

# **ANALYSE COMPLEXE POUR LA LICENCE 3**



# **ANALYSE COMPLEXE POUR LA LICENCE 3**

Cours et exercices corrigés

*Patrice Tauvel*

Professeur à l'université de Poitiers

**DUNOD**

**Illustration de couverture : digitalvision®**

**Conseiller scientifique : Sinnou David**

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1<sup>er</sup> juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Paris, 2006, 2020 pour la nouvelle présentation  
11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff  
www.dunod.com  
ISBN 978-2-10-081085-7

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

# Table des matières

<b>AVANT-PROPOS</b>	XI
<b>CHAPITRE 1 • SÉRIES NUMÉRIQUES</b>	
1.1 Notations et rappels	1
1.2 Limite supérieure et limite inférieure	2
1.3 Généralités sur les séries numériques	4
1.4 Séries à termes positifs	6
1.5 Convergence absolue	8
1.6 Règles de Cauchy et de d'Alembert	10
1.7 Séries alternées	11
1.8 Séries semi-convergentes	12
1.9 Série produit	13
1.10 Convergence associative ou commutative	14
1.11 Intégrales et séries	17
Exercices	19
Solutions des exercices	20
<b>CHAPITRE 2 • SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS</b>	
2.1 Convergence simple	23
2.2 Convergence uniforme	24
2.3 Continuité	25
2.4 Dérivabilité	25
2.5 Intégrabilité	27

---

2.6	Séries de fonctions	28
2.7	Convergence normale	29
	Exercices	30
	Solutions des exercices	31
<b>CHAPITRE 3 • SÉRIES ENTIÈRES</b>		
3.1	Généralités	35
3.2	Rayon de convergence	36
3.3	Continuité et intégrabilité	38
3.4	Dérivabilité	39
3.5	Fonctions développables en série entière	40
3.6	Quelques exemples	42
3.7	Fonction exponentielle	43
3.8	Fonctions circulaires et hyperboliques	45
	Exercices	46
	Solutions des exercices	47
<b>CHAPITRE 4 • FONCTIONS ANALYTIQUES</b>		
4.1	Définition des fonctions analytiques	50
4.2	Principe du prolongement analytique	52
4.3	Principe des zéros isolés	52
	Exercices	54
	Solutions des exercices	54
<b>CHAPITRE 5 • FONCTIONS HOLOMORPHES</b>		
5.1	Rappels	58
5.2	Conditions de Cauchy-Riemann	59
5.3	Déterminations continues du logarithme	62
5.4	Autres déterminations continues	64
	Exercices	65
	Solutions des exercices	66

**CHAPITRE 6 • ANALYTICITÉ ET HOLOMORPHIE**

6.1	Arcs et chemins	67
6.2	Intégration complexe	69
6.3	Indice	71
6.4	Existence des primitives	72
6.5	Analyticité des fonctions holomorphes	77
6.6	Fonctions circulaires réciproques	79
	Exercices	82
	Solutions des exercices	83

**CHAPITRE 7 • PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS HOLOMORPHES**

7.1	Inégalités de Cauchy et conséquences	84
7.2	Principe du maximum	85
7.3	Lemme de Schwarz et applications	87
7.4	Suites et séries	89
7.5	Holomorphie et intégration	91
	Exercices	94
	Solutions des exercices	95

**CHAPITRE 8 • FONCTIONS MÉROMORPHES**

8.1	Un point de topologie	98
8.2	Singularités isolées	99
8.3	Fonctions méromorphes	101
8.4	Théorème des résidus	102
8.5	Théorème de l'indice	104
8.6	Théorème de Rouché	106
8.7	Inversion locale	107
8.8	Séries de fonctions méromorphes	109
	Exercices	112
	Solutions des exercices	113

**CHAPITRE 9 • PRODUITS INFINIS**

9.1 Produits infinis de nombres complexes	116
9.2 Produits infinis de fonctions holomorphes	119
Exercices	123
Solutions des exercices	124

**CHAPITRE 10 • HOMOTOPIE ET HOLOMORPHIE**

10.1 Homotopie et simple connexité	126
10.2 Primitive le long d'un arc	130
10.3 Indice	132
10.4 Formule de Cauchy	135
10.5 Séries de Laurent	137
10.6 Les généralisations	140
Exercices	142
Solutions des exercices	143

**CHAPITRE 11 • HOLOMORPHIE ET PARTIES LOCALEMENT FINIES**

11.1 Produit canonique de Weierstrass	145
11.2 Applications	147
11.3 Idéaux	150
Exercices	152
Solutions des exercices	153

**CHAPITRE 12 • REPRÉSENTATION CONFORME**

12.1 Topologie	154
12.2 Un résultat d'isomorphisme	157
12.3 Conservation des angles	159
Exercices	160
Solutions des exercices	162

**CHAPITRE 13 • QUELQUES GRANDS CLASSIQUES**

13.1 Théorèmes de Picard	164
13.2 Théorème de Runge	169
Exercices	176
Solutions des exercices	177



**CHAPITRE 14 • FONCTIONS HARMONIQUES**

14.1 Premières propriétés	179
14.2 Représentation intégrale	181
Exercices	184
Solutions des exercices	185

**CHAPITRE 15 • QUELQUES CALCULS D'INTÉGRALES**

15.1 Quelques lemmes	186
15.2 Quelques méthodes	188

<b>RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES</b>	197
------------------------------------	-----

<b>INDEX</b>	199
--------------	-----



# Avant-propos

Les résultats concernant la théorie des fonctions holomorphes d'une ou plusieurs variables complexes sont très nombreux, car c'est une théorie relativement ancienne (et la recherche dans ce domaine des mathématiques est toujours très active). Pour aborder cette théorie, l'étudiant aura intérêt à procéder par étapes. Ce livre peut être vu comme la première de ces étapes. Donnons quelques explications à ce sujet.

Les connaissances pour aborder la lecture de l'ouvrage sont plutôt modestes. En ce qui concerne la topologie, on ne demande de connaître que les propriétés élémentaires des compacts et des connexes de  $\mathbb{C}$ . Pour l'intégration, à l'exception d'un complément donné au chapitre 7 (et qui n'est pas utilisé dans la suite de l'ouvrage), on n'a utilisé que les propriétés élémentaires de l'intégrale au sens de Riemann. En ce qui concerne le calcul différentiel, il n'est quasiment utilisé que la notion d'application différentiable. Il en résulte qu'un étudiant de troisième année de Licence dispose de toute la matière nécessaire pour aborder la lecture du livre. Donnons quelques détails quant à son contenu.

Les chapitres 1 à 3 constituent des révisions concernant un programme usuel de Licence. On y traite de séries numériques, de séries de fonctions, et de séries entières. Il nous semble en effet opportun de rappeler les points essentiels concernant ces notions (par exemple la définition du rayon de convergence d'une série entière).

Le chapitre 4 traite des fonctions analytiques. Bien que ne présentant aucune difficulté, on obtient déjà des résultats importants (principe du prolongement analytique, principe des zéros isolés).

Au chapitre 5, on généralise la notion de dérivabilité au cas des fonctions d'une variable complexe. Il est aussi question des déterminations continues de l'argument, un point qui sera essentiel dans d'autres chapitres.

Le chapitre 6 est fondamental. On y montre qu'une fonction est dérivable (on dit aussi holomorphe) si et seulement si elle est localement développable en série entière. C'est là une énorme différence avec le cas réel déjà vu par l'étudiant.

Dans les chapitres 7 et 8, on utilise la théorie de Cauchy locale pour obtenir les principales propriétés des fonctions holomorphes ou méromorphes. On y démontre, par exemple, la fameuse formule des résidus (dans des cas particuliers) qui permettra, et c'est parfois ce qui impressionne l'étudiant, de calculer des intégrales.

Les chapitres 9 et 11 sont consacrés à l'étude des produits infinis. C'est une notion très intéressante, mais aussi plus délicate que celle de série. Au chapitre 11, on montre en particulier l'existence de fonctions holomorphes ayant des zéros imposés.

Au chapitre 10, on traite, dans un cadre plus général, des questions vues dans les chapitres 7 et 8. On introduit en particulier la notion d'homotopie (on essaie de déformer des courbes de manière continue).

Le chapitre 12 est consacré d'une part à des questions topologiques (théorème de Montel) et d'autre part à la représentation conforme (théorème de Riemann). On y démontre en particulier à quelle condition deux ouverts de  $\mathbb{C}$  sont analytiquement isomorphes.

Au chapitre 13, on démontre trois résultats fameux : deux théorèmes de Picard et le théorème de Runge. Les deux premiers sont spectaculaires, le troisième est fondamental en ce qui concerne l'approximation des fonctions.

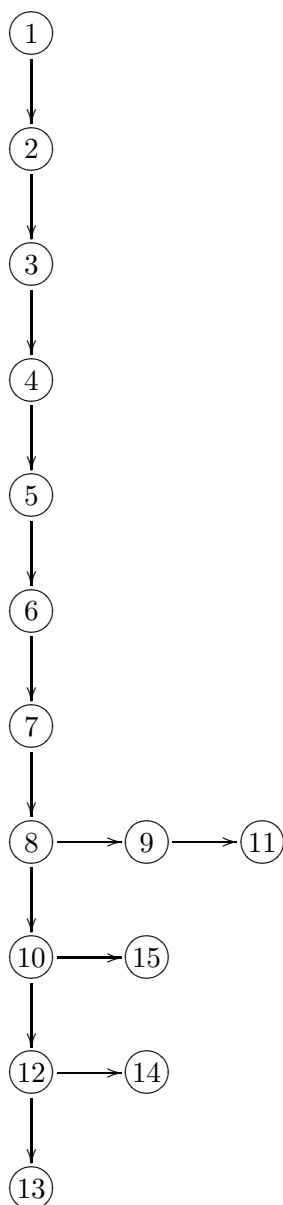
Au chapitre 14, on aborde l'étude des fonctions harmoniques de deux variables réelles. Ces fonctions sont très utilisées dans de nombreux domaines scientifiques. On prouve en particulier qu'une telle fonction est indéfiniment différentiable.

Le chapitre 15 donne quelques méthodes (en nombre très limité) de calculs d'intégrales en utilisant la formule des résidus. Nous renvoyons cependant le lecteur à des livres d'exercices (ou à des séances de travaux dirigés) pour ce qui concerne ce point.

Comme nous l'avons déjà précisé, ce livre, qui se veut d'un niveau relativement élémentaire, n'aborde que quelques aspects de la théorie des fonctions holomorphes. Nous n'avons en particulier traité que le cas des fonctions holomorphes d'une variable. Pour l'étudiant qui veut se spécialiser dans ce domaine, il peut être une introduction à des ouvrages de niveau plus élevé. Nous conseillons en particulier les livres [4], [6], [8], [9], [10] de la bibliographie.

Signalons aussi que le contenu de cet ouvrage couvre entièrement la partie du programme de l'agrégation de mathématiques qui concerne les fonctions holomorphes.

Diagramme d'implication des différents chapitres :





# Chapitre 1

---

## Séries numériques

Dans ce chapitre, on fait quelques rappels concernant les séries numériques.

### 1.1 NOTATIONS ET RAPPELS

**1.1.1.** Soient  $E, F$  des ensembles et  $A$  une partie de  $E$ .

On note  $\mathfrak{P}(E)$  l'ensemble des parties de  $E$  et  $\text{id}_E$  l'application identité de  $E$ .

On désigne par  $E \setminus F$  l'ensemble des éléments de  $E$  qui n'appartiennent pas à  $F$ , et par  $\mathcal{F}(E, F)$  l'ensemble des applications de  $E$  dans  $F$ . On écrira souvent  $f: E \rightarrow F$  pour signifier que  $f \in \mathcal{F}(E, F)$ , et on note  $f|_A$  la restriction de  $f$  à  $A$ .

Si  $E$  est fini,  $\text{card}(E)$  est le cardinal de  $E$ .

**1.1.2.** Les symboles

$$\mathbb{N}, \mathbb{N}^*, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^*, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_-^*, \mathbb{C}, \mathbb{C}^*$$

ont la signification usuelle bien connue de tous. Si  $z$  est un nombre complexe, on note  $\bar{z}$  son conjugué et  $\text{Re}(z)$  (respectivement  $\text{Im}(z)$ ) sa partie réelle (respectivement partie imaginaire).

Dans la suite de ce chapitre  $\mathbb{K}$  est l'un des corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

**1.1.3.** Soit  $X$  un espace métrique dont la distance est notée  $d$ . Rappelons qu'une suite  $x = (x_n)_{n \geq 0}$  d'éléments de  $X$  est appelée une *suite de Cauchy* si elle vérifie la condition suivante : pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $d(x_m, x_n) < \varepsilon$  dès que  $m \geq N$  et  $n \geq N$ .

**Définition.** Un espace métrique  $X$  est dit *complet* si toute suite de Cauchy d'éléments de  $X$  a une limite dans  $X$ . Un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé et complet est appelé un espace de Banach.

**Théorème 1.1.4.** Tout  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach. En particulier, le corps  $\mathbb{K}$  est complet.

## 1.2 LIMITE SUPÉRIEURE ET LIMITE INFÉRIEURE

**1.2.1.** On adjoint à  $\mathbb{R}$  les symboles usuels  $-\infty$  et  $+\infty$ , et on pose :

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

On prolonge la relation d'ordre naturelle de  $\mathbb{R}$  en convenant que, pour tout  $a \in \mathbb{R}$  :

$$-\infty < a < +\infty.$$

**1.2.2.** On note  $\mathcal{S}$  l'ensemble des suites réelles et  $\mathcal{C}$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{S}$  constitué des suites convergentes.

**Définition.** Soit  $x = (x_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{S}$ . On dit que  $x$  converge dans  $\overline{\mathbb{R}}$  si elle vérifie l'une ou l'autre des conditions suivantes :

- (i)  $x \in \mathcal{C}$
- (ii)  $x_n$  tend vers  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .
- (iii)  $x_n$  tend vers  $-\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

On désigne par  $\mathcal{R}$  l'ensemble des éléments de  $\mathcal{S}$  qui convergent dans  $\overline{\mathbb{R}}$ .

**Remarques.** 1) Si  $x_n = (-1)^n$ , on a  $x \notin \mathcal{R}$ .

2) Si  $x_n = n$ , alors  $x \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{C}$ . Par suite  $\mathcal{C} \subsetneq \mathcal{R} \subsetneq \mathcal{S}$ .

3) L'ensemble  $\mathcal{R}$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{S}$ . Si  $x = (x_n)_n$  et  $y = (y_n)_n$  vérifient  $x_n = n + (-1)^n$  et  $y_n = -n$ , on a  $x, y \in \mathcal{R}$  et  $x + y \notin \mathcal{R}$ .

**1.2.3.** Soit  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ . Si  $A$  est majorée (respectivement minorée), on note  $\sup A$  (respectivement  $\inf A$ ) la borne supérieure (respectivement inférieure) de  $A$ . Si  $A$  est non majorée (respectivement non minorée), on pose  $\sup A = +\infty$  (respectivement  $\inf A = -\infty$ ).

**Lemme 1.2.4.** Soit  $x = (x_n) \in \mathcal{S}$ . Si  $p \in \mathbb{N}$ , on pose  $X_p = \{x_n ; n \geq p\}$ .

- (i) S'il existe  $q \in \mathbb{N}$  tel que  $\sup X_q = +\infty$ , alors  $\sup X_p = +\infty$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$ .
- (ii) S'il existe  $q \in \mathbb{N}$  tel que  $\inf X_q = -\infty$ , alors  $\inf X_p = -\infty$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$ .