DU LYCÉE À LA LICENCE

Toutes les bases pour réussir

COURS
ET 250
EXERCICES
CORRIGÉS

DUNOD

Direction et conception graphiques de la couverture : Nicolas Wiel - XXX (graphiste)
Crédits iconographiques pour la couverture:

NOUS NOUS ENGAGEONS EN FAVEUR DE L'ENVIRONNEMENT :

PAPIER CERTIFIÉ

Nos livres sont imprimés sur des papiers certifiés pour réduire notre impact sur l'environnement.

Le format de nos ouvrages est pensé afin d'optimiser l'utilisation du papier.

Depuis plus de 30 ans, nous imprimons 70% de nos livres en France et 25% en Europe et nous mettons tout en œuvre pour augmenter cet engagement auprès des imprimeurs français.

Nous limitons l'utilisation du plastique sur nos ouvrages (film sur les couvertures et les livres).

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-086403-4

Avant-propos

Ce livre est le fruit des enseignements de mathématiques que nous avons dispensé dans la filière TREMP-Li-N de 2021 à 2023, ainsi qu'en première année de filières scientifiques à Nantes Université. Il se veut donc un support de transition entre le lycée et l'enseignement supérieur. Dans cette optique, nous avons pris le parti de présenter des mathématiques de niveau lycée ou début de première année universitaire, dans un style s'approchant davantage d'un cours de licence 1.

Cet ouvrage s'adresse donc à plusieurs types de lecteurs : l'étudiant ayant obtenu un baccalauréat sans faire la spécialité mathématiques et désireux de suivre des études scientifiques, l'étudiant de Terminale souhaitant préparer son entrée à l'université ou encore l'étudiant de première année universitaire ayant besoin de revoir quelques bases du lycée.

Comment ce livre est-il organisé ? L'enchaînement des chapitres construit le cheminement mathématique : les premiers chapitres présentent des bases indispensables pour la suite et chaque chapitre utilise ensuite les connaissances présentées auparavant pour en développer de nouvelles. Les principales thématiques mathématiques sont donc abordées alternativement, en fonction de la progression.

- Les trois premiers chapitres sont des chapitres calculatoires. Des rappels de calcul basiques sont présentés dans le chapitre 1, et la résolution d'équations et d'inéquations, comme vue au lycée, dans le chapitre 2. Enfin, dans le chapitre 3, nous nous intéressons à la résolution de systèmes linéaires à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss, traditionnellement enseignée en première année universitaire.
- Les chapitres 4 à 9 présentent des thématiques importantes du lycée, que sont l'étude des suites, la géométrie plane et spatiale, et l'étude des fonctions réelles à une variable réelle. Une importance toute particulière a été donnée à cette dernière thématique qui constitue indéniablement le point central de l'enseignement des mathématiques de Terminale et de première année universitaire.
- Cet ouvrage s'achève par deux chapitres qui, selon nous, doivent permettre de faciliter votre accession sereine aux études supérieures. L'avant-dernier chapitre traite de l'intégration, avec un développement plus important que celui fait en classe de Terminale, notamment par son utilisation pour la résolution d'équations différentielles. Enfin, le dernier chapitre traite des nombres complexes. Il s'agit d'une thématique

particulièrement importante de part son lien entre le calcul analytique et la géométrie mais aussi par ces nombreuses applications en physique. Finalement, vous trouverez une courte annexe sur la théorie des ensembles dont certaines notions sont utilisées dans ce livre.

Ce que ne contient pas ce livre. Nous avons fait le choix de ne pas aborder certaines thématiques mathématiques qui ont pourtant leur place au lycée. Ainsi, ce livre ne contient aucun chapitre concernant la combinatoire et les probabilités, l'arithmétique ou le calcul matriciel. En effet, l'ensemble de ces thématiques sont traditionnellement revue lors du premier cycle universitaire, sans prérequis. Enfin, il ne sera fait aucune mention d'approche numérique ou d'algorithmie bien qu'il s'agisse d'un champ d'application important des mathématiques.

Comment utiliser ce livre ?

- Vous pouvez lire ce livre dans le désordre : en fonction de votre maîtrise des sujets, les premiers chapitres peuvent vous sembler superflus. Dans ce cas, n'hésitez pas à vous diriger directement vers le chapitre qui vous intéresse.
- Lorsque vous étudiez un chapitre, prenez le temps de le lire attentivement et de faire les exercices proposés au fur et à mesure : ils permettent d'assimiler les notions présentées. Comme en sport ou en musique, les mathématiques demandent de la répétition pour progresser. Tous les corrigés des exercices sont disponibles sur la page de présentation de l'ouvrage sur dunod.com.
- Si vous rencontrez des difficultés, n'hésitez pas à revenir sur les chapitres précédents pour reprendre les bases que vous ne maîtriseriez pas.
- Nous avons également pris le parti de faire références à quelques ouvrages qui nous paraissent importants en utilisant une balise du type [Ref] renvoyant à la bibliographie présente à la fin de cet ouvrage.

Il ne nous reste plus à présent qu'à vous souhaiter bonne lecture et surtout amusez-vous !

Remerciements. Les auteurs remercient les éditions Dunod, en particulier Laëtitia Jammet, de la confiance accordée. Ils remercient également leurs collègues ayant contribué par leurs interactions à la création de cet ouvrage : Nathalie Burguin, Alexandre Charron, Laurent Piriou, Valentin Samoyeau. Enfin, ils remercient leurs proches qui les ont soutenu pendant la rédaction de ce livre.

Table des matières

1 Rudiments de calcul **5**
1.1 Ensembles de nombres et opérations 6
1.2 Développement et factorisation 11

2 Équations et inéquations **15**
2.1 Résolution d'équations 15
2.2 Équations affines 17
2.3 Équations du second degré 18
2.4 D'autres types d'équations 25
2.5 Intervalles et inéquations 26

3 Résolution de systèmes linéaires **35**
3.1 Systèmes linéaires à deux inconnues 35
3.2 Systèmes linéaires à trois inconnues 47

4 Vecteurs, droites, plans **57**
4.1 Vecteurs du plan et de l'espace 58
4.2 Géométrie du plan affine 65
4.3 Géométrie de l'espace affine 76
4.4 Orthogonalité 93

5 Introduction aux fonctions réelles d'une variable réelle **103**
5.1 Définitions et exemples 103
5.2 Composition de fonctions 106
5.3 Représentation graphique d'une fonction 109
5.4 Propriétés et illustrations graphiques 112

6 Suites réelles **123**
6.1 Généralités sur les suites 124
6.2 Suites et raisonnement : la récurrence 130
6.3 Convergence de suites 134
6.4 Étude des suites récurrentes 148
6.5 Cas particuliers de suites usuelles 155

7 Longueur, angle et trigonométrie **163**
7.1 La distance euclidienne 163
7.2 La notion d'angle 172
7.3 Trigonométrie 181

8 Études de fonctions réelles **189**
8.1 Limites 189
8.2 Continuité 209
8.3 Dérivabilité 214
8.4 Schéma d'étude de fonction 226

9 Fonctions de références **235**
9.1 La fonction partie entière 235
9.2 La fonction exponentielle 237
9.3 La fonction logarithme 245
9.4 Fonctions puissances et exponentielle de base a 251

10 Intégration **255**
10.1 Intégrale d'une fonction continue sur un segment 255
10.2 Primitives 259
10.3 Intégration par parties 265
10.4 Changement de variable 269
10.5 Application à la résolution d'équations différentielles 272

11 Nombres complexes **279**
11.1 Forme algébrique 279
11.2 Module, argument et forme trigonométrique 286
11.3 Exponentielle complexe et forme exponentielle 292
11.4 Résolution d'équations polynomiales 297
11.5 Applications des nombres complexes 304

A Éléments de théorie des ensembles **307**
A.1 Généralités et définitions 307
A.2 Opérations sur les ensembles 309

Index **312**

CHAPITRE 1

Rudiments de calcul

L'objectif de ce chapitre est de rappeler les règles de calcul élémentaires entre nombres réels. La maîtrise de ces différentes règles constitue un prérequis indispensable à la poursuite d'études scientifiques et plus généralement à la pratique des mathématiques au quotidien. Nous allons ainsi redéfinir les ensembles de nombres usuels (illustrés sur la figure 1.1) ainsi que les différentes opérations de calcul sur ces ensembles. Il va sans dire que si vous désirez progresser, vous devez absolument vous abstenir d'utiliser une calculatrice.

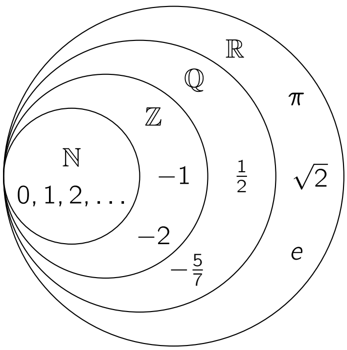

Figure 1.1 – Des ensembles de nombres

Nous aurons besoin dans ce chapitre de plusieurs notions en lien avec la théorie des ensembles. Nous ne donnerons que peu de détails à ce sujet dans ce chapitre mais si vous êtes intéressé nous vous renvoyons à l'annexe A.

1.1. Ensembles de nombres et opérations

1.1.1 Nombres entiers et premières opérations

Commençons par introduire les ensembles de nombres entiers. Pour rappel, $\mathbb{N}$ désigne **l'ensemble des nombres entiers naturels** :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ \dots \}.$$

Les deux opérations usuelles sur les nombres entiers naturels sont la somme et le produit qui sont définis, étant donnés deux nombres entiers naturels a et b, de la façon suivante.

- La somme de a et b est définie par $a + b = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{a \text{ termes}} + \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{b \text{ termes}}$.
- Le produit de a et b est défini par $a \times b = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{b \text{ termes}}$ et on pourra se convaincre que $a \times b = \underbrace{b + b + \ldots + b}_{a \text{ termes}}$.

Remarques.

- Il est d'usage de noter ab le produit $a \times b$ pour simplifier les écritures.
- Dans les calculs utilisant des sommes et des produits il faudra faire particulièrement attention aux règles de priorités de calculs entre les opérations : on commence toujours par calculer les produits avant les sommes. Si vous souhaitez calculer une somme avant un produit, il faut impérativement l'indiquer en utilisant un parenthésage ! Par exemple, on a $(2 + 3) \times 5 = 5 \times 5 = 25$.

Rappelons à présent que $\mathbb{Z}$ désigne **l'ensemble des nombres entiers relatifs** :

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}.$$

Cet ensemble est construit à partir de $\mathbb{N}$ en ajoutant pour tout nombre $n \in \mathbb{N}$ non nul son symétrique, c'est-à-dire un nombre noté $-n$ tel que $n + (-n) = 0 = -n + n$.

Remarques.

- On parlera régulièrement de nombres entiers sans précisions supplémentaires pour désigner des entiers relatifs.
- La somme et le produit définis précédemment pour les entiers naturels s'étendent de façon naturelle à l'ensemble des nombres entiers relatifs $\mathbb{Z}$.

1.1.2 Nombres entiers et calcul de puissances

Définition 1.1 – Puissance. Soit n un nombre entier naturel non nul et soit a un nombre entier relatif. On note a^n, et on lit « a puissance n », le nombre

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ termes}}.$$

De plus, pour tout nombre entier relatif a, on pose $a^0 = 1$ (en particulier $0^0 = 1$).

Exemple. Voici la liste des premières puissances de 2 :

- $2^1 = 2$,
- $2^2 = 4$,
- $2^3 = 8$,
- $2^4 = 16$,
- $2^5 = 32$,
- $2^6 = 64$,
- $2^7 = 128$,
- $2^8 = 256$,
- $2^9 = 512$,
- $2^{10} = 1024$,
- $2^{11} = 2048$,
- $2^{12} = 4096$.

Exercice 1.2. Calculer les puissances suivantes :

1. 3^3,
2. 0^3,
3. $(-1)^2$,
4. $(-2)^2$,
5. -2^2,
6. $(-1)^3$,
7. $(-1)^4$,
8. $(-1)^5$.

Proposition 1.3 – Règles de calcul avec les puissances. *Soient a, b deux nombres entiers relatifs et m, n deux nombres entiers naturels. Alors,*

- $a^m \times b^m = (ab)^m$,
- $a^m \times a^n = a^{m+n}$,
- $(a^m)^n = a^{m \times n} = a^{mn}$.

Exemple. On cherche à calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $(-1)^n$ en fonction de n. Fixons un entier naturel n. On distingue alors deux cas :

- ou bien n est pair, c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel k tel que $n = 2k$, et alors $(-1)^n = (-1)^{2k} = \left((-1)^2\right)^k = 1^k = 1$,
- ou bien n est impair, c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel k tel que $n = 2k+1$, et alors $(-1)^n = (-1)^{2k+1} = (-1)\times(-1)^{2k} = (-1)\times\left((-1)^2\right)^k = (-1)\times 1^k = -1$.

On a donc montré que pour tout entier naturel n, on a $(-1)^n = 1$ si n est pair et $(-1)^n = -1$ si n est impair.

Exercice 1.4. Écrire sous la forme a^n, a et n des entiers naturels, les nombres suivants :

1. $3^3 \times 5^3$,
2. $3^3 \times 3^5$,
3. $(3^3)^5$,
4. $2^3 \times 3^3 \times 6^2$.

1.1.3 Décomposition des nombres entiers

Définition 1.5 – Nombres premiers. Un entier naturel n est dit **premier** si $n \geqslant 2$ et si les seules décompositions de n en un produit de deux nombres entiers naturels$n = ab$ sont données par $a = 1$ et $b = n$ ou $a = n$ et $b = 1$.

Remarques.

- On notera que, par définition, 1 n'est pas un nombre premier.
- Si vous avez l'habitude du langage de l'arithmétique vous pouvez reformuler la définition précédente de la façon suivante : un nombre entier naturel n est dit premier s'il possède exactement deux diviseurs à savoir 1 et lui-même. On retrouve donc ici que 1 n'est pas premier.

Exemple. Les nombres $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$ sont des nombres premiers. Pour faire la liste des nombres premiers inférieurs à un nombre fixé, on peut utiliser le crible d'Ératosthène (pour une présentation de ce crible, on pourra consulter [Wikc]). De plus, pour savoir si un nombre entier positif est un nombre premier on notera qu'il suffit de tester s'il est divisible par un nombre compris entre 2 et $\sqrt{n}$.

Les nombres premiers sont d'un très grand intérêt. Ils sont, par exemple, utilisés de façon cruciale en cryptographie (par exemple pour le protocole RSA, voir [Wikb]). Leur principal usage dans ce chapitre découle du résultat suivant.

Proposition 1.6 – Décomposition en facteurs premiers. *Pour tout entier $n \geqslant 2$, il existe une unique famille de couples $(p_1, k_1), \dots, (p_r, k_r)$, avec*

- $p_1, \dots, p_r$ *des nombres premiers distincts et classés dans l'ordre croissant,*
- $k_1, \dots, k_r$ *des entiers naturels non nuls,*

telle que

$$n = p_1^{k_1} \times p_2^{k_2} \times \cdots \times p_r^{k_r}.$$

Exemple. On a la décomposition

$$2160 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^4 \times 3^3 \times 5.$$

Exercice 1.7 – Décomposition d'entiers. Donner la décomposition en produit de nombres premiers des nombres suivants :

1. 1000, **2.** 625, **3.** 564, **4.** 89.

1.1.4 Nombres rationnels et calcul fractionnaire

On désigne par $\mathbb{Q}$ **l'ensemble des nombres rationnels**, c'est-à-dire l'ensemble de tous les nombres qui s'écrivent sous la forme d'un quotient (d'une fraction) d'un entier relatif par un entier relatif non nul. Autrement dit,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, \ a \in \mathbb{Z}, \ b \in \mathbb{Z}, \ b \neq 0 \right\}.$$

Propriété 1.8 – Simplification d'une fraction. *Soient a un nombre entier et b un nombre entier non nul. Alors, pour tout nombre c également non nul, on a :*

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \quad \text{et} \quad \frac{a}{1} = a.$$

Exemple. On a $\frac{21}{6} = \frac{7\times3}{2\times3} = \frac{7}{2}$ ou encore $-\frac{242}{44} = -\frac{11\times11\times2}{2\times2\times11} = -\frac{11}{2}$.

La simplification de fraction est importante car elle permet d'écrire les nombres rationnels sous forme **irréductible**, c'est-à-dire avec le dénominateur le plus petit possible.

Définition 1.9 – Fractions irréductibles. Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. On dit que la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible si elle ne peut pas être simplifiée, c'est-à-dire s'il n'existe pas de nombre entier naturel c différent de 1 tel que $a = ca'$ et $b = cb'$ avec $a', b' \in \mathbb{Z}$.

Exemple. Le nombre $\frac{21}{6}$ n'est pas irréductible car $21 = 3 \times 7$ et $6 = 3 \times 2$ (on a ici $c = 3$). En revanche, $\frac{7}{2}$ (qui est en réalité égale à $\frac{21}{6}$) est bien irréductible.

Propriété 1.10 – Position du signe moins. *Soient a et b des nombres entiers, $b \neq 0$, on a*

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

Propriété 1.11 – Addition de deux fractions. *Soient a, b, c et d des nombres entiers avec b et d non nuls.*

- *L'addition et la soustraction de deux fractions de même dénominateur sont données par*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}.$$

- *L'addition de deux fractions ayant des dénominateurs différents est donnée par*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}.$$

Exemple. On a $\frac{5}{7}+\frac{4}{3}=\frac{5\times3}{7\times3}+\frac{4\times7}{3\times7}=\frac{15}{21}+\frac{28}{21}=\frac{15+28}{21}=\frac{43}{21}$.

Propriété 1.12 – Produit, puissance et quotient de deux fractions. *Soient a, b, c et d des nombres réels avec b et d non nuls.*

- *La multiplication de deux fractions est donnée par*

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

En particulier, pour tout entier naturel n, $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$.

- *Supposons également que $c\neq 0$. La division de deux fractions est donnée par*

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

Exercice 1.13. Écrire sous forme d'une fraction irréductible les nombres rationnels suivants :

1. $\frac{1}{2}+\frac{3}{5}$,
2. $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$,
3. $\frac{2}{3}\times\frac{9}{4}$,
4. $\frac{11}{3}+\frac{5}{6}-\frac{1}{2}$,
5. $4\times\left(\frac{2}{4}+\frac{9}{5}\right)$,
6. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$,
7. $\dfrac{(-2)^4\times(-3)^7}{4^3\times 9^4}$,
8. $\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{9}{4}}{\frac{2}{3}-\frac{9}{4}}$.

Définition 1.14 – Retour aux puissances. Soient a un nombre entier non nul et m et n deux entiers relatifs, alors

$$a^{m-n}=\frac{a^m}{a^n}.$$

En particulier, si $m=0$ et $n=1$ on a $a^{-1}=\frac{1}{a}$.

Remarque. Ces définitions s'étendent bien entendu au cas où a est un nombre rationnel et plus largement un nombre réel. Dans le cas d'un nombre rationnel, on pourra par exemple utilisé la règle de calcul sur les puissances vue dans la propriété 1.12 pour se ramener à du calcul avec les nombres entiers.

Exercice 1.15. Simplifier les expressions suivantes :

1. $(7^{-24}\times7^{-26}\times7^{51})^2$,
2. $\dfrac{(-4)^2}{(-4)^4}$,
3. $(5^{-4}\times5^5)^3$,
4. $(6)^5\times3^{-3}\times2\times2^{-4}\times3^{-1}$,
5. $\dfrac{5^{12}\times10^{-3}\times3^8}{10^{-5}\times3^8\times5^{10}}$,
6. $8\times(35)^5\times\frac{5^2\times7^3}{7^4\times5^5}\times(7^2)^2$.

1.1.5 Nombres réels et racine carrée

On désigne par $\mathbb{R}$ **l'ensemble des nombres réels**, c'est-à-dire l'ensemble de tous les nombres que vous avez rencontrés au collège ou au lycée. Cet ensemble est nettement plus grand que $\mathbb{Q}$ (par exemple $\pi \in \mathbb{R}$ mais $\pi \notin \mathbb{Q}$) et sera le plus gros ensemble que nous considérerons dans ce chapitre. Pour plus d'informations sur la construction de l'ensemble des nombres réels, nous vous conseillons de consulter [Tao22, Chapitre 5].

Définition 1.16 – Racine carrée. Soit a un nombre réel **positif**. La racine carrée de a, notée $\sqrt{a}$, est l'unique nombre réel positif qui, lorsqu'on le multiplie par lui-même est égal à a. Autrement dit, $\sqrt{a} \geqslant 0$ et $(\sqrt{a})^2 = a$.

À retenir. L'égalité $\sqrt{(a)^2} = a$ n'est vraie que pour a **positif** ! Par exemple, on a $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$ qui est différent de -3.

Propriété 1.17 – Opérations sur les racines carrées. *Soient a et b deux nombres réels positifs.*

- *La multiplication de racines carrées est donnée par $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$.*
- *La division de racines carrées est donnée, si $b \neq 0$, par $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$.*

Exemple. On a $\sqrt{120} = \sqrt{4 \times 5 \times 6} = 2\sqrt{5} \times \sqrt{6}$ ou encore $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$.

À retenir. Il faudra prendre garde au fait que $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Par exemple, on a $\sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2 \neq 2\sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{2}$.

Exercice 1.18. Écrire le plus simplement possible les expressions suivantes :

1. $(2\sqrt{3})^2$, **2.** $4\sqrt{7} - \sqrt{63}$, **3.** $\frac{1}{\sqrt{7}} + \sqrt{28}$, **4.** $\sqrt{(1-\pi)^2}$.

1.2. Développement et factorisation

1.2.1 Développer une expression

Développer une expression consiste à transformer un produit en une somme de plusieurs termes. Soient a, b, c, d et k des nombres réels. La **distributivité de la multipli-**

cation par rapport à l'addition est donnée par

$$k(a+b) = ka + kb.$$

On a ici **développé** l'expression $k(a+b)$ en $ka+kb$. En prenant $b=-c$, on obtient $k(a-c) = ka - kc$. La **double distributivité** est donnée par

$$(a+b)(c+d) = (a+b)c + (a+b)d = ac + bc + ad + bd.$$

Exemples. Soient a et b deux nombres réels.

- $4(a+3) = 4a + 12.$
- $(a-7)(2-b) = 2a + 7b - ab - 14.$

Il y des cas particuliers d'utilisation de la double distributivité particulièrement utiles à connaître que l'on énonce dans la proposition suivante.

Proposition 1.19 – Identités remarquables. *Pour tous nombres réels a et b, on a les égalités suivantes :*

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$

Démonstration. Il suffit de développer les expressions de gauche à l'aide de la double distributivité pour démontrer ces égalités. □

Exercice 1.20. Soient a et b deux nombres réels. Développer l'expression $(a-b)^2$.

Exercice 1.21. Étant donnés des nombres réels a, b, x, y, α et ω, développer les expressions suivantes :

1. $\left(4 - 3\sqrt{2}\right)^2,$
2. $(2\sqrt{5}+3)(3\sqrt{5}-4),$
3. $(1-\sqrt{2})^2,$
4. $(\sqrt{10}+\sqrt{6})^2 - (\sqrt{10}-\sqrt{6})^2,$
5. $4x(7x^2-8),$
6. $(7a+5)(5-3a),$
7. $(11y^2+4)^2,$
8. $(11y^2+4)^3,$
9. $(\alpha - 3\omega)^2,$
10. $(4x-9-b)(4x-9+b).$

Exercice 1.22 – D'autres identités remarquables. Soient a et b deux nombres réels. Développer les expressions suivantes :

1. $(a-b)(a^2+ab+b^2),$
2. $(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3).$

La double distributivité possède de nombreuses applications pratiques. L'une d'entre elles consiste à utiliser ce que l'on appelle la **quantité conjuguée**.

Méthode – Multiplication par la quantité conjuguée. Pour simplifier une somme ou une différence de racines au dénominateur d'une fraction, comme par exemple, pour a et b sont deux réels positifs distincts,

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}},$$

on peut multiplier par **la quantité conjuguée**. Plus précisément, on écrit

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}.$$

Exercice 1.23 – Multiplication par la quantité conjuguée. Simplifier les expressions suivantes en obtenant des dénominateurs entiers :

1. $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$,
2. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$,
3. $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$,
4. $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$,
5. $\dfrac{4+2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{4-2\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$,
6. $\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}+1}\right)^2$.

1.2.2 Factoriser une expression

Factoriser une expression consiste à transformer une somme en un produit de plusieurs facteurs. Il s'agit donc de **l'opération inverse du développement**. Par exemple, pour a, b et k des nombres réels, on a $ka + kb = k(a + b)$ et on a ici **factorisé** l'expression $ka + kb$ en $k(a + b)$. Factoriser des expressions aura un grand intérêt dans la simplification de fractions (voir exercices 1.26 et 1.27) et la résolution d'équations et d'inéquations comme nous le verrons dans le chapitre suivant.

Méthode – Factorisation. Pour factoriser une expression, il peut être très utile de se rappeler des identités remarquables dont on rappelle qu'elles sont données, pour a et b deux nombres réels, par $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ et $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. On les écrit dans le sens inverse de celui donné précédemment pour qu'elles s'appliquent au mieux à notre objectif : factoriser des expressions.

Exercice 1.24. Soit x un nombre réel. Factoriser les expressions suivantes :

1. $4x^2 - 9$,
2. $64x^2 - 8$,
3. $2x(x-3) - 5(x-3)^2$,
4. $(4x+5)^2 - 49$,
5. $(x+4)^2 - (2x-5)^2$,
6. $81 - (4x-5)^2$,
7. $(2x-3)(7x-6) - 4x^2 + 12x - 9$,
8. $2x^2 - x + (2x-1)(x+1)$,
9. $343 - x^3$,
10. $(x+1)^3 + 125$.

Exercice 1.25. Soient x, y, g et t des nombres réels. Factoriser les expressions suivantes :

1. $\frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}g^2t$,
2. $x^2 + 4x + 4$,
3. $4x^2 - 12x + 9$,
4. $x^2 - 2$,
5. $x^3 - 8$,
6. $3x^4 - 12x^3 + 12x^2$.

Exercice 1.26. Soient x, y et z trois nombres réels. Simplifier en factorisant les expressions suivantes (dont on suppose qu'elles sont bien définies) :

1. $\dfrac{8}{12x+20}$,
2. $\dfrac{9x^2}{12xy - 15xz}$,
3. $\dfrac{5x-10}{7x-14}$,
4. $\dfrac{4x-12}{15-5x}$,
5. $\dfrac{x^2-2x+1}{2(x-1)}$,
6. $\dfrac{3x+3}{x^2+2x+1}$.

Exercice 1.27. Soient a, b, x et y quatre nombres réels. Mettez les expressions suivantes (dont on suppose qu'elles sont bien définies) sous forme d'une seule fraction :

1. $\dfrac{2a+b}{10} + \dfrac{a-6b}{15}$,
2. $\dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{2x} + \dfrac{5}{4}$,
3. $\dfrac{2}{3a-1} - \dfrac{3}{2a+1}$,
4. $\dfrac{3}{x+y} - \dfrac{5}{x^2-y^2}$.

CHAPITRE 2

Équations et inéquations

2.1. Résolution d'équations

Définition 2.1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation (E) d'inconnue x

$$f(x) = 0 \qquad (E)$$

où $f(x)$ est une expression dépendant d'un nombre réel x, consiste à déterminer **tous** les nombres réels a tels que l'égalité $f(a) = 0$ soit vraie. Un tel nombre a est alors appelé **une solution réelle de l'équation** (E)**.**

Remarque. La résolution d'une équation dépend de l'ensemble dans lequel on cherche les solutions. Ainsi, si l'on écrit « résoudre dans $\mathbb{R}$ » on cherche tous les nombres réels x tels que $f(x) = 0$ alors que si l'on écrit « résoudre dans $\mathbb{Z}$ » on cherche tous les nombres entiers relatifs x tels que $f(x) = 0$.

Exemple. On considère l'équation $2x^2 + x = -x + 4$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ cette équation, c'est donc déterminer toutes les valeurs réelles de x telles que $2x^2 + x = -x + 4$. On peut constater que 1 est solution de cette équation car $2 \times 1^2 + 1 = 3$ et $-1 + 4 = 3$, donc l'égalité est vérifiée pour $x = 1$. On peut faire de même pour -2. En revanche, on constate que 3 n'est pas solution. En effet, on a $2 \times 3^2 + 3 = 21 \neq 1 = -3 + 4$.

Exercice 2.2. Soit l'expression $A(x) = -2x^3 + 3x^2 - 1$ dépendante d'un nombre réel x. On considère l'équation $A(x) = 0$.

1. Calculer $A(0)$, $A(1)$, $A\left(\frac{1}{2}\right)$ et $A\left(-\frac{1}{2}\right)$. Les nombres 0, 1, $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$ sont-ils solutions de l'équation ?
2. Avons-nous finalement résolu l'équation $A(x) = 0$?

Résoudre une équation peut se révéler difficile au premier abord. Afin de procéder à cette résolution, il peut être utile de transformer ou de réécrire notre équation en une autre, qui à vocation à être plus simple et qui possède exactement les même solutions : on dira alors que ces équations sont équivalentes.

Définition 2.3. Deux équations $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$ sont dites **équivalentes** si, pour tout nombre réel a tel que $f(a) = 0$ alors $g(a) = 0$ et si, pour tout nombre réel b tel que $g(b) = 0$ alors $f(b) = 0$. Si $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$ sont deux équations équivalentes, on dit alors que « $f(x) = 0$ si et seulement si $g(x) = 0$ », ce que l'on note

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0.$$

À retenir. On utilisera le symbole $\Leftrightarrow$ avec une grande précaution et avec parcimonie ! En général, il est préférable de se contenter d'employer des termes en français qui signifient la même chose, comme par exemple, « si et seulement si ». Ainsi, $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$ signifie « a est solution de $f(x) = 0$ si et seulement si a est solution de $g(x) = 0$ ».

Afin de pouvoir passer d'une première équation à une seconde équation équivalente à la première que l'on espère plus simple à résoudre, on dispose notamment des deux règles de réécriture suivantes.

Proposition 2.4 – Manipulation d'égalités.

- *Une égalité entre deux nombres reste vraie si l'on ajoute ou si l'on soustrait un même nombre à ses deux membres. Plus précisément, pour tous nombres réels a, b et c, on a*
$$a + c = b + c \quad \text{si et seulement si} \quad a = b.$$
- *Une égalité entre deux nombres reste vraie si l'on multiplie ou si l'on divise ses deux membres par un même nombre réel* **non nul**. *Plus précisément, pour tous nombres réels a, b et c avec $c \neq 0$, on a*
$$ac = bc \quad \text{si et seulement si} \quad a = b.$$

Exemples.

- L'équation $f(x) = g(x)$ avec $f(x)$ et $g(x)$ deux expressions dépendantes d'un nombre réel x, est équivalente à l'équation $f(x) - g(x) = 0$.
- L'équation $2x + 3 = 3$ est équivalente à l'équation $2x = 0$.
- L'équation $2x^2 + x = -x + 4$ est équivalente à l'équation $2x^2 + 2x - 4 = 0$.
- L'équation $7x + 7 = 9$ est équivalente à l'équation $x + 1 = \frac{9}{7}$.

2.2. Équations affines

Définition 2.5 – Équation polynomiale. Une équation (E) est dite **polynomiale** s'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{R}$ avec $a_N \neq 0$ tels que l'équation (E) soit équivalente à l'équation

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_N x^N = 0.$$

Une telle équation est dite polynomiale **de degré** N.

Exemples.

- L'équation $x^3 - 7x^2 = 9$ est polynomiale de degré 3.
- L'équation $x^5 - 4x^2 + \sqrt{x} = 0$ n'est pas polynomiale, car elle contient une racine carrée.
- L'équation $(x^3 + 9)(x - 7) = x^4$ est polynomiale de degré 3 car le terme en x^4 se simplifie.

Remarque. Bien que ces équations soient parmi les plus simples que l'on puisse rencontrer, trouver toutes les solutions d'une telle équation peut se révéler fastidieux, voir difficile. On peut distinguer deux familles d'équations polynomiales.

- Pour les équations polynomiales de degrés $1, 2, 3$ et 4, il existe des formules pour les solutions. Nous allons ici nous intéresser aux équations polynomiales de degré 1. Les équations polynomiales de degré 2 feront l'objet de la section suivante. La méthode de *Cardan* (voir [Wikg]) permet de résoudre les équations de degré 3 et la méthode de *Ferrari* (voir [Wiki]) les équations de degré 4.
- En revanche, on peut démontrer qu'il n'existe pas de formule générale pour les solutions d'équations polynomiales de degré 5 ou plus. Le principal contributeur pour la démonstration de ce résultat est le mathématicien français *Évariste Galois* (voir [Wikd]).

Si vous êtes intéressé par cette question, nous vous conseillons de consulter [Per].

Étudions maintenant la résolution des équations polynomiales de degré 1, que l'on appelle aussi **équations affines**. Commençons par traiter un exemple.

Exemple. On cherche à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$2x + 3 - 5x = 4x.$$

L'équation $2x + 3 - 5x = 4x$ est équivalente à l'équation $-3x + 3 = 4x$, obtenue par simplification du terme de gauche, qui est elle-même équivalente à $-7x+3 = 0$, obtenue en soustrayant $4x$ à chacun des termes. On a donc

$$2x + 3 - 5x = 4x \Leftrightarrow -7x + 3 = 0.$$

En soustrayant 3 à chacun des termes, on obtient l'équation équivalente $-7x = -3$, puis en multipliant les termes de gauche et de droite par $\frac{-1}{7}$, on obtient l'équation équivalente $x = \frac{3}{7}$. On peut résumer cela par la succession d'équivalences suivante :

$$2x + 3 - 5x = 4x \Leftrightarrow -7x + 3 = 0 \Leftrightarrow -7x = -3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{7}.$$

On a donc montré que $2x + 3 - 5x = 4x$ si et seulement si $x = \frac{3}{7}$. Donc, $\frac{3}{7}$ est l'unique solution de l'équation $2x + 3 - 5x = 4x$.

Cet exemple se généralise aisément. Considérons deux réels $a \neq 0$ et b et déterminons les solutions de l'équation $ax + b = 0$. On peut **isoler** l'inconnue x d'un côté du signe d'égalité via les équivalences suivantes :

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow \frac{1}{a}ax = \frac{1}{a} \times (-b) \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}.$$

On a donc démontré le résultat suivant.

Proposition 2.6. *Soient a et b deux nombres réels avec a non nul. L'équation polynomiale de degré 1, $ax + b = 0$ admet pour unique solution réelle le nombre $-\frac{b}{a}$.*

Exercice 2.7. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $3x + 2 = 5$,
2. $\frac{3}{2}x + 3 = 4$,
3. $-5x - 2 = 8$,
4. $-3x + 7 = 9$,
5. $4x + 6 = 9x - 2$,
6. $\frac{x}{3} + 1 = 2x - 1$,
7. $\frac{5}{3}x + 2 = \frac{3}{2}$,
8. $\frac{x}{3} - 1 = \frac{2x-3}{5}$,
9. $\frac{5-2x}{7} = \frac{3x-4}{2}$.

2.3. Équations du second degré

Dans cette section, nous allons présenter une approche algorithmique de résolution des équations polynomiales de degré 2, c'est-à-dire des équations de la forme

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

avec $a \neq 0$, b et c trois nombres réels. Il est important de noter qu'il n'y a que peu d'équations dont on sait trouver les solutions exactes. Il est donc important de bien savoir traiter celles que l'on sait toujours résoudre.

2.3.1 Équations du type $x^2 = a$

On commence par présenter la résolution d'un cas particulier d'équation du second degré : les équations de la forme $x^2 = a$, avec $a \in \mathbb{R}$.

Proposition 2.8. *Soient a un nombre réel et $f(x)$ une expression dépendante d'un nombre réel x.*

- *Si $a > 0$, alors l'équation $(f(x))^2 = a$ est équivalente à*

$$f(x) = \sqrt{a} \quad \textbf{ou} \quad f(x) = -\sqrt{a}.$$

- *Si $a = 0$, alors l'équation $(f(x))^2 = a$ est équivalente à $f(x) = 0$.*
- *Si $a < 0$, alors l'équation $(f(x))^2 = a$ n'admet aucune solution* **réelle.**

Exemples.

- L'équation $(x-2)^2 = 3$ est équivalente à $x - 2 = \sqrt{3}$ **ou** $x - 2 = -\sqrt{3}$ ce qui est équivalent à $x = 2 + \sqrt{3}$ **ou** $x = 2 - \sqrt{3}$. Les solutions de l'équation $(x-2)^2 = 3$ sont donc $2 + \sqrt{3}$ et $2 - \sqrt{3}$.
- L'équation $(x-2)^2 = 0$ est équivalente à l'équation $x - 2 = 0$, donc l'unique solution de l'équation $(x-2)^2 = 0$ est 2.
- L'équation $(x+7)^2 + 3 = 1$ est équivalente à l'équation $(x+7)^2 = -2$ qui n'admet aucune solution réelle.

Exercice 2.9. Résoudre les équations suivantes :

1. $2x^2 = x^2 + 16$,
2. $(x+2)^2 = 9$,
3. $(2x-5)^2 = 49$,
4. $\left(x^2 - 10\right)^2 = 36$,
5. $\left(x^2 - 17\right)^2 = 64$,
6. $(2x+3)^2 = (x-4)^2$.

2.3.2 Forme canonique

Nous allons à présent montrer que toute équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, avec $a \neq 0$, b et c trois nombres réels fixés est équivalente à une équation de la forme $a(x - x_0)^2 + d = 0$ avec x_0 et d deux nombres réels dépendants de a, b et c. Cette nouvelle forme de l'équation est appelée **forme canonique** et se trouve être de la forme des équations de la section 2.3.1 ce qui signifie que l'on sait en déterminer les solutions.

Commençons par traiter un exemple de mise sous forme canonique avant de donner une démonstration générale. On considère l'équation $2x^2 + 3x + 1 = 0$. On peut alors voir la partie $2x^2 + 3x$ du terme de gauche de l'égalité comme le morceau encadré de l'identité remarquable $2(x+\alpha)^2 = \boxed{2(x^2+2\alpha x)} + 2\alpha^2$. Pour un réel x, on a en effet

$$2x^2+3x+1 = 2x^2+4\frac{3}{4}x+1 = 2\left(x^2+2\frac{3}{4}x\right)+1$$

où l'on a ici $\alpha = \frac{3}{4}$. On reconnaît bien entre parenthèses le début d'une identité remarquable dont on fait apparaître la fin :

$$2x^2+3x+1 = 2\left(x^2+2\frac{3}{4}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)+1.$$

On a ainsi, pour tout réel x,

$$\begin{aligned}2x^2+3x+1 &= 2\left(x^2+2\frac{3}{4}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}\right)+1\\ &= 2\left(x^2+2\frac{3}{4}x+\frac{9}{16}\right)-\frac{9}{8}+1\end{aligned}$$

Finalement, on a pour tout réel x que $2x^2+3x+1 = 2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$ ce qui correspond à la mise sous forme canonique de notre trinôme du second degré. En suivant exactement le même procédé pour un trinôme générique (i.e. de la forme ax^2+bx+c, avec a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$), on démontre la proposition suivante.

Proposition 2.10. *Toute équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ avec a, b et c trois réels et $a \neq 0$, est équivalente à une équation de la forme $a(x-x_0)^2+y_0=0$ avec x_0 et y_0, deux nombres réels.*

Démonstration. Soient trois nombres réels a, b et c, avec $a \neq 0$. On considère l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$. Soit x un nombre réel, on a les égalités suivantes :

$$ax^2+bx+c = ax^2+2\frac{b}{2}x+c = a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x\right)+c$$

car a est un réel non nul. On a alors

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c = a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a}+c$$

et donc

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

On pose alors $x_0 = -\frac{b}{2a}$ et $y_0 = \frac{4ac-b^2}{4a}$ afin d'obtenir le résultat. $\square$

Définition 2.11 – Forme canonique. La forme $a(x - x_0)^2 + y_0 = 0$ d'une équation polynomiale de degré deux est appelée **forme canonique**. La forme $ax^2 + bx + c = 0$ est appelée **forme développée**.

Remarque. Plutôt que de retenir la formule de la forme canonique, il est plus intéressant de retenir la méthode pour l'obtenir : il faut penser la partie ax^2+bx du polynôme comme un début d'identité remarquable et faire attention au coefficient a devant le terme x^2.

Exercice 2.12. Mettre sous forme canonique les expressions dépendantes d'un réel x suivantes :

1. $x^2 + 4x + 5$,
2. $x^2 + 5x - 3$,
3. $x^2 - 4x + 2$,
4. $4x^2 + 5x - 1$,
5. $3x^2 - 3x + 3$,
6. $-2x^2 + 3x + 5$.

Exercice 2.13.

1. Montrer que $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$ est équivalente à $\left(x^2 - 13\right)^2 = 144$.
2. Résoudre cette équation.

2.3.3 Discriminant et résolution

Dans cette section, on donne une méthode pour résoudre une équation polynomiale de degré deux, c'est-à-dire une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, avec a, b et c, trois nombres réels tels que $a \neq 0$.

Définition 2.14. Les solutions d'une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$, avec a, b et c trois nombres réels tels que $a \neq 0$, sont appelées **racines** du trinôme ax^2+bx+c.

On a vu que tout trinôme $ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous forme canonique (voir la démonstration de la proposition 2.10) de la manière suivante :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Dans l'expression de droite, on peut factoriser par a, car a est non nul, pour obtenir

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right).$$

Ainsi, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est équivalente à l'équation suivante

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0,$$

donc les solutions de l'équation $ax^2+bx+c = 0$ sont exactement celles de cette dernière équation. À présent, trois cas de figures se présentent à nous.

- *Si le nombre réel $b^2 - 4ac$ est strictement positif,* alors l'équation

  $$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

  est de la forme $f(x)^2 = \alpha$ avec $\alpha > 0$ dont on sait d'après la proposition 2.8 qu'elle est équivalente à $f(x) = \sqrt{\alpha}$ ou $f(x) = -\sqrt{\alpha}$ ce qui donne les valeurs de x solutions de l'équation. Afin d'obtenir une factorisation du trinôme, détaillons l'obtention de ces racines :

  $$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2.$$

  En utilisant l'identité remarquable $\alpha^2-\beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$, on peut alors factoriser l'expression de droite, ce qui nous fournit l'égalité suivante :

  $$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right).$$

  Finalement, on a donc montré que si $b^2 - 4ac > 0$, alors on a

  $$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right),$$

  ainsi, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet bien exactement deux racines distinctes :

  $$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

- *Si le nombre réel $b^2 - 4ac$ est nul,* on remarque, en utilisant la forme canonique, que si $b^2 - 4ac = 0$ alors

  $$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0.$$

  Ainsi, l'équation $ax^2+bx+c = 0$ admet une solution réelle double $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

- *Si le nombre réel $b^2 - 4ac$ est strictement négatif,* alors l'équation du second degré est équivalente à une équation de la forme $f(x)^2 = \alpha$ avec $\alpha < 0$ dont on sait d'après la proposition 2.8 qu'elle n'admet pas de solution réelle. Il n'y a donc pas de solution réelle.

On vient de voir comment déterminer les solutions d'une équation $ax^2 + bx + c = 0$, où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$ et nous avons constater que cette résolution dépend de manière cruciale du signe de la quantité $b^2 - 4ac$. On lui donne donc un nom.

Définition 2.15 – Discriminant. Soient a, b et c, des nombres réels avec $a \neq 0$. On appelle **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$, que l'on note Δ (qui se lit « delta »), le nombre réel

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Théorème 2.16 – Racines réelles et factorisation d'un trinôme. *Soient a, b et c trois nombres réels, avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$.*

- *Si $\Delta > 0$, $ax^2 + bx + c$ admet exactement deux racines réelles*

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

  et la factorisation $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- *Si $\Delta = 0$, $ax^2 + bx + c$ admet une unique racine réelle (double)*

$$x_0 = \frac{-b}{2a} \,(= x_1 = x_2)$$

  et la factorisation $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$.
- *Si $\Delta < 0$, $ax^2 + bx + c$ n'admet aucune racine réelle et ne se factorise pas sur $\mathbb{R}$.*

Exemples.

- On cherche les racines du trinôme $2x^2 + 3x + 1$. On commence par calculer le discriminant $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times 1 = 9 - 8 = 1$. Le discriminant est strictement positif, donc $ax^2 + bx + c$ admet les deux racines

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{-3 - 1}{4} = -1 \text{ et } x_2 = \frac{-3 + \sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{-3 + 1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

  De plus, le trinôme admet la factorisation suivante :

$$2x^2 + 3x + 1 = 2(x - (-1))\left(x - (-\frac{1}{2})\right) = 2(x + 1)\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

- On cherche les racines du trinôme $2x^2 - 4x + 2$. On a $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 16 - 16 = 0$. Le discriminant étant nul, le trinôme admet donc la racine double

$$x_0 = -\frac{-4}{2 \times 2} = 1.$$

De plus, le trinôme admet la factorisation $2x^2 - 4x + 2 = 2(x-1)^2$.

- On cherche les racines du trinôme $x^2 - x + 2$. On commence par calculer le discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 - 8 = -7$. Le discriminant est strictement négatif, donc le trinôme n'admet aucune racine réelle et ne peut pas se factoriser sur $\mathbb{R}$.

À retenir – Résolution d'une équation du second degré. On a une procédure à suivre afin de déterminer les racines réelles d'un trinôme $ax^2 + bx + c$:

1. on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$,
2. en fonction du signe de Δ, on en déduit les racines éventuelles :

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_0 = -\dfrac{b}{2a}$	pas de racine réelle

Remarques.

- Si vous avez un trinôme dont le discriminant est nul, alors vous devez être capable de le factoriser en utilisant une identité remarquable.
- Le dernier trinôme de l'exemple précédent n'admet aucune racine **dans** $\mathbb{R}$. Nous verrons plus loin que l'on peut considérer un ensemble de nombres plus grand que l'ensemble des nombres réels (appelé ensemble des **nombres complexes**) dans lequel un tel trinôme admet des racines. On découvrira cela dans le chapitre 11.

Exercice 2.17. Déterminer les solutions réelles des équations suivantes :

1. $4x^2 - 20x + 22 = 0$,
2. $4x^2 - 4x - 15 = 0$,
3. $-4x^2 + 12x - 9 = 0$,
4. $-x^2 + 6x - 14 = 0$,
5. $2x^2 + 10x + \frac{25}{2} = 0$,
6. $-2x^2 + 2x + \frac{3}{2} = 0$,
7. $9x^2 - 12x + \frac{7}{2} = 0$,
8. $4x^2 + 16x + 14 = 0$,
9. $9x^2 + 12x + \frac{11}{4} = 0$,
10. $-2x^2 + 2x - \frac{1}{2} = 0$,
11. $-x^2 + 2x - 1 = 0$,
12. $4x^2 - 16x + 7 = 0$,
13. $-2x^2 + 8x - 8 = 0$,
14. $4x^2 + 12x - 7 = 0$,
15. $3x^2 + 3x - 3 = 0$,
16. $9x^2 + 6x + \frac{1}{4} = 0$,
17. $x^2 - x - 2 = 0$,
18. $4x^2 - 4x - 2 = 0$,
19. $9x^2 - 12x + \frac{13}{4} = 0$,
20. $9x^2 - 15x + 5 = 0$.