

Ronan Lefort

Ondes et vibrations

Fondamentaux et applications
à l'acoustique et à la diffusion de la chaleur

2^e édition

DUNOD

NOUS NOUS ENGAGEONS EN FAVEUR DE L'ENVIRONNEMENT :



Nos livres sont imprimés sur des papiers certifiés pour réduire notre impact sur l'environnement.



Le format de nos ouvrages est pensé afin d'optimiser l'utilisation du papier.



Depuis plus de 30 ans, nous imprimons 70% de nos livres en France et 25% en Europe et nous mettons tout en œuvre pour augmenter cet engagement auprès des imprimeurs français.



Nous limitons l'utilisation du plastique sur nos ouvrages (film sur les couvertures et les livres).

Table des matières

Avant-propos	13
Notations utilisées	15

Partie I Les fondamentaux

1 Oscillateurs harmoniques et anharmoniques	19
I Mouvements autour d'un équilibre : relaxation, oscillation	19
A Minimum d'énergie et écart à l'équilibre	19
B Période des oscillations	21
II Oscillations de faible amplitude : l'approximation harmonique	22
A L'oscillateur harmonique	22
A.1 Oscillations libres sans frottement	22
A.2 Relaxation de l'oscillateur harmonique	24
B Approximation harmonique de systèmes plus complexes	26
B.1 L'approximation harmonique dans le cas général	26
B.2 Exemple : le pendule simple	27
III Oscillations de forte amplitude : le rôle des non-linéarités	32
2 Vibrations moléculaires	35
I Hypothèse harmonique, ordres de grandeur	36
A Potentiel interatomique	36
B Représentation vectorielle	38
II Modes de vibration moléculaires	40
A Exemples	40
A.1 Exemple 1 : Une partie mobile à deux dimensions	40
A.2 Exemple 2 : Plusieurs parties mobiles	45
B Méthode générale	51
B.1 Équation du mouvement	51
B.2 Notion de mode de vibration	53
B.3 Matrice dynamique, pulsations propres, modes propres	54
B.4 Mouvement de vibration général	56
C Approche énergétique	56
C.1 Énergie potentielle	56

	C.2	Énergie cinétique	57
	C.3	Énergie mécanique	57
	C.4	Application aux systèmes moléculaires	57
III		Un exemple : la molécule de CO ₂	58
	A	Molécule isolée (en phase gaz)	59
	A.1	Interprétation de la forme des modes	60
	A.2	Coordonnées normales	61
	A.3	Amplitude quadratique moyenne	61
	B	Molécule en phase condensée	62
IV		Classification de la symétrie des modes de vibration	62
	A	Symétrie des modes propres	63
	B	Outils de classification	63
	B.1	Théorie des groupes et de leurs représentations	63
	B.2	Application aux vibrations moléculaires	64
	B.3	Règles de sélection en spectroscopie	66
	C	Exemples	66
	C.1	H ₂ O	66
	C.2	Retour sur CO ₂	68
	3	Systèmes de grande dimension	71
I		Systèmes fermés et ondes stationnaires	71
	A	La chaîne plombée unidimensionnelle	72
	A.1	Modes longitudinaux et transverses	72
	A.2	Observations expérimentales	73
	A.3	Matrice dynamique	74
	A.4	Fréquences propres de la chaîne	76
	A.5	Vecteurs propres des modes de la chaîne	80
	B	Onde stationnaire	80
	C	Corde vibrante continue	81
	C.1	Équation d'onde	82
	C.2	Fréquences de vibration, relation de dispersion	82
	C.3	Mélange de modes	83
II		Systèmes ouverts et propagation	84
	4	Ondes	87
I		Ondes tridimensionnelles usuelles dans un milieu non dispersif	88
	A	Ondes planes	88
	B	Ondes sphériques	89
	C	Atténuation, évanescence	90
II		Puissance transportée et impédance	91
	A	Densité de puissance et impédance	91
	A.1	Densité de puissance	92
	A.2	Impédance spécifique du milieu	93
	B	Cas d'une impédance complexe : la puissance réactive	94

	B.1	Exemple d'une onde atténuée	96
	B.2	Exemple d'une onde stationnaire	96
C		Relation de continuité et densité volumique d'énergie	97
D		Remarques et exemples	98
	D.1	Remarques sur les ondes planes	98
	D.2	Remarques sur les ondes sphériques	98
	D.3	Le câble coaxial	99
	D.4	Onde de déformation élastique dans un solide	99
III		Réflexion et transmission	100
A		Coefficients de réflexion et transmission en amplitude	101
	A.1	Définitions	101
	A.2	Relation avec les impédances	102
B		Coefficients de réflexion et transmission en énergie	103
IV		Phénomènes ondulatoires particuliers	103
A		Battements	103
B		Vitesses de phase et de groupe, paquet d'ondes	104
C		Effet Doppler	108
	C.1	La source est en mouvement	108
	C.2	La source et le récepteur sont en mouvement	109
D		Onde de choc	110
	D.1	« Bang » supersonique en aviation	110
	D.2	Effet Cerenkov	111
5		Relaxations et phénomènes de transport	113
I		Ondes suramorties	114
A		Ondes stationnaires	115
B		Ondes propagatives	118
	B.1	Amortissement faible ($\gamma \ll \omega$)	118
	B.2	Amortissement fort ($\gamma \gg \omega$)	119
II		Processus incohérents	120
A		Polarisation d'orientation	120
	A.1	Processus aléatoire	121
	A.2	Équation différentielle	122
	A.3	Quelques solutions	122
B		Marche au hasard 1D	125
	B.1	Concentration de particules	125
	B.2	Flux de particules : loi de Fick	125
	B.3	Conservation de la matière et équation d'onde	126
C		Extension du modèle à 3D	127
D		Étude d'une diffusion unidimensionnelle	127
	D.1	Solution d'onde plane	127
	D.2	Condition initiale particulière	128

I	Oscillations forcées de chaînes fermées	132
A	Oscillateur harmonique forcé	132
B	Oscillateur paramétrique	134
C	Oscillations forcées de chaînes fermées	135
C.1	Bilan des forces pour une chaîne d'oscillateurs forcés	136
C.2	Équation du mouvement et solution formelle en régime permanent	137
C.3	Recherche de la base adaptée	138
C.4	Aspects méthodologiques	139
D	Exemples	141
D.1	Filtrage mécanique	141
D.2	Règles de sélection en spectroscopie infra-rouge (du point de vue de la physique classique)	143
II	Ondes avec source	145
A	Équation de d'Alembert dans un système ouvert avec source	146
A.1	Avec condition aux limites	147
A.2	Avec force extérieure	150
B	Système continu fermé	154
B.1	Application à la corde de violon	155
B.2	Force périodique ponctuelle	156
B.3	Exemple d'une force périodique étendue	158

Partie II Quelques applications

7	Ondes acoustiques	163
I	Pression et flux acoustiques	163
II	Ondes sonores dans un fluide	164
A	Équation d'onde	165
B	Énergie et impédances acoustiques	166
III	Ondes sonores dans un solide	167
A	Approximation unidimensionnelle	167
B	Ondes longitudinales et transverses dans un solide isotrope .	168
B.1	Onde élastique longitudinale	169
B.2	Onde élastique transverse	169
B.3	Exemple d'application	170
IV	Quelques instruments de musique	171
A	Étude simplifiée des vibrations d'une membrane de timbale .	171
B	Quelques instruments à cordes	176
8	Acoustique technique	177
I	L'oreille humaine	177
A	Perception auditive	178
B	Échelle sonore et décibels	179

	C	Éléments subjectifs d'écoute	180
II		Acoustique des salles	181
	A	Coloration et réverbération	181
	A.1	Réflexion, Absorption, Modes de salle	182
	A.2	Échos, filtrage par réflexion	183
	A.3	Champs acoustiques	183
	A.4	Réverbération	185
	B	Concepts architecturaux	186
	C	Exemples	187
	C.1	Les théâtres antiques	187
	C.2	Le Royal Albert Hall	188
	C.3	La salle Pleyel	188
	D	Éléments et matériaux actifs d'une salle d'écoute	188
	D.1	Absorbeurs	188
	D.2	Diffuseurs	189
III		Isolation phonique	190
	A	Bruit et atténuation du bruit	190
	B	Mesures et normes	191
	B.1	Indice d'exposition sonore	191
	B.2	Isolation des bruits aériens	192
	B.3	Isolation des bruits de choc	192
	B.4	Réglementation actuelle	192
	C	Matériaux et assemblages	193
	C.1	Lois des masses et des fréquences	194
	C.2	Quelques exemples	194
9 Transferts thermiques			197
I		Mécanismes de transfert thermique	198
	A	La chaleur	198
	B	Flux thermiques	199
	C	Conduction	199
	D	Convection	200
	E	Rayonnement	200
II		Quelques situations élémentaires	201
	A	Régimes stationnaires	201
	A.1	Paroi simple	201
	A.2	Échangeur à ailettes	202
	B	Transferts hors équilibre	204
	B.1	Diffusion de la chaleur à travers une paroi semi-infinie	204
	B.2	Température de contact entre deux milieux	206
III		Introduction à la thermique des bâtiments	208
	A	Grandeurs techniques et parois réelles	208
	A.1	Résistance thermique d'une paroi	208
	A.2	Pont thermique	210

	A.3	Spécificité des parois vitrées	211
	A.4	Inertie thermique	211
B		Réglementation	212
	B.1	La conception bioclimatique	213
	B.2	La consommation d'énergie primaire	214
10 Vagues			215
I		Introduction	215
II		Forme de vagues de faible amplitude	217
	A	Observations	217
	B	Forme de l'onde	218
	B.1	Référentiel et conditions aux limites	218
	B.2	Lois de l'hydrodynamique	219
	B.3	Discussion de la forme	221
III		Relation de dispersion	222
	A	Établissement de la loi	222
	B	Discussion des cas limites	225
	B.1	Longueur capillaire	225
	B.2	Ondes de gravité en eaux profondes	225
	B.3	Ondes de gravité en eaux peu profondes	226
	B.4	Tsunamis	226
IV		Vagues de grande amplitude : les solitons	227
	A	Équation d'onde	227
	A.1	Dispersion	227
	A.2	Non-linéarités	228
	A.3	Introduction dans l'équation d'onde	228
	B	Solution	229
11 Propagation de la lumière dans un matériau diélectrique			233
I		Ondes électromagnétiques dans la matière	233
	A	Champs électromagnétiques dans la matière	234
	A.1	Interaction rayonnement – matière	234
	A.2	Réponses électriques d'un matériau	235
	A.3	Réponses magnétiques d'un matériau	236
	B	Les équations de Maxwell	237
	C	Dispersion dans un matériau neutre et isolant	238
	D	Puissance et impédance électromagnétique	239
II		Propriétés optiques des diélectriques	239
	A	Champ local et polarisabilité	240
	A.1	Milieux dilués	241
	A.2	Milieux denses	241
	B	Le modèle de l'électron élastiquement lié	241
	C	Propriétés optiques	242
	C.1	Indice optique	242

C.2	Loi de dispersion	244
-----	-----------------------------	-----

Partie III Problèmes et exercices

12 Énoncés		247
I	Outils mathématiques	248
A	Changement de coordonnées	248
B	Le choix des axes	248
C	La classique cycliste	249
II	Oscillateurs à un degré de liberté	250
A	Oscillations verticales d'un iceberg	250
B	Résonateur de Helmholtz	250
C	Le salaire de la peur	250
III	Oscillateurs à N degrés de liberté	251
A	Molécule de biphenyle	251
B	La molécule d'ammoniaque	251
IV	Oscillateurs à grand nombre de degrés de liberté	252
A	Phonons	252
B	Étude d'une chaîne d'oscillateurs électriques couplés	253
C	Corde de guitare	256
D	Corde de piano	257
V	Zones de dispersion réactives, ondes évanescentes	257
A	Chaîne de pendules couplés	257
B	Barrière tunnel	258
VI	Lignes de transmission	258
A	Câble coaxial sans pertes	258
B	Réflexion, impédance caractéristique ou de ligne	258
VII	Acoustique	259
A	Pavillon d'un instrument à vent	259
B	Le monde du silence	260
C	Champ direct et champ réverbéré	260
D	Isolation phonique	260
VIII	Thermique	260
A	Chauffer le café	260
B	Cuire les pâtes	261
IX	Vagues	262
A	Forme des ondes de surface	262
B	Dispersion des ondes de surface	262
X	Optique	263
A	Propriétés optiques de miroirs métalliques	263
13 Corrigés		265
I	Outils mathématiques	266

A	Changement de coordonnées	266
B	Le choix des axes	266
C	La classique cycliste	267
II	Oscillateurs à un degré de liberté	267
A	Oscillations verticales d'un iceberg	267
B	Résonateur d'Helmholtz	268
C	Le salaire de la peur	268
III	Oscillateurs à N degrés de liberté	268
A	Molécule de biphényle	268
B	La molécule d'ammoniaque	269
IV	Oscillateurs à grand nombre de degrés de liberté	270
A	Phonons	270
B	Étude d'une chaîne d'oscillateurs électriques couplés	272
C	Corde de guitare	277
D	Corde de piano	279
V	Zones de dispersion réactives, ondes évanescentes	280
A	Chaîne de pendules couplés	280
B	Barrière tunnel	281
VI	Lignes de transmission	283
A	Câble coaxial sans pertes	283
B	Réflexion, impédance caractéristique ou de ligne	284
VII	Acoustique	285
A	Pavillon d'un instrument à vent	285
B	Le monde du silence	287
C	Champ direct et champ réverbéré	287
D	Isolation phonique	288
VIII	Thermique	290
A	Chauffer le café	290
B	Cuire les pâtes	292
IX	Vagues	294
A	Forme des ondes de surface	294
B	Dispersion des ondes de surface	296
X	Optique	297
A	Propriétés optiques de miroirs métalliques	297
	Annexes	299

Partie IV Annexes

A	Rappels sur le théorème du moment cinétique	301
B	Représentations complexes d'ondes	303
I	Représentation complexe d'une fonction sinusoïdale du temps	303

A	Construction	303
B	Traitement de la phase constante	304
C	Calculs linéaires en représentation complexe	304
	C.1 Somme de représentations	304
	C.2 Produit par un scalaire complexe	304
II	Représentation complexe d'une onde	305
	A Représentation complexe d'une onde plane propagative . . .	305
	B Représentation complexe d'une onde stationnaire	305
	C Représentation complexe de la puissance d'une onde	305
C	Groupes ponctuels de symétrie	307
I	Quelques tables de caractères	307
D	Séries et transformées de Fourier et Laplace	309
I	Série de Fourier	309
II	Transformée de Fourier	310
	A Définitions	310
	B Quelques transformées de Fourier usuelles	310
III	Transformée de Laplace	311
	A Définition	311
	B Quelques transformées de Laplace usuelles	311
IV	Produit de convolution	312
	A Définition	312
	B Relation avec les transformées	312
V	Application à la résolution d'équations différentielles, fonctions de Green	312
	A Réponse impulsionnelle, fonction de Green	313
	B Réponse générale	313
Index		315

Avant-propos

De l'importance des phénomènes oscillatoires en physique et en chimie

Il est bien connu que tout système à l'équilibre (mécanique, thermodynamique...) se trouve dans un état de minimum d'énergie (potentielle, libre...). Ce constat peut être fait dans la totalité des branches de la physique qui servent à décrire des objets aussi variés que des systèmes planétaires, les phases d'un corps à une température donnée, des pièces mécaniques en interaction, des solutions chimiques réactives, les états de l'atmosphère, les phénomènes électriques au sein des matériaux...

Mais dans la quasi-totalité des cas, les systèmes considérés ne sont jamais réellement statiques (ou ne sont pas utiles s'ils sont statiques) : ils sont en mouvement **autour** de leur position d'équilibre. Une corde de violon à l'équilibre ne produit aucun son, elle doit être mise en mouvement par un archet pour cela. La surface de la mer n'est jamais plane et horizontale : elle est naturellement agitée de vagues. Un solide cristallin, même supposé parfait, n'est pas constitué d'atomes immobiles : les atomes sont animés de mouvements de vibration (phonons) dus à l'énergie thermique. L'air ambiant à l'équilibre véhicule une multitude de sons qui témoignent de variations locales de sa pression par rapport à la pression atmosphérique moyenne, et la lumière existe dans le vide : elle est elle-même constituée de fluctuations des champs magnétiques et électriques qui seraient nuls à l'équilibre. On pourrait multiplier les exemples de la sorte.

Si l'importance de ces phénomènes dynamiques hors équilibre en science de la matière comme dans la vie quotidienne apparaît comme une évidence, leur origine peut parfois être complexe. Elle peut être liée à des fluctuations aléatoires (vent agitant la surface de l'eau, soubresauts d'un amortisseur de voiture, agitation thermique d'un ensemble de molécules...), ou bien à des phénomènes parfaitement cohérents (vibration d'une corde de piano, lumière laser...). Très souvent, ces mouvements se répètent de manière périodique au cours du temps. On parle alors de phénomènes **vibratoires**, **oscillatoires**, ou d'**ondes** (si le phénomène se propage dans l'espace).

Dans le domaine des sciences des matériaux, ces phénomènes dynamiques autour d'un équilibre revêtent une importance capitale. Les vibrations mécaniques des atomes d'une molécule apparaissent à des fréquences caractéristiques de la structure moléculaire : elles en sont comme l'« empreinte digitale » qui peut être facilement analysée par des techniques de spectroscopie. La structure des matériaux

de construction va déterminer comment ils répondent à des sollicitations hors équilibre (échauffement, vibrations sonores...) et ainsi façonner leurs qualités d'isolation thermique ou phonique. Les oscillations des électrons déterminent entièrement les propriétés optiques d'un matériau (transparence, couleur...)

L'objectif de ce cours est de présenter les **caractères universels** de ces mouvements proches d'un équilibre stable, ainsi que les **outils conceptuels** nécessaires à leur description. Des exemples seront choisis dans plusieurs domaines de la physique afin d'en illustrer la diversité. En fonction de la nature fermée (molécule, corde...) ou ouverte (atmosphère...) des systèmes considérés, les phénomènes seront décrits comme des vibrations (stationnaires) ou au contraire comme des ondes qui se propagent. Que ce soit pour décrire la propagation du son, de la lumière ou bien les vibrations atomiques, de nombreuses situations peuvent être décrites par une approche mécanique (mouvement de molécules dans un gaz, mouvement d'électrons...). Bien qu'apparaissant parfois assez académique, cette approche présente l'avantage de la simplicité : les notions de vibrations et ondes seront abordées en premier lieu à l'aide de ce point de vue mécanique, qui permettra d'introduire simplement les notions essentielles de modes de vibration, de propagation et de loi de dispersion.

De l'utilisation de cet ouvrage

Cet ouvrage s'adresse aux étudiants de physique et chimie des seconds cycles universitaires et écoles d'ingénieurs. Les étudiants de licence trouveront dans la première partie les briques fondamentales indispensables à leur progression et pourront faire des connexions avec les enseignements d'électromagnétisme, de physique quantique ou de physique du solide. Les élèves ingénieurs trouveront tout au long du texte, et en particulier dans la seconde partie, des illustrations de l'importance des phénomènes vibratoires et ondulatoires au travers de divers domaines d'application (spectroscopie, acoustique, thermique...). Ces applications prendront un sens spécifique pour les étudiants des formations d'ingénieurs matériaux ou de filières physique-chimie, qui pourront tirer parti très directement des thèmes abordés.

En support du cours, les lecteurs pourront trouver un certain nombre d'outils ayant pour but de faciliter leur assimilation des notions et savoir-faire à acquérir :

- **des exercices corrigés** : qui se veulent un accompagnement de l'apprentissage des notions fondamentales par l'exemple, et mettent l'accent sur des savoir-faire essentiels ou au contraire sur des difficultés techniques particulières,
- **des annexes** : qui permettent de faciliter la lecture du texte principal en le soulageant de ses aspects les plus techniques, tout en proposant les boîtes à outils nécessaires aux étudiants qui souhaitent approfondir leur travail,
- **des animations vidéo** : permettant de mieux visualiser les dépendances temporelles des phénomènes ondulatoires. Ces dernières sont disponibles en ligne et leurs URL d'accès sont précisées dans le texte. Afin de faciliter l'accès à ces liens, des QR codes sont également donnés.

Notations utilisées

z	Nombre réel
\underline{z}	Nombre complexe
\underline{z}^*	Nombre complexe conjugué
$\bar{3} = -3$	(Pour gagner de la place dans les écritures matricielles)
$[A]$	Matrice
$ A $	Déterminant de la matrice A
$ u\rangle = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$	Vecteur colonne
$\langle v = (\cdot \quad \cdot \quad \cdot)$	Vecteur ligne
$\langle v u\rangle$	Produit scalaire
$\{E\}$	Base (d'un espace vectoriel)
$ u, E\rangle$	Vecteur exprimé dans la base $\{E\}$
$ \dot{X}\rangle = \frac{d}{dt} X\rangle$	Dérivée par rapport au temps
$ \ddot{X}\rangle = \frac{d^2}{dt^2} X\rangle$	Double dérivée par rapport au temps

\hat{f} Transformée (de Fourier ou de Laplace) de la fonction f

$\vec{\nabla} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}$ Vecteur « nabla »

$\vec{\nabla} f$ Gradient d'une fonction f

$\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ Divergence d'un champ de vecteur \vec{u}

$\vec{\nabla} \wedge \vec{u}$ Rotationnel d'un champ de vecteurs \vec{u}

Première partie

Les fondamentaux

1

Oscillateurs harmoniques et anharmoniques

Sommaire

I	Mouvements autour d'un équilibre : relaxation, oscillation	19
A	Minimum d'énergie et écart à l'équilibre	19
B	Période des oscillations	21
II	Oscillations de faible amplitude : l'approximation harmonique	22
A	L'oscillateur harmonique	22
B	Approximation harmonique de systèmes plus complexes .	26
III	Oscillations de forte amplitude : le rôle des non-linéarités	32

I Mouvements autour d'un équilibre : relaxation, oscillation

Une première description élémentaire d'un phénomène vibratoire et des ingrédients minimaux qui en sont à l'origine peut être abordée via un exemple mécanique très simple.

A Minimum d'énergie et écart à l'équilibre

Considérons une bille qui roule sur un chemin dans une direction (Ox), le chemin ayant une altitude variable $z(x)$. Si cette altitude possède un minimum pour une position x_0 , alors cette dernière constitue une position d'équilibre stable pour la bille (figure 1.1).

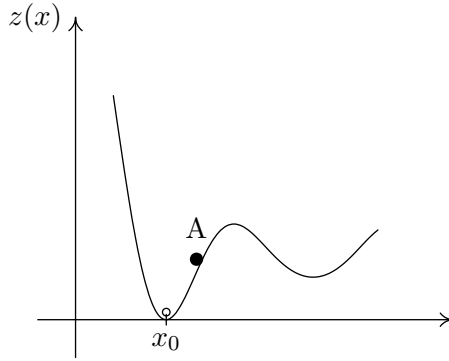


FIGURE 1.1 – Position d'équilibre stable d'une bille roulant sur un chemin d'altitude variable.

Lorsque la bille se déplace le long du chemin suivant la coordonnée x , son altitude suit $z(x)$, et donc son énergie potentielle de pesanteur suit une fonction de même forme ($E_p(x) = mgz(x)$). Si on suppose que la bille est maintenue immobile en $x = x_0$ et que $z(x_0) = 0$, alors l'équilibre stable correspond à une énergie mécanique nulle.

Supposons que l'on écarte la bille jusqu'au point A , et qu'on la lâche à $t = 0$ sans vitesse initiale. À $t = 0$, l'énergie mécanique n'est donc plus nulle : elle vaut $E_m = mgz_A$. La bille va acquérir une vitesse et redescendre vers x_0 .

Un premier cas de figure est un roulement soumis à un frottement important, qui dissipe rapidement toute l'énergie mécanique. La bille dans ce cas va s'arrêter exactement en x_0 : son mouvement est un simple retour vers l'équilibre stable (on parle dans ce cas de **relaxation** vers l'équilibre).

Un second cas de figure correspond au frottement nul. L'énergie mécanique dans ce cas se conserve : au fur et à mesure que la bille descend et perd de l'énergie potentielle, elle gagne en énergie cinétique (elle accélère), et arrive en x_0 (minimum de E_p) avec un maximum de vitesse. Elle va donc dépasser son point d'équilibre stable et continuer son mouvement en remontant (et donc en ralentissant jusqu'à un point B où sa vitesse va s'annuler). Le point B (de même altitude que A) ne correspondant pas à un équilibre, la bille va repartir vers le point A , et ce indéfiniment : on observe donc des **oscillations** autour de la position d'équilibre stable (cf. figure 1.2).

On constate qu'il suffit de très peu d'éléments pour générer des oscillations : i) l'existence d'une position d'équilibre stable (qui va être associée à une force de rappel vers cet équilibre si le système est mis hors équilibre), et ii) un apport initial d'énergie (mécanique) au système, qui ne peut ainsi pas rester dans sa position d'équilibre stable, pour laquelle son énergie cinétique est maximale.

L'analyse mécanique des oscillations dans le cas d'école précédent est très simple. Au cours de son mouvement, l'énergie mécanique de la bille s'écrit :

$$E_m = \frac{1}{2}mv(x)^2 + E_p(x)$$