

# Des **kilomètres** dans une **cuillère à café** ?

Posez-vous les bonnes questions  
pour des résultats qui tiennent la route !



THIERRY ALHALEL

# Des **kilomètres** dans une **cuillère à café** ?

Posez-vous les bonnes questions  
pour des résultats qui tiennent la route !

DUNOD

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1<sup>er</sup> juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du

droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 2019

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

[www.dunod.com](http://www.dunod.com)

ISBN 978-2-10-079353-2

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2<sup>o</sup> et 3<sup>o</sup> a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

# Table des matières

<b>Avant-propos</b>		<b>IX</b>
<b>Chapitre 1.</b>	Pour bien démarrer	1
<b>Chapitre 2.</b>	Dimension physique, unités, homogénéité	9
<b>2.1</b>	Le système international : SI	9
<b>2.2</b>	Les unités dérivées	9
<b>2.3</b>	La dimension de l'argument d'une fonction mathématique	10
<b>2.4</b>	Des formules insubmersibles	12
	Mécanique	12
	Électricité	13
	Physique microscopique et électromagnétisme	14
	Chimie	15
<b>2.5</b>	Homogénéité des formules : un outil de vérification	16
<b>2.6</b>	Quand on ne travaille pas dans le système SI	20
	Des unités non SI utiles	20
	Quand on « simplifie » une théorie en changeant les unités	23
	Exercices	23
<b>Chapitre 3.</b>	Usage des multiples et sous-multiples	41
	Exercices	41

<b>Chapitre 4.</b>	Traitement des données	47
	Linéarisation des lois de puissance	48
	Utilisation d'une échelle log/log pour une relation de puissance	48
	Utilisation d'une échelle semi-logarithmique	50
	Exercices	51
<b>Chapitre 5.</b>	Évaluation d'une incertitude	61
	<b>5.1</b> Incertitudes absolue et relative	61
	<b>5.2</b> Présentation d'un résultat de mesure	62
	<b>5.3</b> Propagation des incertitudes : une introduction par les dérivées logarithmiques	63
	Position du problème	63
	Les formules obtenues par les dérivées logarithmiques	64
	Exercices	65
	<b>5.4</b> Propagation des incertitudes : calcul en quadrature	67
	Exercices	68
	<b>5.5</b> Incertitude statistique ou incertitude de type A	74
	Exercices	77
	<b>5.6</b> Incertitudes systématiques - type B	78
	Exercices	78
	<b>5.7</b> Régression linéaire et incertitude sur les paramètres	81
	La régression linéaire : détermination de $A$ et $B$	82

	Incertitudes sur $A$ et $B$	84
	Le cas exponentiel	84
	Exercices	85
<b>Chapitre 6.</b>	Calculs algébriques simples	89
	Exercices	89
<b>Chapitre 7.</b>	Programmation et algorithmique	102
	7.1 Algorithme, logigramme, pseudo-code	102
	7.2 Un exemple concret : l'algorithme d'Euclide	102
	Principe	102
	Exemple	103
	Pseudo-code	104
	Premier code en C	105
	Deuxième code en C	106
	Conclusion	107
	7.3 L'essentiel des grands blocs d'instructions	108
	Déclarations : définition des variables et initialisation	108
	Instruction conditionnelle SI ou IF : test sur une condition booléenne (vrai / faux)	109
	Choix multiple SELON ou SWITCH : multiples flux selon la variable entière « valeur »	109
	Structure de contrôle WHILE ou TANT QUE : répétition sur une condition booléenne (vrai / faux)	109
	Structure de contrôle DO WHILE : répétition sur une condition booléenne (vrai / faux)	110
	Structure de contrôle POUR ou FOR : répétition selon un compteur	110

7.4	Un deuxième exemple plus élaboré : développement de Cantor	110
	Exercices	113
<b>Chapitre 8.</b>	<b>Art de la démonstration : les problèmes « flous »</b>	<b>122</b>
8.1	Problème 1 : comparaison de données expérimentales à un modèle théorique - test de conformité	122
	Position du problème	122
	Questions	123
	Une solution du problème 1	123
	Annexe : et en Python ?	128
8.2	Problème 2 : la loi de Benford en mathématiques et en géographie	130
	Position de problème : la suite de Fibonacci	131
	Position du problème : la population des villes en France	132
	Les questions	132
	Des réponses au problème 2	133
<b>Chapitre 9.</b>	<b>Testez-vous</b>	<b>137</b>
	<b>Solutions des QCM</b>	<b>154</b>
	<b>Index</b>	<b>165</b>



# Avant-propos

Vous avez sans doute déjà été confronté, en physique, en chimie, en génie civil, en mathématiques appliquées ou dans une autre discipline scientifique qui met en jeu des calculs sur des quantités mesurables, à un enseignant qui conclut en quelques secondes à la fausseté de votre formule finale. Ce qui vous a demandé de longs efforts est déclaré faux immédiatement ! L'enseignant en question ne connaît certainement pas par cœur le résultat que vous auriez dû atteindre, mais il est capable d'en vérifier l'homogénéité. Résultat homogène ne veut pas dire exact, mais il y a de bonnes chances qu'à un signe ou un facteur multiplicatif près il soit proche de l'attendu.

Ce livre est tout entier consacré à l'interprétation des formules, aux données, à leur traitement et au calcul d'incertitude, cela quel que soit le champ d'étude. En effet, que vous fassiez de la physique, de la chimie, de la mécanique ou une autre science en relation avec la mesure de paramètres physiques, vous avez été, vous êtes et vous serez confronté à la vérification de l'homogénéité et à la pertinence de votre modèle.

Cet ouvrage s'adresse à tous les étudiants de L1 et L2 (voire L3), de DUT mais aussi de BTS, inscrits dans le domaine des sciences et techniques. Nous espérons que ce livre, saura, toutes disciplines confondues, vous donner des outils transdisciplinaires de contrôle de vos résultats.

Nous ne traitons pas ici spécifiquement de physique, de mathématiques, de chimie ou d'informatique, mais les exemples sont pris dans tous ces champs scientifiques, et vous amènent à raisonner de façon pertinente et **transdisciplinaire**. En ce sens, cet ouvrage peut être un compagnon au cours des deux ou trois premières années universitaires. Il contient d'ailleurs plusieurs QCM qui vous permettront de tester votre capacité à vérifier et à raisonner, aussi bien sur l'homogénéité des formules, sur le calcul d'incertitude que sur la compréhension d'algorithmes informatiques simples.

Le plan de l'ouvrage est bâti de la façon suivante :

- une première série de QCM vous permet de détecter vos éventuels points faibles, et ainsi de mieux vous orienter dans le livre ;
- le premier très long chapitre est consacré aux dimensions et aux unités, ainsi qu'aux calculs d'homogénéité, avec de nombreux exercices ;
- le deuxième chapitre revient sur les notions de multiples et sous-multiples ;
- le troisième introduit le traitement des données ;
- le quatrième explore le calcul (simplifié) des incertitudes ;
- le cinquième permet de vérifier que vous savez effectuer un calcul algébrique élémentaire ;
- le sixième traite d'algorithmique et de compréhension de la structure de programmes écrits en pseudo-code (le langage C sera parfois utilisé) ;
- enfin, dans un dernier chapitre, nous essayerons d'appliquer toutes ces connaissances à des problèmes complexes, donc nécessairement flous.

J'espère que cet ouvrage sera, pour le lecteur, un appui tout au long de son cursus, et qu'il lui permettra d'échapper aux pièges les plus communs de la modélisation et du calcul dans les domaines scientifiques. Insistons encore sur le fait que ce livre n'est ni un ouvrage de physique, ni de chimie, ni de statistique, ni d'ailleurs d'une autre science, il regroupe simplement des notions transversales utiles à tous les domaines précités.

Donnons pour finir le niveau L1, L2 ou L3 correspondant à chaque chapitre :

<b>Chap 1 (QCM)</b>	<b>Chap 2 (dimensions)</b>	<b>Chap 3 (multiples)</b>	<b>Chap 4 (traitement)</b>
L1	L1	L1	L1
<b>Chap 5 (incertitudes)</b>	<b>Chap 6 (calculs)</b>	<b>Chap 7 (prog)</b>	<b>Chap 8 (flous)</b>
L1/ L2/L3	L1	L1/L2/L3	L2/L3
<b>Chap 9 (QCM)</b>			
L1/L2			

Bonne lecture et bon courage !

Pour faire cette première série de QCM, vous avez besoin d'une feuille de papier, d'un stylo et d'une calculatrice. Certaines questions ont une seule bonne réponse, d'autres plusieurs, soyez attentif. Les QCM touchent à plusieurs champs différents, ils ne nécessitent pas de connaissances approfondies et ou de révisions particulières. Ils visent surtout à vérifier que vous êtes capable de raisonner de façon transversale et logique, et de détecter des erreurs simples rapidement. Ces QCM abordent des notions de physique, de chimie, d'algorithmique... et de bon sens, le tout d'un niveau d'entrée en première année du supérieur. Il y a 12 QCM en tout, 45 minutes sont suffisantes pour ce test. **Les solutions se trouvent à la fin de l'ouvrage.**

Les questions des QCM sont générales et touchent à divers domaines, que peut-être vous connaissez mal, voire pas du tout. Qu'à cela ne tienne, vous êtes capable de dire si telle ou telle formule est homogène et tient la route, ou bien si l'on peut supposer que des données expérimentales s'organisent selon tel ou tel modèle, ou bien encore que tel ordre de grandeur est vraisemblable. Le tableau ci-après vous donne les chapitres de la suite de l'ouvrage en relation avec cette première série de QCM. Si vous avez des difficultés avec certaines de ces questions, il est sans doute souhaitable de vous reporter au chapitre correspondant.

<b>Chapitre 2</b>	QCM
Dimension physique, unités, homogénéité	1, 2, 3, 4, 5
<b>Chapitre 3</b>	QCM
Usage des multiples et sous-multiples	6, 7, 8, 9
<b>Chapitres 4 et 6</b>	QCM
Traitement des données	11, 12
<b>Chapitre 7</b>	QCM
Programmation et algorithmique	10

On utilise les notations et les notions suivantes :

### NOTATIONS

**Électricité :**  $I$  représente l'intensité d'un courant,  $U$  la tension (différence de potentiel) entre deux bornes,  $R$  la résistance d'un conducteur ohmique.

**Ondes :**  $f$  représente la fréquence,  $T$  la période, et  $\omega$  la pulsation.

**Mécanique :**  $v$  représente une vitesse,  $a$  représente une accélération,  $g$  est l'accélération de la pesanteur,  $G$  la constante universelle de la gravitation,  $\epsilon$  une énergie et  $F$  une force,  $M$  est une masse.

**Physique microscopique :** un photon de fréquence  $\nu$  a pour énergie  $E$  :  $E = h \cdot \nu$ , où  $h$  est la constante de Planck :  $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$  J.s

### QCM 1 Gravitation

Un corps gravite à la vitesse  $v$  autour d'un astre de masse  $M$ . En faisant une étude dimensionnelle, indiquer la formule ou les formules qui vous paraissent homogènes :

1.  $v = \sqrt{GMr}$

4.  $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$

2.  $v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$

5.  $v = \sqrt{\frac{r}{2GM}}$

3.  $v = \frac{2GM}{r}$

### QCM 2 Les ondes

$u(t)$  représente un phénomène oscillant dépendant du temps  $t$ ,  $A$  et  $B$  représentant des amplitudes. En faisant une étude dimensionnelle, indiquer la formule ou les formules qui vous paraissent homogènes :

1.  $u(t) = A.\cos(2\pi.f.t)$ 
 4.  $u(t) = A.\sin(2\pi.\frac{t}{T} + \frac{\pi}{3})$
2.  $u(t) = A.\sin(4\pi.\frac{t}{T})$ 
 5.  $u(t) = A.\sin(2\pi.\frac{t}{T} + \frac{\pi}{3}) + B.\cos(w.t + \frac{\pi}{7})$
3.  $u(t) = A.\cos(2\pi.t.T)$

### QCM 3 Électricité

On associe des conducteurs ohmiques de résistances  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  et  $R_4$ . En faisant une étude dimensionnelle, indiquer la formule ou les formules qui vous paraissent homogènes à une résistance  $R$  :

1.  $R = \frac{R_1 R_2 R_3 R_4}{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2 + R_1 R_2}$ 
 4.  $R = \frac{R_1 R_2 R_3 R_4}{R_2 R_3 R_4 + R_1 R_3 R_4 + R_1 R_2 R_4 + R_1 R_2 R_3}$
2.  $R = \frac{\frac{R_2 R_3}{R_4} + \frac{R_1 R_3}{R_4} + \frac{R_1 R_2}{R_4} + \frac{R_1 R_2}{R_3}}{R_1 R_2 R_3}$ 
 5.  $R = \frac{R_1 R_2 R_3 R_4}{2R_2 R_3 R_4 + R_1 R_3 R_4 + R_1 R_2 R_4 + 3R_1 R_2 R_3}$
3.  $R = R_1 + \frac{R_1 R_2 R_3}{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2}$

### QCM 4 Constante de structure fine

La constante de structure fine est une quantité de physique quantique sans dimension qui vaut environ  $\alpha = \frac{1}{137}$ . Elle s'exprime de la façon suivante :

$$\alpha = \frac{e^2}{2.\epsilon_0.h.c}$$

$e$  représente la charge électrique de l'électron,  $h$  est la constante de Planck,  $c$  la vitesse de la lumière et  $\epsilon_0$  la permittivité du vide. La dimension de la permittivité du vide  $\epsilon_0$  s'exprime en :

1.  $C^2.m^3.kg.s^{-2}$ 
 4.  $A^2.kg.m^{-3}.s^4$
2.  $C^2.m^{-3}.kg^{-1}.s^2$ 
 5.  $A^2.kg^{-1}.m^{-3}.s^4$
3.  $A^2.kg^{-1}.m^3.s^{-2}$

### QCM 5 Une formule de géochimie pour la datation d'un granite

On lit dans un article que la méthode Rubidium/Strontium permet de dater les roches granitiques par une procédure mettant en œuvre un spectromètre de masse. La formule permettant de calculer l'âge de la roche  $t$  s'écrit :

$$t = \frac{\ln(1 + p)}{\lambda}$$

Le paramètre  $p$  est la pente d'une droite et  $\lambda$  une constante. On déduit de cette formule que :

- |   |  |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> 1. $p$ est en $\text{ans}^{-1}$ et $\lambda$ en $\text{ans}$ | <input type="checkbox"/> 4. $p$ est sans dimension et $\lambda$ en $\text{an}^{-1}$              |
| <input type="checkbox"/> 2. $p$ est en $\text{ans}^{-1}$ et $\lambda$ sans dimension  | <input type="checkbox"/> 5. $p$ est sans dimension et $\lambda$ en millions d' $\text{ans}^{-1}$ |
| <input type="checkbox"/> 3. $p$ est sans dimension et $\lambda$ en $\text{ans}$       |  |

### QCM 6 Ordre de grandeur d'une épaisseur

Une cartouche de stylo contient  $V = 1,0$  mL d'encre. On trace une ligne droite de  $L = 1,0$  km de longueur et de  $l = 0,50$  mm de largeur. L'épaisseur  $h$  du trait sur la feuille est de :

- |   |   |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> 1. $h = 2,0$ nm            | <input type="checkbox"/> 4. $h = 1,0$ nm            |
| <input type="checkbox"/> 2. $h = 2,0$ mm            | <input type="checkbox"/> 5. $h = 0,5$ $\mu\text{m}$ |
| <input type="checkbox"/> 3. $h = 2,0$ $\mu\text{m}$ |   |

### QCM 7 Conversion de grandeur

Une vitesse  $v$  de 36 km/h correspond à :

- |                                     |  |
|-------------------------------------|--|
| <input type="checkbox"/> 1. 18 m/s  | <input type="checkbox"/> 4. 0,010 km/s |
| <input type="checkbox"/> 2. 5,0 m/s | <input type="checkbox"/> 5. 36 m/s     |
| <input type="checkbox"/> 3. 10 m/s  |  |

### QCM 8 Lecture d'appareil

On définit le calibre comme étant la valeur maximale que peut mesurer un appareil de mesures. Sur la photographie de la figure 1.1, le calibre utilisé est de 300 V. Quelle est la tension,  $U$ , mesurée par ce voltmètre ?

1.  $U = 33 \text{ V}$ 
 4.  $U = 100 \text{ V}$   
 2.  $U = 10 \text{ V}$ 
 5.  $U = 200 \text{ V}$   
 3.  $U = 1,15 \text{ V}$



Figure 1.1 – Multimètre - mesure de tension

### QCM 9 Une formule chimique de dilution

On dispose d'une teinture mère pure (principe actif) contenant environ  $10^{24}$  molécules. On peut effectuer une dilution de cette teinture-mère en prenant 1 volume  $V$  que l'on dilue dans 99 volumes  $V$  d'eau. On a effectué une dilution

au 1/100, et cette solution diluée est dite : 1 CH. On peut réitérer l'opération en prenant 1 volume V de la solution 1 CH et en la diluant dans 99 V d'eau. Cette deuxième solution diluée est dite 2 CH. On peut bien sûr répéter ces opérations de dilution, pour atteindre : 3 CH, 4 CH...

On se demande quel est le nombre de molécules de principe actif présent dans les solutions diluées successives de : 4 CH, 9 CH et 12 CH. On donne ci-dessous des triplets possibles, choisir le bon :

- |   |   |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> 1. $10^{16}$ , $10^{12}$ , 1 | <input type="checkbox"/> 4. $10^{18}$ , $10^8$ , 1 000    |
| <input type="checkbox"/> 2. $10^{16}$ , $10^6$ , 1    | <input type="checkbox"/> 5. $10^{20}$ , $10^{10}$ , 1 000 |
| <input type="checkbox"/> 3. $10^{18}$ , $10^6$ , 100  |   |

### QCM 10 Un algorithme informatique

La fonction  $[x] = \text{FLOOR}(x)$  est la fonction partie entière qui enlève la partie décimale d'un **flottant** x et ne garde que la partie **entière** [x]. Par exemple  $[34,35678990] = 34$

```
*****variables et initialisation*****
on définit la constante flottante PI := 3,1415926536
on définit la constante entière N:= 4
on définit la variable entière : i
on définit la variable flottante : valeur
on définit et on initialise le tableau d'entiers : resultat[]

*****boucle FOR*****

valeur = PI

FOR i de la valeur i=0 jusqu'à la valeur i=N FAIRE

    resultat[i]=FLOOR(valeur)
    valeur=valeur-FLOOR(valeur)
    valeur = 1/valeur

FIN du FOR
*****AFFICHAGE*****
Afficher le tableau : resultat
fin du programme
```



L'affichage obtenu comprend les entiers consécutifs qui sont au choix :

1. resultat = 3, 2, 5, 1, 1                       5. resultat = 3, 5, 292, 1  
 2. resultat = 3, 2, 5, 1, 17  
 3. resultat = 3, 7, 15, 1                       6. resultat = 3, 7, 15, 1, 8  
 4. resultat = 3, 7, 15, 1, 292

### OCM 11 Traitement de données 1

On obtient des données expérimentales qui sont représentées sur la figure 1.2. On cherche l'équation de la droite qui passe au plus près de tous les points. Selon vous, l'équation de cette droite est :

1.  $y = 4.x - 14$                        4.  $y = -4.x + 14$   
 2.  $y = -4.x - 14$                        5.  $y = 4.x + 30$   
 3.  $y = 4.x + 14$

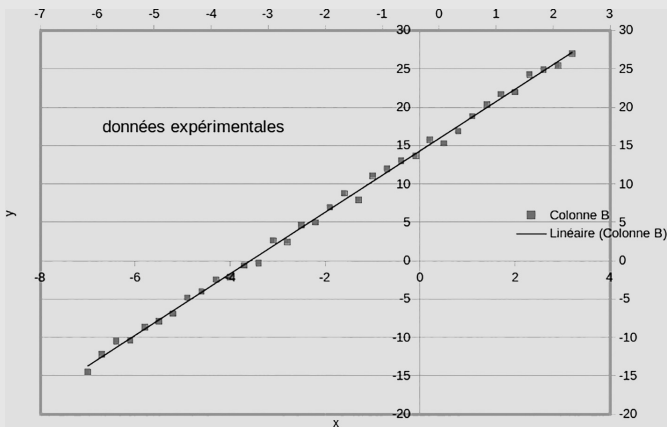


Figure 1.2 – Des données expérimentales

## OCM 12 Traitement de données 2

On obtient les données expérimentales brutes de la figure 1.3. On recherche une loi reliant  $y$  et  $x$  approchant au mieux les données expérimentales.

On se rend compte sur la figure 1.4 qu'il existe une relation linéaire entre le logarithme décimal de  $y$  et  $x$  :  $\log_{10}(y) = 0,52x + 0,12$ . On peut utiliser ce résultat pour en déduire la relation théorique entre  $Y$  et  $X$ , il s'agit de :

- 1.  $y = 1,32(3,31)^x$
- 4.  $y = 1,32(x)^{3,31}$
- 2.  $y = \frac{x}{1,32} 10^{0,52}$
- 5.  $y = 0,52(1,32)^x$
- 3.  $y = 1,32 \cdot 10^{0,52x}$

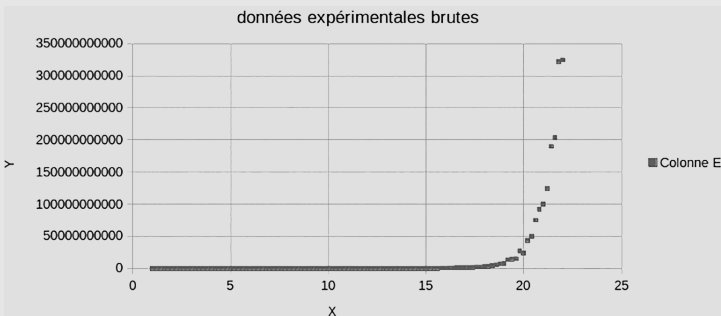


Figure 1.3 – Données brutes

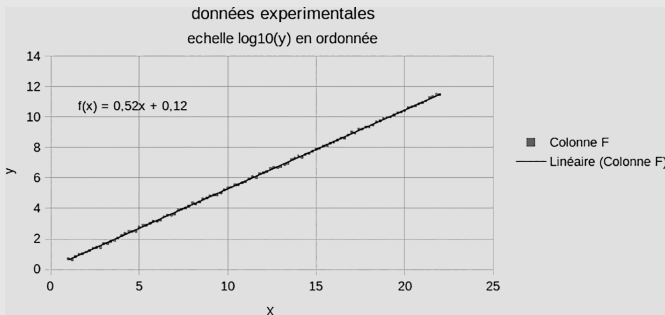


Figure 1.4 – Transformation logarithmique

## 2.1 Le système international : SI

Le système international (SI) utilise sept unités fondamentales qui permettent de construire toutes les autres :

Grandeur physique	Symbole	Unité SI
longueur	L	mètre (m)
masse	M	kilogramme (kg)
temps	T	seconde (s)
courant électrique	I	ampère (A)
température	T	kelvin (K)
quantité de matière	n	mole (mol)
intensité lumineuse	Iv	candela (cd)

## 2.2 Les unités dérivées

Il existe de nombreuses autres grandeurs, toutes avec leurs unités dans le système SI, mais elles dérivent des sept unités fondamentales précédentes. Donnons-en un tableau récapitulatif :

Grandeur physique	Symbole	Unité SI	Combinaison SI
fréquence	f	hertz (Hz)	$s^{-1}$
force	F	newton (N)	$kg.m.s^{-2}$
pression	p	pascal (Pa)	$N.m^{-2}$ ou $kg.m^{-1}.s^{-2}$
énergie	ε	joule (J)	$kg.m^2.s^{-2}$

Grandeur physique	Symbole	Unité SI	Combinaison SI
puissance	P	watt (W)	$\text{kg.m}^2.\text{s}^{-3}$ ou $\text{J.s}^{-1}$
vitesse	v		$\text{m.s}^{-1}$
accélération	a		$\text{m.s}^{-2}$
accélération de la pesanteur	g		$\text{m.s}^{-2}$
charge électrique	q	coulomb (C)	A.s
tension ou fem	U ou V	volt (V)	$\text{kg.m}^2.\text{s}^{-3}.\text{A}^{-1}$
capacité	C	farad (F)	$\text{kg}^{-1}.\text{m}^{-2}.\text{s}^4.\text{A}^2$
résistance	R	ohm ( $\Omega$ )	$\text{kg.m}^2.\text{s}^{-3}.\text{A}^{-2}$
conductance	G	siemens (S) ou ( $\Omega^{-1}$ )	$\text{kg}^{-1}.\text{m}^{-2}.\text{s}^3.\text{A}^2$
champ magnétique	B	tesla (T)	
flux magnétique	$\phi$	weber (Wb)	$\text{kg.m}^2.\text{s}^{-2}.\text{A}^{-1}$ ou V.s
inductance	L	henry (H)	$\text{kg.m}^2.\text{s}^{-2}.\text{A}^{-2}$
lumen (flux lumineux)	lm		cd ou cd.stéradian ( $4\pi$ )
Lux (flux par $m^2$ )	lx		$\text{cd.m}^{-2}$

## 2.3 La dimension de l'argument d'une fonction mathématique

L'argument  $x$  d'une fonction mathématique  $f(x)$  est forcément sans dimension, sinon le fait de changer d'unité changerait la valeur de la fonction  $f$  en ce point  $x$ . Cette remarque est très importante pour déterminer la dimension de tel ou tel paramètre, ou contrôler l'homogénéité d'une formule. De plus, la valeur renvoyée par une fonction mathématique  $f$ , pour une valeur d'argument donnée  $x$ , ne peut pas non plus avoir de dimension, il s'agit d'un simple nombre. Rappelons enfin que ce que les mathématiciens appellent radian est un nombre sans dimension pour le physicien.

Dans ce qui suit  $t$  sera la variable temps :

- Une fonction trigonométrique a pour argument l'angle  $\theta$ , que l'on mesure en radian : Il faut se souvenir que **mathématiquement** le radian se définit comme le quotient d'un arc de longueur 1 sur un rayon :

$$\theta = \frac{l}{R}$$

Donc **physiquement** le radian est un nombre **sans dimension**.

- L'argument :  $2\pi f.t$  dans la fonction  $\cos(2\pi f.t)$  est, comme indiqué plus haut, sans dimension (il s'agit de radians...).

On en déduit que  $f$  est homogène à l'inverse d'un temps  $T^{-1}$ , ou, ce qui revient au même du point de vue dimensionnel, à une pulsation (ou vitesse angulaire), qui s'exprime en  $rad.s^{-1}$  dans le système SI.

- La formule de désintégration radioactive de la population initiale de noyaux  $N_0$  :

$N(t) = N_0.e^{-\frac{t}{\tau}}$  montre que par homogénéité  $\tau$  est aussi un temps, de telle manière que le quotient  $\frac{t}{\tau}$  soit sans dimension.

- La formule de la puissance électrique  $P = U.I.\cos(\phi)$  que l'on rencontre dans tous les problèmes d'électrocinétique (en courant alternatif sinusoïdal) indique que puisque le produit  $U.I$  est bien sûr homogène à une puissance, la fonction  $\cos(\phi)$  est sans dimension. Le déphasage  $\phi$  lui-même est d'ailleurs lui aussi sans dimension, c'est un nombre (radian).
- La formule qui définit la valeur relative de deux puissances acoustiques  $I_1$  et  $I_2$  en décibel (db) est :

$$X_{db} = 10.\log_{10} \left( \frac{I_1}{I_2} \right)$$

On constate deux choses : d'abord, l'argument du logarithme est bien sans dimension car c'est un quotient  $I_1/I_2$  de 2 quantités de même dimension. Ensuite, **d'un point de vue physique, le décibel (db) est juste un nombre sans dimension** car assimilable à la valeur prise par une fonction logarithme, elle-même sans dimension.

- On lit que si on tend entre deux poteaux un fil inextensible pesant, il prendra une forme dite de chaînette ( $x$  abscisse et  $y$  ordonnée), donnée par une équation de la forme :

$$y(x) = \frac{a}{2} \cdot (e^{x/a} + e^{-x/a})$$

Il est clair que comme  $x$  et  $y$  sont des longueurs, le paramètre  $a$  doit aussi être une longueur.

## 2.4 Des formules insubmersibles

Pour pouvoir faire rapidement un calcul d'homogénéité, il est bon d'avoir en tête des formules toutes prêtes. Dans ce paragraphe, toutes les unités indiquées sont SI, **sauf indication contraire**. C'est à chacun d'établir sa liste de formules, mais elle comportera certainement les items suivants :

### ■ Mécanique

- L'énergie cinétique  $\epsilon$  :

$$\epsilon = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

dans le système SI une énergie (en J) est homogène à une masse  $m$  multipliée par une vitesse  $v$  au carré :  $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ .

- Le poids  $F$  :

$$F = m \cdot g$$

dans le système SI, une force  $F$  (en N) est homogène à une masse  $m$  multipliée par une accélération  $g$  ( $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ ). On voit d'ailleurs que du point de vue dimensionnel, multiplier une force  $F$  par une longueur  $r$  donne une énergie  $\epsilon$  :  $\epsilon = F \cdot r$ .

- La puissance  $P$  :

$$P = \frac{\epsilon}{t}$$

dans le système SI, la puissance  $P$  (en W) est homogène au quotient d'une énergie  $\epsilon$  par un temps  $t$  ( $\text{J} \cdot \text{s}^{-1}$  soit  $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$ ).

- La pression  $p$  :

$$p = \frac{F}{S}$$

une pression  $p$  (en pascal Pa) est homogène à une force  $F$  (en N) divisée par une surface  $S$  (en  $\text{m}^2$ ).

- La quantité de mouvement  $q$  ( $\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ) :

$$q = m \cdot v$$

est, du point de vue dimensionnel, le produit d'une masse  $m$  (en kg) par une vitesse  $v$ .

- Le moment cinétique  $L$  ( $\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ ) :

$$L = q \cdot r = m \cdot v \cdot r$$

est homogène au produit d'une quantité de mouvement  $q$  par une distance  $r$ .

## ■ Électricité

- La résistance  $R$  (en  $\Omega$ ) :

$$R = \frac{U}{I}$$

est le quotient de la tension  $U$  (en V) divisée par l'intensité  $I$  (en A) traversant le dipôle.

- L'énergie  $\epsilon$  (J) d'une particule de charge  $q$  (en coulomb : C) dans une zone de potentiel  $U$  (en volt) est :

$$\epsilon = q \cdot U$$

- La charge électrique  $q$  (en coulomb : C) est le produit d'une intensité (Ampère : A) par un temps  $t$  (s) :

$$q = I \cdot t$$

- Le rayon de courbure  $R$  (une longueur !) d'une particule de masse  $m$  et de charge  $q$  dans un champ magnétique  $B$  est :

$$R = \frac{m \cdot v}{q \cdot B}$$

- La puissance électrique  $P$  (en W) continue s'exprime en fonction de la tension  $U$  (V) et de l'intensité  $I$  (A) :

$$P = U.I$$

- Le champ électrique  $E$  ( $\text{V.m}^{-1}$ ) créé entre les deux branches d'un condensateur plan, séparées de la distance  $r$  (m), et mises sous la différence de potentiel  $U$  (V) s'écrit :

$$E = \frac{U}{r}$$

- La force  $F$  (N) subie par une particule de charge  $q$  (C) dans un champ électrique  $E$  ( $\text{V.m}^{-1}$ ) est homogène à :

$$F = q.E$$

- La charge  $q$  (coulomb C) accumulée par une branche d'un condensateur plan de capacité  $C$  (F) et soumis à la différence de potentiel  $U$  (V) s'écrit :

$$q = C.U$$

- L'énergie stockée par une capacité  $C$  (F) soumise à la tension  $U$  (V) s'écrit :

$$\epsilon = \frac{1}{2}C.U^2$$

- L'énergie stockée par une bobine d'inductance  $L$  (H) parcourue par l'intensité  $I$  (A) s'écrit :

$$\epsilon = \frac{1}{2}L.I^2$$

## ■ Physique microscopique et électromagnétisme

- Un photon de fréquence  $\nu$  (en Hz) a pour énergie  $\epsilon$  (en J) :

$$\epsilon = h.\nu$$

où  $h$  est la constante de Planck :  $h = 6,62.10^{-34}$  J.s

- La formule d'Einstein relie masse  $m$  (en kg), énergie  $\epsilon$  (en J) et vitesse de la lumière  $c$  (en  $\text{m.s}^{-1}$ ) :

$$\epsilon = m.c^2$$



- On peut relier trois constantes entre elles : la vitesse de la lumière  $c$  dans le vide, la perméabilité magnétique du vide  $\mu_0$  et la permittivité diélectrique du vide  $\epsilon_0$  :

$$\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$$

Les valeurs admises dans le système SI sont :

La permittivité diélectrique du vide :  $\epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \text{A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$

La perméabilité magnétique du vide :  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$

La vitesse de la lumière dans le vide :  $c = 299\,792\,458 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

## ■ Chimie

- La concentration de l'espèce chimique  $X$  se note  $[X]$  et est le quotient d'une quantité de matière par un volume :

$$[X] = \frac{n}{V}$$

La concentration se mesure usuellement en mole/litre ou  $\text{mole} \cdot \text{L}^{-1}$ . Notons que ce n'est pas une unité SI!

- La masse volumique  $\rho$  se définit comme le quotient d'une masse  $m$  par un volume  $V$  :

$$\rho = \frac{m}{V}$$

et se mesure habituellement en  $\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$ . Notons que ce n'est pas une unité SI!

- Le nombre d'entités élémentaires  $N$  (atomes par exemple) est égal au produit du nombre de mole  $n$  par la constante (ou nombre) d'Avogadro  $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} (\text{mol}^{-1})$  :

$$N = n \cdot N_A$$