MATHS BCPST 1

MÉTHODES ET EXERCICES

A. BÉGYN | G. CONNAN | R. LEROY | F. EZANNO

MATHS BCPST 1

MÉTHODES ET EXERCICES

j'intègre

4e édition

DUNOD

Création graphique de la couverture : Hokus Pokus Créations

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-078097-6

Table des matières

Chapitre 1

Logique, théorie des ensembles et manipulations des signes $\sum$ et $\prod$

Thèmes abordés dans les exercices

— Raisonnements mathématiques
— Opérations sur les ensembles
— Propriétés générales des applications
— Manipulation des symboles Σ et Π

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

— Démonstration d'une implication, d'une équivalence
— Raisonnement par contraposée
— Raisonnement par l'absurde
— Raisonnement par récurrence
— Démonstration d'une inclusion, d'une égalité entre ensembles
— Règles de calcul pour les opérations sur les ensembles
— Image directe d'une partie par une application
— Injectivité, surjectivité ou bijectivité d'une application
— Théorème d'inversibilité pour la loi de composition
— Théorème de la bijection pour les fonctions numériques
— Règles de calcul avec les symboles Σ et Π
— Règles de calcul sur les coefficients binomiaux
— Sommes usuelles : sommes arithmétiques, sommes géométriques, formule du binôme

Les méthodes à retenir

Pour démontrer une implication ou une équivalence

— Pour démontrer que $A \Longrightarrow B$ on suppose que la propriété A est verifiée et on doit démontrer que la propriété B l'est aussi.

$\hookrightarrow$ **Exercice 1.13**

— Pour démontrer l'implication $A \Longrightarrow B$, on peut raisonner par contraposée, c'est-à-dire démontrer l'implication $non(B) \Longrightarrow non(A)$: on suppose que B n'est pas verifiée et on démontre qu'alors A ne l'est pas non plus.

$\hookrightarrow$ **Exercice 1.5**

— Pour démontrer une équivalence $A \Longleftrightarrow B$ on raisonne par double-implication : on démontre l'implication $A \Longrightarrow B$ ainsi que sa réciproque $B \Longrightarrow A$.

$\hookrightarrow$ **Exercice 1.15**

Pour raisonner par l'absurde

— Pour démontrer que A est vérifiée : on suppose que A n'est pas vérifiée et on en déduit une contradiction évidente du type $1 = 0$, $3 \leq 2$, etc.

$\hookrightarrow$ **Exercices 1.10 et 1.15**

Pour démontrer une proposition logique dépendant de quantificateurs

— Pour démontrer que $\forall x \in E,\ P(x)$: on se fixe un $x \in E$ quelconque et on doit alors démontrer que $P(x)$ est vérifiée pour ce x fixé.

$\hookrightarrow$ **Exercices 1.1 et 1.5**

— Pour démontrer que $\exists x \in E /\ P(x)$: on doit donner (au moins) un exemple de $x \in E$ qui vérifie la propriété $P(x)$. Lorsque $P(x)$ est une équation alors x est l'inconnue et on doit trouver (au moins) une solution.

$\hookrightarrow$ **Exercices 1.1 et 1.14**

— Pour démontrer que $\exists! x \in E /\ P(x)$: on démontre comme précédemment que $\exists x \in E /\ P(x)$ et, de plus, qu'il ne peut y avoir deux valeurs distinctes de x pour lesquelles $P(x)$ est vraie (ceci à l'aide d'un raisonnement par l'absurde).

$\hookrightarrow$ **Exercice 1.14**

Pour raisonner par récurrence	— Si la propriété à démontrer, pour tout entier naturel n, vérifie une relation donnée entre le rang n et le rang $n+1$ on utilise alors le principe de récurrence. $\hookrightarrow$ **Exercices 1.6, 1.7, 1.19 et 1.21** — Si la propriété à démontrer, pour tout entier naturel n, vérifie une relation donnée entre les rangs n, $n+1$ et $n+2$ on utilise alors le principe de récurrence à deux pas. $\hookrightarrow$ **Exercice 1.7** — Si la propriété à démontrer, pour tout entier naturel n, vérifie une relation donnée entre tous les rangs k tel que $k \leq n$, on utilise alors le principe de récurrence forte. $\hookrightarrow$ **Exercice 1.7**
Pour démontrer une inclusion ou une égalité entre deux ensembles	— Pour démontrer l'inclusion $\mathrm{E} \subset \mathrm{F}$ on démontre l'implication $x \in \mathrm{E} \Longrightarrow x \in \mathrm{F}$. $\hookrightarrow$ **Exercices 1.10 et 1.15** — Pour démontrer l'égalité $\mathrm{E} = \mathrm{F}$ on raisonne par double-inclusion : on démontre l'inclusion $\mathrm{E} \subset \mathrm{F}$ et l'inclusion réciproque $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$. $\hookrightarrow$ **Exercices 1.10, 1.15 et 1.16** — Dans les deux cas, on peut aussi utiliser les opérations sur les ensembles. $\hookrightarrow$ **Exercices 1.15 et 1.16**
Pour déterminer le domaine de définition d'une fonction	— On repère les opérations potentiellement interdites (racines, logarithmes, divisions par zéro...), on écrit les conditions sur la variable x pour que toutes ces opérations soient définies, puis on fait la résolution. $\hookrightarrow$ **Exercice 1.4**
Pour démontrer qu'une application est injective ou surjective	— Pour démontrer que $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ est injective sur E : on se donne $(x_1, x_2) \in \mathrm{E}^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$, et on doit alors montrer que $x_1 = x_2$. $\hookrightarrow$ **Exercices 1.12, 1.13 et 1.14** — Pour démontrer que $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ est surjective de E sur F : on se donne $y \in \mathrm{F}$ fixé quelconque , et on doit alors donner (au moins) un $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = f(x)$, par exemple en démontrant que l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x a (au moins) une solution dans E. $\hookrightarrow$ **Exercices 1.12, 1.13 et 1.14** — Pour démontrer que $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ est surjective on peut aussi appliquer le théorème des valeurs intermédiaires. $\hookrightarrow$ **Exercice 1.11**

Pour démontrer qu'une application est bijective

- On revient à la définition en démontrant qu'elle est à la fois injective sur E, et surjective de E sur F.

  $\hookrightarrow$ **Exercices 1.11 et 1.13**

- On démontre les deux en même temps : on se donne $y \in \mathrm{F}$ fixé quelconque , et on doit alors montrer que $\exists! x \in \mathrm{E} /\ y = f(x)$, par exemple en démontrant que l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x a une unique solution dans E.

  $\hookrightarrow$ **Exercices 1.11 et 1.14**

- On utilise le théorème d'inversibilité pour la loi de composition : on détermine une application $g : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{E}$ telle que $f \circ g = id_{\mathrm{F}}$ et $g \circ f = id_{\mathrm{E}}$.

  $\hookrightarrow$ **Exercice 1.23**

- Dans le cas d'une fonction numérique, on peut utiliser le théorème de la bijection.

  $\hookrightarrow$ **Exercices 1.11 et 1.14**

Pour déterminer l'application réciproque d'une bijection

- Pour $y \in \mathrm{F}$ fixé quelconque, $f^{-1}(y)$ est l'unique solution de l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in \mathrm{E}$.

  $\hookrightarrow$ **Exercices 1.9 et 1.14**

- Si on a trouvé $g : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{E}$ telle que $f \circ g = id_{\mathrm{F}}$ et $g \circ f = id_{\mathrm{E}}$, alors $f^{-1} = g$.

  $\hookrightarrow$ **Exercice 1.23**

Pour déterminer l'image directe d'un ensemble par une fonction

- On étudie les variations de la fonction sur l'ensemble donné. On applique le théorème des valeurs intermédiaires sur chaque intervalle où la fonction est monotone.

  $\hookrightarrow$ **Exercice 1.8**

Pour calculer une somme formelle

- On met en facteur les termes ne dépendant pas de l'indice de sommation, on utilise ensuite les règles de calcul sur les symboles Σ, et on conclut en faisant apparaître les sommes usuelles à l'aide de changements d'indice.

  $\hookrightarrow$ **Exercices 1.17, 1.20, 1.21 et 1.22**

- Si le résultat final est donné dans l'énoncé, on peut aussi démontrer la formule par récurrence.

  $\hookrightarrow$ **Exercices 1.19 et 1.20**

Énoncés des exercices

1.1

Vrai ou faux ?

En justifiant soigneusement, dire pour chacune des assertions suivantes si elle est vraie ou fausse.

a) $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \big(x < y \text{ et } y < z\big) \Leftrightarrow \big(x < z\big)$

b) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \big(x \leq y \text{ et } x \neq y\big) \Rightarrow \big(x < y\big)$

c) $\forall a \in \mathbb{R},\ \exists b \in \mathbb{R}\ :\ a = b^2$

d) $\forall a \in \mathbb{C},\ \exists b \in \mathbb{C}\ :\ a = b^2$

e) $\forall a \in \mathbb{C},\ \exists! b \in \mathbb{C}\ :\ a = b^2$

f) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \exists t \in \mathbb{R}\ :\ x \leq t \leq y$

1.2

Reconnaître des ensembles

Parmi les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants, plusieurs sont égaux bien qu'écrits différemment. Déterminer lesquels.

$$\mathrm{E}_1 = \{5, 8, 11, 14, 17, \ldots\}, \quad \mathrm{E}_2 = \left\{x^2, x \in [\![1,5]\!]\right\}, \quad \mathrm{E}_3 = \left[-\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\right] \cap \mathbb{Z},$$

$$\mathrm{E}_4 = \left\{y^2,\ y \in [-5,-1]\right\}, \quad \mathrm{E}_5 = [\![-1,1]\!], \quad \mathrm{E}_6 = [1,+\infty[\cap[0,+\infty[\cap]-1,25],$$

$$\mathrm{E}_7 = [1,25], \quad \mathrm{E}_8 = \{3x+2, x \in \mathbb{N}^*\}, \quad \mathrm{E}_9 = \left\{m \in [1,25] : \exists k \in \mathbb{N},\ m = k^2\right\},$$

$$\mathrm{E}_{10} = \{-1, 0, 1\}, \quad \mathrm{E}_{11} = \left\{n \in \mathbb{N}^* : \exists k \in \mathbb{N}^*,\ n = 3k+2\right\},$$

$$\mathrm{E}_{12} = \{3n+2, n \in \mathbb{N}^*\}, \quad \mathrm{E}_{13} = \{m \in \mathbb{Z} :\ m \leq 1 \text{ et } m \geq -1\},$$

$$\mathrm{E}_{14} = \left\{t^2, t \in [1,5]\right\}, \quad \mathrm{E}_{15} = \left\{\sin(k\tfrac{\pi}{2}), k \in \mathbb{Z}\right\}, \quad \mathrm{E}_{16} = \{1, 4, 9, 16, 25\},$$

1.3

Sous-parties de $\mathbb{R}$

Écrire pour chacune des assertions suivantes, le plus simplement possible, l'ensemble E des réels x la vérifiant.

a) $x > 4$ et $x < 7$ et $x \neq 6$

b) $(x > 0$ et $x < 3)$ ou $x = 0$

c) $(x < 3$ et $x \in \mathbb{N})$ ou $x = 2$

d) $(x \in \mathbb{R}_+$ ou $x = -3)$ et $x < 0$

e) $\exists u \in [3,+\infty[: x = u^2$

1.4

Ensemble de définition

Déterminer l'ensemble de définition :

a) de la fonction u définie par

$$u(x) = \frac{\ln(x-1)+\sqrt{4-x}}{x^4-16} + \frac{\cos x}{\sin x - 1}.$$

b) de la fonction v définie par

$$v(x) = \sqrt{\sin(x)} - \ln(1-x^2).$$

1.5

Exemple de démonstration d'une implication par contraposée

Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n^2$ pair $\implies$ n pair.

1.6

Récurrences simples

a) Montrer l'inégalité suivante :

$$\forall n \geq 2,\ \forall x > 0,\ (1+x)^n > 1+nx$$

b) Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$1+2+4+8+\cdots+2^n = 2^{n+1}-1.$$

(la formule pour une somme géométrique vue au lycée n'est pas supposée connue).

1.7

Exemples de démonstration par récurrence

a) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

b) On définit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2^{n+1} + (-1)^n$.

c) On définit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = 0$, $u_1 = 3$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 3n$.

1.8

Image directe

Dans les exemples suivants f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Déterminer $f(\mathrm{I})$.

a) $\mathrm{I} = [\pi/4, 5\pi/6], \quad f(x) = \cos x$

b) $\mathrm{I} = [0, \sqrt{13}], \quad f(x) = \lfloor x \rfloor$

c) $\mathrm{I} = [-1, 2], \quad f(x) = x^2$

1.9 Calculer une bijection réciproque

a) Soit l'application

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to &]0,+\infty[\\ x & \mapsto & \ln(1+e^x) \end{array}$$

Montrer que f est bijective et expliciter la fonction f^{-1}.

b) Même travail avec l'application :

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x+x^2 \end{array}$$

1.10 Autour de l'image directe d'une application

Soit $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ une application. Soient A et B deux parties de E.

a) Montrer que : $f(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) = f(\mathrm{A})\cup f(\mathrm{B})$.

b) Montrer que : $f(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) \subset f(\mathrm{A})\cap f(\mathrm{B})$.

c) Montrer que si f est injective : $f(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = f(\mathrm{A})\cap f(\mathrm{B})$.

d) Montrer que si f est injective : $f\left(\overline{\mathrm{A}}\right) \subset \overline{f(\mathrm{A})}$.

e) Montrer que si f est surjective : $\overline{f(\mathrm{A})} \subset f\left(\overline{\mathrm{A}}\right)$.

1.11 Injectivité, surjectivité

Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

$$u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(2x) \end{array} \qquad v : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x \end{array}$$

$$w : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3+2x \end{array} \qquad y : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3-x \end{array}$$

1.12 Injectivité, surjectivité (II)

Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & 2x \end{array} \qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x \end{array} \qquad h : \begin{array}{rcl} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x \end{array}$$

Que penser d'une application qui serait définie par

$$\mathrm{F} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & 2x \end{array} \qquad ?$$

1.13 Injectivité, surjectivité, bijectivité et composition

Soient $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{E}$ deux applications. Démontrer les implications suivantes :

a) $g \circ f$ injective sur E $\Longrightarrow$ f injective sur E

b) $g \circ f$ surjective de E sur E $\Longrightarrow$ g surjective de F sur E

c) $g \circ f$ surjective de E sur E et g injective sur F $\Longrightarrow$ f surjective de E sur F

d) $g \circ f$ bijective de E sur E et $f \circ g$ bijective de F sur F
$\Longrightarrow$ f bijective de E sur F et g bijective de F sur E

1.14 Exemple de fonctions numériques bijectives

a) On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 5$. f est-elle injective, surjective, bijective ? Montrer que la restriction de f à l'intervalle $[0, +\infty[$ induit une bijection dont on déterminera la réciproque.

b) Montrer que l'application $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \sin x + 2x$, est bijective. Montrer que l'équation $g(x) = 2$ admet une unique solution réelle, et que cette solution est strictement positive.

1.15 Exemples de démonstration d'une équivalence ou d'une égalité entre ensembles

Soient E un ensemble et $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}) \in \mathscr{P}(\mathrm{E})^3$.

a) Montrer que : $\overline{\mathrm{A}} \subset \mathrm{B} \Longleftrightarrow \mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{E}$.

b) Établir que : $\big(\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}\big) \setminus \big(\mathrm{A} \setminus \mathrm{C}\big) = \big(\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}\big) \cap \mathrm{C} = (\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) \setminus \mathrm{B}$.

c) Démontrer que : $\left\{ \begin{array}{lcl} \mathrm{A} \cup \mathrm{B} & = & \mathrm{A} \cup \mathrm{C} \\ \mathrm{A} \cap \mathrm{B} & = & \mathrm{A} \cap \mathrm{C} \end{array} \right. \Longleftrightarrow \mathrm{B} = \mathrm{C}$.

d) Démontrer que : $\left\{ \begin{array}{lcl} \mathrm{A} \cup \mathrm{B} & = & \mathrm{A} \cap \mathrm{C} \\ \mathrm{A} \cap \mathrm{B} & = & \mathrm{A} \cup \mathrm{C} \end{array} \right. \Longleftrightarrow \mathrm{A} = \mathrm{B} = \mathrm{C}$.

1.16 Différence symétrique de deux ensembles

Soient E un ensemble et $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}) \in \mathscr{P}(\mathrm{E})^3$. On définit la différence symétrique de A et B, notée $\mathrm{A} \Delta \mathrm{B}$, par : $\mathrm{A} \Delta \mathrm{B} = \big(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}\big) \setminus \big(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}\big)$.

a) Montrer que : $\mathrm{A} \Delta \mathrm{B} = \big(\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}\big) \cup \big(\mathrm{B} \setminus \mathrm{A}\big)$.

b) On suppose que $\mathrm{A} \Delta \mathrm{B} = \mathrm{A} \Delta \mathrm{C}$. Établir que $\mathrm{B} = \mathrm{C}$.

1.17 Calculs classiques de sommes

Pour tout entier naturel n non nul, calculer les sommes suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} 1$, $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} i\right) + \left(\sum_{j=1}^{n} j\right)$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (i + j)$, $\displaystyle\sum_{1 \leq j \leq i \leq n} 1$.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3^k} \binom{n}{k}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$.

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

1.18

Calculs classiques de produits

Pour tout entier naturel n non nul, calculer les produits suivants :

a) Le produit des entiers entre 1 et n.

b) Le produit des entiers pairs entre 1 et $2n$.

c) Le produit des entiers impairs entre 1 et $2n+1$.

d) $\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}$.

1.19

Somme des termes d'une ligne dans le triangle de Pascal

Soit $n \in \mathbb{N}$. Établir que :

$$\forall p \in [\![0, n]\!], \quad \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

1.20

Calcul de somme et coefficients binomiaux

Soient n et p deux entiers naturels tels que $n \geq p$. Déterminer $\sum_{i=0}^{p} \binom{n}{i}\binom{n-i}{p-i}$.

1.21

Calculs de sommes doubles

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On admettra que : $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. Calculer :

a) $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} \frac{j}{i}$.

b) $\sum_{1 \leq j < i \leq n} ij$.

1.22

Sommes de coefficients binomiaux « de deux en deux »

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère les sommes

$$\mathrm{A}_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}, \quad \mathrm{B}_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}, \quad \mathrm{S}_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}, \quad \mathrm{T}_n = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}.$$

a) Calculer A_n et B_n en fonction de n.

b) En déduire S_n et T_n en fonction de n.

c) Déterminer $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}$.

1.23

Exemple d'application fonctionnelle : l'application shift

On pose $\mathrm{E} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (ensemble des fonctions numériques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). Pour $\theta \in \mathbb{R}$ on note φ_θ l'application de E dans E qui associe à $f \in \mathrm{E}$ la fonction $g = \varphi_\theta(f)$ définie par $g \in \mathrm{E}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x+\theta)$$

a) Établir que pour tout $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$, on a : $\varphi_{\theta_1} \circ \varphi_{\theta_2} = \varphi_{\theta_1+\theta_2}$.

b) En déduire que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, l'application φ_θ est bijective de E sur E et donner sa réciproque.

Du mal à démarrer ?

1.1 «$\forall a, \ldots$» : ce qui suit est-il vrai pour toute valeur de a ?
«$\exists a$» : puis-je trouver un a tel que … ?

1.2 Mettre tous ces ensembles sous leur forme la plus simple

1.3 Traduire les opérations logiques en opérations sur des intervalles

1.4 Repérer les opérations potentiellement interdites. Traduire par des conditions sur x.

1.5 n est impair équivaut à : $\exists p \in \mathbb{N} / \ n = 2p+1$.

1.6 Récurrences classiques

1.7 a) Par récurrence sur n.
b) Par récurrence à deux pas sur n.
c) Par récurrence forte sur n.

1.8 Examiner les variations de f sur I

1.9 Trouver $f^{-1}(y)$, c'est résoudre $f(x) = y$ d'inconnue x.

1.10 a) Par double-inclusion en raisonnant sur les éléments.
b) Raisonner sur les éléments.
c) Par une application injective un antécédent est unique...
d) et e) Raisonnement par l'absurde.

1.11 Prendre un y quelconque dans l'ensemble d'arrivée. A t-il forcément un antécédent ? Peut-il en avoir plusieurs ?

1.12 Même indication !

1.13 a) et b) Utiliser les définitions.
c) Utiliser b).
d) Utiliser les définitions.

1.14 Étudier les variations des fonctions.

1.15 a), b) et c) Raisonner sur les éléments. d) Pour $\Longrightarrow$: commencer par montrer que $C \subset A$.

1.16 a) Faire le calcul en utilisant les règles de calcul avec l'union et l'intersection.
b) Raisonner sur les éléments.

1.17 a) Faire apparaître la somme arithmétique $\sum_{k=1}^{n} k$.
b) Faire apparaître la formule du binôme.
c) Reconnaître des sommes télescopiques.

1.18 a), b) et c) Faire apparaître des factoriels.
d) Écrire le produit sous forme développée.

1.19 Raisonner par récurrence sur n.

1.20 Simplifier le terme général de la somme.

1.21 a) Permuter les Σ et faire apparaître la somme arithmétique $\sum_{k=1}^{n} k$.
b) Utiliser une somme double et faire apparaître une somme arithmétique.

1.22 a) Utiliser la formule du binôme.
b) Exprimer S_n et T_n en fonction de A_n et B_n.
c) Utiliser b).

1.23 a) Utiliser la définition de φ_θ.
b) Utiliser le théorème d'inversibilité pour la loi de composition.