j'intègre

Extrait
Parution
Juin 2024

T^LE

MATHS

SPÉCIALITÉ ET EXPERTES

Cahier de calcul

L'ENTRAÎNEMENT CONSTANT ET RÉGULIER DANS L'ESPRIT PRÉPA

Conçu par un collectif de professeurs en lycées et classes prépas, **sous la direction de Colas Bardavid**

DUNOD

NOUVEAU

Les cahiers de calcul pour s'entraîner dès le lycée dans l'esprit prépa !

Chère enseignante, Cher enseignant,

Dunod édite depuis plus de soixante ans des ouvrages pour les élèves des classes préparatoires scientifiques, dans toutes filières. Nos auteurs et les enseignants que nos délégués pédagogiques rencontrent régulièrement dans leur établissement constatent qu'une partie de **leurs élèves ont des lacunes en calcul à leur arrivée en classe préparatoire**.

Fort de ce constat et des différentes enquêtes menées sur le terrain auprès d'enseignants et d'élèves en classes préparatoires, Dunod, avec **Colas BARDAVID** et un **collectif d'auteurs enseignant en lycées et en prépas**, a souhaité proposer des ouvrages d'entraînement au calcul pour les **élèves de 1re et de Tle** se destinant à intégrer une classe prépa scientifique.

Nous vous invitons donc aujourd'hui à découvrir **deux cahiers proposant un entraînement régulier et intensif, avec plus de 1700 calculs conçus dans "l'esprit prépa"** pour accompagner vos élèves, dès le lycée, afin qu'ils mettent toutes les chances de leur côté pour réussir en maths au Bac et dans leurs études supérieures.

DÉCOUVREZ DANS CE CAHIER DE CALCUL POUR LA TERMINALE (À PARAÎTRE EN JUIN 2024) :

- ✔ **Tous les thèmes du programme** de spécialité Maths et Maths expertes de Tle
- ✔ **1 713 calculs corrigés** de différents niveaux
- ✔ **Une indication du temps de résolution** pour chaque calcul
- ✔ Un entraînement au calcul **en toute autonomie**

Sous la dir. de **Colas Bardavid**
Professeur en classe préparatoire MPSI au Lycée Chateaubriand à Rennes

VOUS SOUHAITEZ RECEVOIR UN SPÉCIMEN À PARUTION ?
Contactez votre **délégué pédagogique Dunod !**

Lionel GOURAUD – Paris RP/Ouest
06 23 08 80 85 • lgouraud@dunod.com

Philippe GUILLON – Nord-Est/Belgique
06 16 02 84 41 • pguillon@dunod.com

Véronique SALVALAIO – Sud-Ouest
06 16 02 84 44 • vsalvalaio@dunod.com

Alain GLISSA – Sud-Est/Suisse
06 16 02 84 42 • aglissa@dunod.com

Également disponible **pour la Première**

EAN 9782100864188 – Juin 2024

Sommaire

Combinatoire et dénombrement

Probabilités

Géométrie dans l'espace

Maths expertes : Nombres complexes

Maths expertes : Matrices

Maths expertes : Arithmétique

Limites de fonctions

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 1.1

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Simplifier les expressions suivantes.

a) $\dfrac{x^3 + x^2}{x}$ ....

b) $x^3\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^3}\right)$ ....

c) $\dfrac{x^3 + x^2 + x^4}{x^2}$ ....

Calcul 1.2

Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier les expressions suivantes.

a) $\mathrm{e}^{2x} \times \mathrm{e}^{-x}$ ....

b) $\dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{x}}$ ....

c) $\dfrac{\mathrm{e}^{2x+1}}{\mathrm{e}^{-x}}$ ....

d) $\mathrm{e}^{x^2+x+1} \times \mathrm{e}^{-x^2+3x}$ ......

Fractions, polynômes et racines

Calcul 1.3 — Détection de forme indéterminée (I).

Pour chaque expression suivante, dire s'il agit d'une forme indéterminée, auquel cas on ne cherchera pas à calculer la limite et on écrire « FI » dans le cadre-réponse ; s'il ne s'agit pas d'une forme indéterminée, on donnera la limite en question.

a) $e^x - x$, en $+\infty$ ....

b) $e^x - x$, en $-\infty$ ....

c) $\dfrac{\ln(x)}{x}$, en $+\infty$ ....

d) $\dfrac{\ln(x)}{x}$, en 0^+ ....

Calcul 1.4 — Détection de forme indéterminée (II).

Même exercice.

a) $\dfrac{\cos(x)}{x}$, en 0^+ ....

b) $\dfrac{\sin(x)}{x}$, en 0^+ ....

c) $\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$, en $\dfrac{\pi}{2}^-$ ....

d) $\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$, en $\dfrac{\pi}{2}^+$ ....

Calcul 1.5

Déterminer les limites suivantes.

On mettra en facteur des termes dominants pour lever l'indétermination.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{x}$ ....

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+1}{x^2-x}$ ....

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-2}{x^2+x}$ ....

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+3}{x^2+x+1}$ ....

Calcul 1.6

Même exercice.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x}}{x+2}$ ....

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^4+3x^3}}{-2x^2+7}$ ....

Calcul 1.7

Déterminer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to0^+} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$ ....

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left((x+2)^2-x^2\right)$ ....

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}}$ ....

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 - x(x+1)\right)$

Calcul 1.8

Chercher des facteurs communs afin de simplifier la fraction, pour lever l'indétermination, puis donner la limite des expressions suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$ ....

b) $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}$ ....

c) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x+2}{x^2-4}$ ....

d) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{2x-1}{4x^2-1}$ ....

Calcul 1.9

Même exercice.

On cherchera au préalable à factoriser les polynômes au numérateur et au dénominateur.

a) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ ....

b) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x^2-x-6}{x^2+2x}$ ....

Calcul 1.10 — **Une identité remarquable de degré 3.**

En utilisant la formule
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2),$$
valable pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, déterminer les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$ ....

b) $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x+2}$ ....

Calcul 1.11 — **En utilisant la quantité conjuguée (I).**

On souhaite déterminer la limite de $\sqrt{x^2+1} - x$ en $+\infty$.

a) A-t-on $\sqrt{x^2+1} - x = \dfrac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$? ....

b) Développer $\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$ ....

c) En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$ ....

Calcul 1.12 — **En utilisant la quantité conjuguée (II).**

En adaptant la technique précédente pour lever l'indétermination, calculer les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+x} - x}$ ....

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)$ ....

Croissances comparées

Calcul 1.13 — **En factorisant (I).**

Calculer :

a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^3 \mathrm{e}^x$ ....

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x - x^8}{x+1}$ ....

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{x-7} + 3\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + x}$ ....

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x + x}$ ....

Calcul 1.14

En posant $X = \dfrac{1}{x}$, déterminer les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ ....

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^3}$ ....

Calcul 1.15 — **En factorisant (II).**

Calculer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - \ln(x)$ ....

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\ln(x)}{x-\ln(x)}$ ....

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$ ....

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln(x))^2-7}{3+2\ln(x)}$ ....

Calcul 1.16 — **Une limite classique.**

Quelle est la limite de $x \mapsto x\ln(x)$ en 0^+ ?

(a) $+\infty$ (b) $-\infty$ (c) 0 (d) 1

....

Calcul 1.17 — **Une puissance de puissance.**

Pour $x > 0$, on définit $x^x = \mathrm{e}^{x\ln(x)}$.

a) Que vaut x^x pour $x = \dfrac{1}{2}$? ....

b) Que vaut x^x pour $x = \dfrac{1}{4}$? ....

c) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$ ....

Calcul 1.18

En mettant en facteur l'exponentielle, déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln(\mathrm{e}^x + 4x) - x)$ ....

Calcul 1.19

a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{\ln(x)} - \ln(x)\right)$ ....

b) En écrivant $x = \mathrm{e}^{\ln(x)}$, en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{\ln(x)}}}{x}$ ....

Autour du taux d'accroissement

Calcul 1.20 — **Limites de taux d'accroissement.**

Rappelons que si une fonction f est dérivable en a, alors on a $\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).}$

Par exemple, pour déterminer $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$, on introduit $f : x \longmapsto e^x$, et on reconnaît $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$. D'où

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = f'(0) = e^0 = 1.$$

En reconnaissant des taux d'accroissement, déterminer les limites suivantes.

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x}$ ....

b) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x}$ ....

c) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$ ....

d) $\lim_{x \to 2} \frac{\ln(x) - \ln(2)}{x - 2}$ ....

Calculs plus avancés

Calcul 1.21 — **Autour du taux d'accroissement de l'exponentielle.**

On rappelle que $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$. Calculer :

a) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2}$ ....

b) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x}$ ....

c) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$ ....

d) $\lim_{x \to +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$ ....

Calcul 1.22 — **D'autres taux d'accroissement.**

En faisant apparaître des taux d'accroissement, déterminer les limites suivantes.

a) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\ln(1 + 2x)}$ ....

b) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{\ln(1 + x)}$ ....

Calcul 1.23 — **Une limite farouche.**

Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^3 + \sqrt{x^4 + 2x^{\frac{7}{2}} + 1}} - \sqrt{x^3 + \sqrt{x^4 + x^{\frac{7}{2}} + 1}}$ ....

Calcul 1.24 — **Une limite remarquable ?**

On rappelle que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

a) Pour $a \neq 0$ fixé, déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+ax)}{x}$ ....

b) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$. ....

Pour $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on définit a^x en posant $\boxed{a^x = \mathrm{e}^{x\ln(a)}.}$

c) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

Si vous trouvez 1 ou $+\infty$, vous avez faux ! ....

Calcul 1.25 — **Avec des formules de trigonométrie (I).**

Pour ce calcul, il faut connaître les formules de duplication du sinus et du cosinus.

a) Exprimer $\cos(x)$ en fonction de $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$ ....

b) En utilisant que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, en déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2}$ ....

Calcul 1.26 — **Avec des formules de trigonométrie (II).**

Pour ce calcul, il faut connaître les formules de duplication du sinus et du cosinus.

Déterminer :

a) $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{\sin(2x)}{\sin(x)}$ ....

b) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)-\sin(x)}{\cos(2x)}$ ....

Réponses mélangées

$+\infty$	$+\infty$	1	1	FI	$+\infty$	3	$+\infty$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$x+1+x^2$	1	oui	
1	$-\infty$	3	2	1	$-\infty$	e^x	1	-1	0	$+\infty$	0	$-\infty$
x^2+1	$+\infty$	e^{2x}	e^{3x+1}	$+\infty$	1	a	$+\infty$	0	$\mathrm{e}^{-7}+3$	12		
$1-2\sin^2(\frac{x}{2})$.	0	x^2+x	-2	c	$+\infty$	2	FI	e	$-\infty$	2		
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	0	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-2	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	FI	e^{4x+1}

Fiche n° 1. Limites de fonctions

Réponses

1.1 a) $\boxed{x^2+x}$
1.1 b) $\boxed{x^2+1}$
1.1 c) $\boxed{x+1+x^2}$
1.2 a) $\boxed{\mathrm{e}^x}$
1.2 b) $\boxed{\mathrm{e}^{2x}}$
1.2 c) $\boxed{\mathrm{e}^{3x+1}}$
1.2 d) $\boxed{\mathrm{e}^{4x+1}}$
1.3 a) $\boxed{\text{FI}}$
1.3 b) $\boxed{+\infty}$
1.3 c) $\boxed{\text{FI}}$
1.3 d) $\boxed{-\infty}$
1.4 a) $\boxed{+\infty}$
1.4 b) $\boxed{\text{FI}}$
1.4 c) $\boxed{+\infty}$
1.4 d) $\boxed{-\infty}$
1.5 a) $\boxed{+\infty}$
1.5 b) $\boxed{-\infty}$
1.5 c) $\boxed{3}$
1.5 d) $\boxed{0}$
1.6 a) $\boxed{1}$
1.6 b) $\boxed{-\frac{1}{2}}$
1.7 a) $\boxed{-\infty}$
1.7 b) $\boxed{+\infty}$
1.7 c) $\boxed{0}$
1.7 d) $\boxed{-\infty}$
1.8 a) $\boxed{2}$
1.8 b) $\boxed{+\infty}$
1.8 c) $\boxed{-\frac{1}{4}}$
1.8 d) $\boxed{\frac{1}{2}}$
1.9 a) $\boxed{-2}$
1.9 b) $\boxed{\frac{5}{2}}$
1.10 a) $\boxed{3}$
1.10 b) $\boxed{12}$
1.11 a) $\boxed{\text{oui}}$
1.11 b) $\boxed{1}$
1.11 c) $\boxed{0}$
1.12 a) $\boxed{2}$
1.12 b) $\boxed{\frac{1}{2}}$
1.13 a) $\boxed{0}$
1.13 b) $\boxed{+\infty}$
1.13 c) $\boxed{\mathrm{e}^{-7}+3}$
1.13 d) $\boxed{+\infty}$
1.14 a) $\boxed{+\infty}$
1.14 b) $\boxed{0}$
1.15 a) $\boxed{+\infty}$
1.15 b) $\boxed{1}$
1.15 c) $\boxed{-1}$
1.15 d) $\boxed{+\infty}$
1.16 $\boxed{\text{c}}$
1.17 a) $\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$
1.17 b) $\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$
1.17 c) $\boxed{1}$
1.18 $\boxed{0}$
1.19 a) $\boxed{-\infty}$
1.19 b) $\boxed{0}$
1.20 a) $\boxed{0}$
1.20 b) $\boxed{1}$
1.20 c) $\boxed{1}$
1.20 d) $\boxed{\frac{1}{2}}$
1.21 a) $\boxed{1}$
1.21 b) $\boxed{0}$
1.21 c) $\boxed{2}$
1.21 d) $\boxed{1}$
1.22 a) $\boxed{\frac{1}{2}}$
1.22 b) $\boxed{0}$
1.23 $\boxed{\frac{1}{4}}$
1.24 a) $\boxed{a}$
1.24 b) $\boxed{1}$
1.24 c) $\boxed{\mathrm{e}}$
1.25 a) $\boxed{1-2\sin^2(\frac{x}{2}).}$
1.25 b) $\boxed{-\frac{1}{2}}$
1.26 a) $\boxed{-2}$
1.26 b) $\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

Corrigés

1.1 a) On a $\dfrac{x^3+x^2}{x} = \dfrac{x(x^2+x)}{x} = x^2+x$.

....

1.2 a) On a $\mathrm{e}^{2x} \times \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{2x-x} = \mathrm{e}^{x}$.

....

1.2 b) On a $\dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{x}} = \mathrm{e}^{3x-x} = \mathrm{e}^{2x}$.

....

1.2 c) On a $\dfrac{\mathrm{e}^{2x+1}}{\mathrm{e}^{-x}} = \mathrm{e}^{2x+1-(-x)} = \mathrm{e}^{3x+1}$.

....

1.3 b) On a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ d'où le résultat.

....

1.3 d) Attention à ne pas tomber dans le piège ! Ce n'est pas une forme indéterminée puisqu'on a $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$, d'où le résultat par quotient.

....

1.4 a) On a $\lim\limits_{x\to0^+} \cos(x) = 1$, d'où le résultat par quotient.

....

1.4 b) On a $\lim\limits_{x\to0^+} \sin(x) = 0$, il s'agit donc d'une forme indéterminée.

....

1.4 c) On a $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \sin(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \cos(x) = 0^+$ d'où le résultat par quotient.

....

1.4 d) Comme ci-dessus, mais cette fois-ci, on a $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \cos(x) = 0^-$.

....

1.5 a) On simplifie $\dfrac{x^2+1}{x} = x + \dfrac{1}{x}$ et on en déduit la limite.

....

1.5 b) On factorise par les termes dominants en écrivant

$$\frac{x^3+1}{x^2-x} = \frac{x^3\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{1}{x}\right)} = \frac{x\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)}{1-\dfrac{1}{x}}.$$

On en déduit la limite.

....

1.5 c) On factorise par les termes dominants en écrivant

$$\frac{3x^2-2}{x^2+x} = \frac{x^2\left(3-\dfrac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} = \frac{3-\dfrac{2}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}}.$$

On en déduit la limite.

....

1.5 d) On factorise par les termes dominants en écrivant

$$\frac{x+3}{x^2+x+1} = \frac{x\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)} = \frac{1+\dfrac{3}{x}}{x\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}.$$

On en déduit la limite.

1.6 a) On met en facteur les termes dominants. On trouve :

$$\frac{\sqrt{x^2+x}}{x+2} = \frac{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}}{x\left(1+\dfrac{2}{x}\right)} = \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}{x\left(1+\dfrac{2}{x}\right)} = \frac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}{1+\dfrac{2}{x}}.$$

On en déduit la limite.

1.6 b) On procède comme ci-dessus en mettant x^4 en facteur dans la racine et x^2 en facteur au dénominateur.

1.7 a) On met au même dénominateur en écrivant $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x-1}{x^2}$. On déduit le résultat par quotient.

1.7 b) On y voit plus clair en développant : $(x+2)^2 - x^2 = 4x+4$; on déduit le résultat. On pouvait aussi factoriser en reconnaissant l'expression $a^2 - b^2$.

1.7 c) En l'abscence d'idée, on peut mettre au même dénominateur et simplifier. Il est plus judicieux de multiplier en haut et en bas par x. On écrit

$$\frac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}}{\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}} = \frac{1-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{x}+1},$$

et on déduit le résultat.

1.7 d) On développe

$$\left((x+\frac{1}{\sqrt{x}})^2 - x(x+1)\right) = x^2 + 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} - x^2 - x = x\left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} - 1\right).$$

On déduit le résultat.

1.8 a) On a $\dfrac{x^2-1}{x-1} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1$. Donc, $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2$.

1.8 b) On a $\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^2} = \dfrac{x+1}{x-1}$. On déduit le résultat.

1.8 c) On a $\dfrac{x+2}{x^2-4} = \dfrac{x+2}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{1}{x-2}$. Donc, $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{x^2-4} = \lim_{x\to -2} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{4}$.

1.8 d) On a $\dfrac{2x-1}{4x^2-1} = \dfrac{2x-1}{(2x-1)(2x+1)} = \dfrac{1}{2x+1}$. On déduit le résultat.

1.9 a) Le polynôme $x^2 - 3x + 2$ s'annule en 1 et 2, ainsi on a $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. On déduit

$$\frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x+1}{x-2},$$

puis la limite demandée.

...

1.9 b) Le polynôme $x^2 - x - 6$ s'annule en 3 et -2, ainsi on a $x^2 - 3x + 2 = (x-3)(x+2)$. On déduit

$$\frac{x^2-x-6}{x^2+2x} = \frac{(x-3)(x+2)}{x(x+2)} = \frac{x-3}{x},$$

puis la limite demandée.

...

1.10 a) On a $\dfrac{x^3-1}{x-1} = \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = x^2+x+1$. On déduit le résultat.

...

1.10 b) On note que $-8 = (-2)^3$, donc on applique la formule avec $a = x$ et $b = -2$. On a

$$\frac{x^3+8}{x+2} = \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2} = x^2 - 2x + 4.$$

On déduit le résultat.

...

1.11 a) On a simplement multiplié « en haut et en bas » par $\sqrt{x^2+1} + x$.

...

1.11 b) On reconnaît une identité remarquable du type $(a-b)(a+b)$, ce qui donne

$$(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x) = \sqrt{x^2+1}^2 - x^2 = x^2 + 1 - x^2 = 1.$$

...

1.11 c) C'est direct grâce au calcul précédent.

...

1.12 a) On utilise le conjugué en écrivant

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+x} - x} = \frac{\sqrt{x^2+x}+x}{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)} = \frac{\sqrt{x^2+x}+x}{x} = \sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1.$$

On en déduit la limite.

...

1.12 b) On utilise le conjugué :

$$\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}}.$$

Ce n'est pas tout à fait fini : on factorise au dénominateur

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x(1+\frac{1}{\sqrt{x}})} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} + 1}.$$

On déduit le résultat.

...

1.13 a) C'est direct, par croissance comparée.

1.13 b) On met en facteur les termes dominants en écrivant

$$\frac{\mathrm{e}^x - x^8}{x+1} = \frac{\mathrm{e}^x}{x} \times \frac{1 - \dfrac{x^8}{\mathrm{e}^x}}{1 + \dfrac{1}{x}}.$$

Or, par croissance comparée, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^8}{\mathrm{e}^x} = 0$ et donc on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1 - \dfrac{x^8}{\mathrm{e}^x}}{1 + \dfrac{1}{x}} = 1$. Toujours par croissance comparée, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$. On conclut par produit de limites.

1.13 c) Les exponentielles se simplifient quand on écrit :

$$\frac{\mathrm{e}^{x-7} + 3\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + x} = \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{-7} + 3)}{\mathrm{e}^x\left(1 + \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right)} = \frac{\mathrm{e}^{-7} + 3}{1 + \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}}.$$

Or, par croissance comparée, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$. On déduit le résultat.

1.13 d) On simplifie par e^x et on procède comme ci-dessus.

1.14 a) On a $\lim\limits_{x\to 0^+} x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^X}{X} = 0$, par croissance comparée.

1.14 b) On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^3} = \lim\limits_{X\to+\infty} X^3\mathrm{e}^{-X} = 0$, par croissance comparée.

1.15 a) On factorise par x^2 en écrivant $x^2 - \ln(x) = x^2\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x^2}\right)$.

Or, par croissance comparée, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$. On en déduit la limite.

1.15 b) On factorise par x en haut et en bas et on conclut comme ci-dessus.

1.15 c) On a $\dfrac{\ln(x) - \sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} = \dfrac{\sqrt{x}\left(\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} - 1\right)}{\sqrt{x} \times \sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}} = \dfrac{\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}}$. Or, par croissance comparée, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$. On en déduit la limite.

1.15 d) On factorise par $\ln(x)$ en haut et en bas.

1.16 C'est un cas de croissance comparée.

1.17 a) Grâce à la définition, on a

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ln(2)} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln(2)}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln(\sqrt{2})}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On peut retenir qu'avec cette définition, on a pour $x > 0$ que $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

1.17 b) C'est un calcul similaire.

1.17 c) Par croissance comparée, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$. On obtient le résultat par passage à l'exponentielle, ce qui est possible par continuité de la fonction exponentielle : on a

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{x\ln(x)} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

1.18 On a

$$\ln(\mathrm{e}^x + 4x) = \ln\big(\mathrm{e}^x(1 + 4x\mathrm{e}^{-x})\big) = \ln(\mathrm{e}^x) + \ln\big(1 + 4x\mathrm{e}^{-x}\big) = x + \ln\big(1 + 4x\mathrm{e}^{-x}\big).$$

Ainsi, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln(\mathrm{e}^x + 4x) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\big(1 + 4x\mathrm{e}^{-x}\big)$.

Or, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$ par croissance comparée. Donc, finalement, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln(\mathrm{e}^x + 4x) - x) = \ln(1) = 0$.

1.19 a) On factorise : $\sqrt{\ln(x)} - \ln(x) = \sqrt{\ln(x)}\Big(1 - \sqrt{\ln(x)}\Big)$, et on déduit la limite par produit de limites.

1.19 b) On a $\dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{\ln(x)}}}{x} = \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{\ln(x)}}}{\mathrm{e}^{\ln(x)}} = \mathrm{e}^{\sqrt{\ln(x)}-\ln(x)}$. On conclut avec la question précédente.

1.20 a) On reconnaît le taux d'accroissement de cos en 0. Puisque cos est dérivable en 0, on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - \cos(0)}{x - 0} = \cos'(0) = -\sin(0) = 0.$$

1.20 b) On introduit $f(x) = \ln(1 + x)$ et on raisonne comme à la question précédente. Puisque la fonction f est dérivable en 0, on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0).$$

Comme on a $f'(x) = \dfrac{1}{1 + x}$, on a $f'(0) = 1$. D'où le résultat.

1.20 c) On reconnaît le taux d'accroissement de sin en 0. Puisque la fonction sin est dérivable en 0, on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \sin'(0) = \cos(0) = 1.$$

1.20 d) On procède comme ci-dessus.

1.21 a) On a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{x^2} - 1}{x^2} = \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^X - 1}{X} = 1$, d'après le rappel.

1.21 b) On écrit $\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{x} = x \times \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{x^2}$ et on utilise la question précédente pour effectuer un produit de limites.

....

1.21 c) On écrit $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{x} = 2\,\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{2x}$. Or, on a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{2x} = \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{X}-1}{X} = 1$. On en déduit la limite.

....

1.21 d) On écrit $x(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1) = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$. Or, on a $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{X}-1}{X} = 1$.

....

1.22 a) On écrit $\dfrac{x}{\ln(1+2x)} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2x}{\ln(1+2x)}$. Or, on a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{2x} = \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$. On conclut par quotient de limites.

....

1.22 b) On fait apparaître des taux d'accroissement :

$$\frac{1-\cos(x)}{\ln(1+x)} = \frac{1-\cos(x)}{x} \times \frac{1}{\frac{\ln(1+x)}{x}}.$$

On conclut en remarquant qu'il s'agit de taux d'accroissement dont on peut calculer la limite.

....

1.23 Notons $f(x)$ l'expression dont on cherche la limite.

On utilise une première fois la technique de la quantité conjuguée pour écrire

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{x^3+\sqrt{x^4+2x^{\frac{7}{2}}+1}} - \sqrt{x^3+\sqrt{x^4+x^{\frac{7}{2}}+1}}\right)\left(\sqrt{x^3+\sqrt{x^4+2x^{\frac{7}{2}}+1}} + \sqrt{x^3+\sqrt{x^4+x^{\frac{7}{2}}+1}}\right)}{\sqrt{x^3+\sqrt{x^4+2x^{\frac{7}{2}}+1}} + \sqrt{x^3+\sqrt{x^4+x^{\frac{7}{2}}+1}}}.$$

Au numérateur, on utilise la formule « $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$ » ; les termes en x^3 se simplifient. On trouve

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^4+2x^{\frac{7}{2}}+1} - \sqrt{x^4+x^{\frac{7}{2}}+1}}{\sqrt{x^3+\sqrt{x^4+2x^{\frac{7}{2}}+1}} + \sqrt{x^3+\sqrt{x^4+x^{\frac{7}{2}}+1}}}.$$

Le numérateur est toujours une forme indéterminée ! On applique une deuxième fois la technique de la quantité conjuguée. Des simplifications similaires conduisent à trouver

$$f(x) = \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\left(\sqrt{x^3+\sqrt{x^4+2x^{\frac{7}{2}}+1}} + \sqrt{x^3+\sqrt{x^4+x^{\frac{7}{2}}+1}}\right)\left(\sqrt{x^4+2x^{\frac{7}{2}}+1} + \sqrt{x^4+x^{\frac{7}{2}}+1}\right)}.$$

On met en facteur les termes dominants dans chaque racine, et un facteur global $x^{\frac{7}{2}}$ apparaît au dénominateur. Après simplification, on en déduit la limite.

....

1.24 a) On a, en posant $X = ax$, on trouve

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+ax)}{x} = a \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+ax)}{ax} = a \lim_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = a.$$

....

1.24 b) On a, en posant $X = \dfrac{1}{x}$, on trouve

$$\lim_{x\to +\infty} x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1.$$

....

1.24 c) On a

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}.$$

Or, on a trouvé à la question précédente que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = 1$. On obtient le résultat par passage à l'exponentielle, ce qui est possible par continuité de la fonction exponentielle.

....

1.25 a) On utilise une formule de duplication : $\cos(x) = \cos\left(2\times\dfrac{x}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

....

1.25 b) D'après la question précédente, on a

$$\frac{\cos(x)-1}{x^2} = -\frac{2\sin^2(\frac{x}{2})}{x^2}.$$

Or, en utilisant l'indication de l'énoncé, on a

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(\frac{x}{2})}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(\frac{x}{2})}{4\times\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\lim_{X\to 0}\left(\frac{\sin(X)}{X}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

....

1.26 a) On utilise une formule de duplication : $\dfrac{\sin(2x)}{\sin(x)} = \dfrac{2\sin(x)\cos(x)}{\sin(x)} = 2\cos(x)$. On en déduit la limite.

....

1.26 b) On a $\dfrac{\cos(x)-\sin(x)}{\cos(2x)} = \dfrac{\cos(x)-\sin(x)}{\cos^2(x)-\sin^2(x)} = \dfrac{1}{\cos(x)+\sin(x)}$. On en déduit la limite.

....

TLE MATHS

SPÉCIALITÉ ET EXPERTES

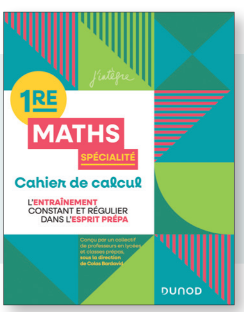
La réussite aux épreuves de mathématiques passe par une bonne maîtrise des calculs. Conçu à l'intention des **élèves de terminale qui ambitionnent d'intégrer une classe préparatoire scientifique**, ce cahier de calcul est l'outil idéal pour s'entraîner de manière régulière et intensive.

- Il est conçu pour pouvoir travailler en **totale autonomie**.
- Il propose un entraînement aux **calculs de base** ainsi que sur les thèmes calculatoires du programme de **spécialité maths** et de l'**option maths expertes**.
- Chaque fiche de calcul propose également des **calculs avancés** pour aller plus loin.
- Les **1713 calculs** sont proposés avec leurs **corrigés**.
- Des indications de **temps de résolution** donnent des repères pour l'auto-entraînement.

Conception et coordination
Colas Bardavid

Aide à la coordination
Jérôme Trochon

Les auteurs
Romain Basson
Ménard Bourgade
Van Bien Bui
Carole Chabanier
Geneviève Davion
Hélène Gros
Benjamin Groux
Nicolas Laillet
Blaise Le Meaux
Lionel Magnis
Quang-Thai Ngo
Anthony Ollivier
Alan Pellé
Nicolas Popoff



Également disponible pour la **Première**
Spécialité Maths

Extrait - Ne peut être vendu
9 782100 864195
14,90 €
PRIX FRANCE TTC

DUNOD
une page d'avance