

2022-2023

**100 FICHES POUR
RÉUSSIR SON ENTRÉE
EN PRÉPA**

**MPSI, MP2I, PCSI, PTSI, BCPST 1
MATHS-PHYSIQUE-CHIMIE -
INFORMATIQUE**



**NOUVEAUX
PROGRAMMES**

Marie-Virginie Speller
Erwan Guélou
Jean-Noël Beury

PARCOURS PRÉPAS

2022-2023

**100 FICHES POUR
RÉUSSIR SON ENTRÉE
EN PRÉPA**

**MPSI, MP2I, PCSI, PTSI, BCPST 1
MATHS-PHYSIQUE-CHIMIE -
INFORMATIQUE**

EDISCIENCE

*Avec la collaboration scientifique de M. Tom Morel pour
les fiches de physique et de chimie*

Mise en page : Lumina Datamatics

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du

Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Ediscience, 2022

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-083859-2

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^e et 3^e a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Des vidéos pour vous aider à réussir en prépa

Pour réussir vos concours, vous devrez mettre en œuvre des compétences disciplinaires (*hard skills*), mais aussi des *soft skills*, ces compétences transversales qui vous permettront de tenir le bon rythme. La collection *Parcours Prépas* vous offre six vidéos pour vous aider à réussir dès la première année et faire la différence le jour J par la maîtrise de votre énergie (physique, émotionnelle, mentale), par l'entretien de votre motivation et par vos méthodes de travail.

Tout d'abord deux vidéos méthodologiques d'Alexis Brès. Professeur agrégé de sciences physiques et agrégé-préparateur, il intervient dans le concours d'entrée à l'ENS et rédige des sujets d'écrits pour d'autres écoles d'ingénieurs.



<http://dunod.link/jvy7mqd>

Vidéo 1 : Apprendre à apprendre comment mobiliser efficacement son cours ?

Comment apprendre un cours ? Comment savoir si on l'a vraiment compris ? Comment le mobiliser dans les TD et dans les épreuves ? Comment développer des « compétences analogiques » pour se forger une intuition de la solution et gagner un temps précieux ? Autant de questions-réponses abordées dans cette vidéo. Une méthodologie particulièrement adaptée à l'apprentissage des cours de physique, de mathématiques ou de sciences industrielles.



<http://dunod.link/z0psk69>

Vidéo 2 : Écrit, oral : aborder sereinement la résolution d'un problème

Si les exigences d'un sujet d'écrit et d'un oral peuvent sembler assez différentes, il existe des techniques communes pour aborder ces épreuves sans stress.

Cette vidéo fournit :

- des techniques pour apprivoiser sereinement la résolution d'un problème de physique : modalités de décryptage du sujet et de mobilisation du cours ;

- des recommandations sur le fond et la forme pour gagner la confiance des correcteurs ;
- des tactiques cohérentes pour gagner des points ;
- des points de vigilance concernant la préparation des khôlles et des oraux.

Ensuite quatre vidéos « soft skills » pour aborder la prépa comme le ferait un sportif de haut niveau. Ces vidéos ont été conçues par Stéphane Fassetta, fondateur de Syprium, coach professionnel, préparateur mental de sportifs de haut niveau, professeur d'aïkido, 4^e dan.



<http://dunod.link/80x2gww>

Vidéo 3 : Les cinq piliers de l'énergie, ou comment réussir le marathon de la prépa ?

La prépa, c'est un peu comme le sport de haut niveau : plus le temps passe, plus le niveau ou les contraintes augmentent. Maîtriser son énergie, c'est donc faire un usage optimum de ses ressources pour tenir le rythme des deux années, s'adapter à la diversité des situations et réussir ses épreuves. Cette vidéo présente les dimensions de notre énergie et les cinq piliers pour l'entretenir. La capacité à se ressourcer sur ces cinq piliers est une compétence à développer dès votre arrivée en prépa.



<http://dunod.link/sicy8u.3>

Vidéo 4 : Gérer efficacement son temps en prépa

En prépa, on manque toujours de temps. L'enjeu est donc de gérer efficacement cette ressource pour atteindre les objectifs de vos différentes échéances.

Cette vidéo fournit des repères pour :

- trouver sa propre organisation personnelle : techniques de planification, objectifs SMART, suivi de la progression dans les tâches ;
- développer sa capacité d'attention, essentielle à la compréhension, à la mémorisation, à la gestion de la charge mentale et à votre avancement ;
- connaître ses propres biorythmes pour un apprentissage efficient, en capitalisant sur les acquis de la chronobiologie.



<http://dunod.link/p5maym6>

Vidéo 5 : Gérer son stress et développer la confiance en soi pour les concours

Comme dans le sport de haut niveau, la préparation d'un concours soumet votre énergie à rude épreuve. Si une certaine pression est stimulante pour doper ses performances, l'installation dans un stress chronique compromet à la fois votre santé et vos chances de réussite.

Cette vidéo permet :

- d'identifier les sources externes et internes de son propre stress ;
- de comprendre le rôle du stress comme mécanisme *naturel* d'adaptation de l'organisme face à une situation déstabilisante et/ou à fort enjeu ;
- d'apprendre à reconnaître certains symptômes physiques, émotionnels ou cognitifs du stress chronique pour prévenir l'épuisement ;
- de connaître les possibilités de régulation physique et mentale du stress pour agir ;
- d'entretenir passionnément sa motivation pour préserver durablement la confiance en soi, quelles que soient les contre-performances à l'entraînement.



<http://dunod.link/vncd3c5>

Vidéo 6 : Techniques respiratoires et de préparation mentale pour préparer les concours

La capacité à se relaxer ou à récupérer quand il le faut est essentielle pour tenir le rythme de préparation d'un concours.

Grâce à cette vidéo :

- vous saurez mettre en œuvre différentes techniques respiratoires adaptées à la récupération et à la dynamisation physique ;
- vous disposerez de deux techniques de préparation mentale pour conserver un état d'esprit positif, limiter votre niveau de stress et améliorer vos capacités d'attention.

Table des matières

[Introduction]	Bienvenue en prépa !	1
----------------	--------------------------------	---

Mathématiques

Fiche 1	Le point sur les équations	6
Fiche 2	Le point sur la résolution de systèmes	12
Fiche 3	Les polynômes du second degré	17
Fiche 4	Le point sur les inéquations et les tableaux de signes	23
Fiche 5	Les vecteurs	27
Fiche 6	Les barycentres	34
Fiche 7	Ensemble de définition et domaine d'étude d'une fonction	38
Fiche 8	Le point sur les limites	43
Fiche 9	La continuité et la dérivabilité d'une fonction en un point $x = a$	49
Fiche 10	Le tableau des dérivées	54
Fiche 11	Fonctions convexes et fonctions concaves	58
Fiche 12	Bijections	61
Fiche 13	Fonctions de référence	67
Fiche 14	Les fonctions valeur absolue et partie entière	80
Fiche 15	Les fonctions exponentielle et logarithme de base a	86
Fiche 16	Les fonctions trigonométriques	98
Fiche 17	Les fonctions trigonométriques réciproques (hors programme terminale)	108
Fiche 18	Les primitives	113
Fiche 19	Les intégrales	117
Fiche 20	Les équations différentielles linéaires des 1 ^{er} et 2 nd ordres	124
Fiche 21	Le comportement d'une suite	129
Fiche 22	Les suites arithmétiques et géométriques	133

[Table des matières]

Fiche 23	Le raisonnement par récurrence	137
Fiche 24	Les suites récurrentes.	143
Fiche 25	Les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.	150
Fiche 26	Introduction aux séries.	155
Fiche 27	Généralités sur les nombres complexes	160
Fiche 28	Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.	170
Fiche 29	Comment calculer les racines carrées d'un nombre complexe ?	172
Fiche 30	Les nombres complexes et la géométrie	177
Fiche 31	Les transformations géométriques	184
Fiche 32	Les espaces vectoriels	189
Fiche 33	Les matrices.	192
Fiche 34	Le dénombrement.	204
Fiche 35	Les probabilités sur un ensemble fini.	210
Fiche 36	Les principales lois discrètes.	216
Fiche 37	Lois discrètes quelconques	224
Fiche 38	Calculs en appliquant les grands opérateurs.	229
Fiche 39	Inégalités à connaître en probabilités.	232
Fiche 40	Les principales lois continues	235
Fiche 41	Calculs dans les cas discret et continu	242
Fiche 42	Couples de variables aléatoires.	250
Fiche 43	Le point sur les notions en arithmétique	253
Fiche 44	Introduction à l'algorithmique.	258
Fiche 45	Introduction à la logique	262

Physique

Fiche 46	Le point sur les conversions	268
Fiche 47	Les notions d'erreur et d'incertitude.	272
Fiche 48	Le résultat expérimental.	276
Fiche 49	Les caractéristiques des ondes	280
Fiche 50	Rappels d'optique	285
Fiche 51	Interférence de deux ondes	290
Fiche 52	Le monde quantique – Introduction	293
Fiche 53	Cinématique et loi de Newton – Description d'un mouvement.	298

Fiche 54	Les lois de Newton	301
Fiche 55	Le mouvement des planètes	311
Fiche 56	Travail et énergie.	316
Fiche 57	Mouvement dans un champ électrique uniforme	329
Fiche 58	Bilan énergétique dans un champ électrique uniforme	335
Fiche 59	Énergie dans un système thermodynamique	338
Fiche 60	Mes premiers pas en thermodynamique	343
Fiche 61	La poussée d'Archimède	347
Fiche 62	Les bases en électricité (Rappels de première)	350
Fiche 63	Les circuits RC série	357
Fiche 64	Comment déchiffrer les informations d'un oscilloscope ?	360

Chimie

Fiche 65	L'atome.	366
Fiche 66	La classification périodique des éléments (CPE)	371
Fiche 67	Quantité de matière et concentration	377
Fiche 68	Tableau d'avancement	384
Fiche 69	Quotient de réaction et constante de réaction.	388
Fiche 70	Les réactions d'oxydoréduction	392
Fiche 71	Les piles	397
Fiche 72	Les électrolyseurs	405
Fiche 73	Le potentiel Hydrogène : pH	409
Fiche 74	Les réactions acido-basiques.	414
Fiche 75	Titrages pH-métriques	419
Fiche 76	Titrages colorimétriques	425
Fiche 77	Titrages conductimétriques	430
Fiche 78	Dosages spectrophotométriques.	434
Fiche 79	Chimie organique – famille carbonée (filière PCSI).	438
Fiche 80	Chimie organique – famille oxygénée	447
Fiche 81	Chimie organique – famille azotée	456
Fiche 82	Chimie organique – famille soufrée	461
Fiche 83	Chimie organique – famille halogénée.	465
Fiche 84	Chimie organique – Réactions chimiques	467

[Table des matières]

Fiche	85	Chimie organique – Analyse des composés organiques et rendement	474
Fiche	86	Vitesse de réaction et temps de demi-réaction	482
Fiche	87	Cinétique chimique	490
Fiche	88	La catalyse	496

Informatique

Fiche	89	Type, liste, fonction.	502
Fiche	90	Représentation graphique, matrices, pixels.	510
Fiche	91	Terminaison, correction, complexité.	515
Fiche	92	Algorithmes, recherches.	517
Fiche	93	Lecture et écriture de fichiers	519
Fiche	94	Piles, files.	521
Fiche	95	Récurtivité	523
Fiche	96	Tris	525
Fiche	97	Algorithme glouton	530
Fiche	98	Graphes	531
Fiche	99	Recherche d'un cycle	537
Fiche	100	Recherche du plus court chemin	540

Bienvenue en prépa !

Vous avez dit prépa ?

1. Bienvenue en prépa !

Avant de consulter cet ouvrage nous vous invitons à lire ces quelques lignes en guise d'introduction car même si vous « restez » au lycée beaucoup de choses vont changer... Afin d'appréhender au mieux votre année, autant que vous sachiez précisément où vous mettez les pieds !

2. À qui s'adresse ce livre ?

Cet ouvrage regroupe les notions essentielles à maîtriser parfaitement en mathématiques, physique et chimie pour intégrer une classe de MP2I (Mathématiques, Physique, Informatique et Ingénierie), MPSI (Mathématiques Physique Sciences de l'Ingénieur), PCSI (Physique Chimie Sciences de l'Ingénieur), PTSI (Physique Technologie Sciences de l'Ingénieur) ou BCPST (Biologie Chimie Physique Sciences de la Terre).

3. Une nouvelle forme d'évaluation : vers le concours !

- Vous aviez l'habitude d'être notés sur 20 aux différents contrôles en fonction des exercices correctement traités et selon un barème précis. En prépa, vous serez notés en fonction des résultats des autres élèves de la classe. Cela signifie que vous pouvez obtenir une note de 20/20 en n'ayant pas réalisé la totalité du sujet : par exemple, si vous êtes le meilleur en ayant fait la moitié de l'énoncé, vous avez 20/20 !
- Sur votre copie figure donc désormais votre classement à côté de la note attribuée.

4. Quelles matières ?

Les matières enseignées en classe de première année de prépa sont (le volume horaire dépend de votre filière) :

- les mathématiques ;
- la physique ;

- la chimie ;
- les sciences de l'ingénieur (MPSI, PCSTI et PTST) ;
- les sciences de la vie et de la terre (BCPST) ;
- le français : trois œuvres autour d'un thème commun ;
- l'anglais : thèmes (traduction du français vers l'anglais) et versions (traduction de l'anglais vers le français) ;
- le sport : ce qui peut vous permettre de vous détendre et évacuer votre surplus de stress !

5. Quelle attitude adopter en prépa ?

Travaillez régulièrement !

Avec la masse de nouvelles informations que vous allez devoir digérer au cours de la semaine, vous ne pouvez pas vous permettre de travailler par intermittence. Sinon vous serez vite perdu(e) et accumulerez trop de retard.

Prenez l'habitude de lire vos notes prises au cours de la journée tous les soirs en rentrant chez vous. Notez les différents points que vous ne saisissez pas bien et n'hésitez pas à aller voir vos professeurs pour leur poser des questions.

Ne négligez pas les matières littéraires !

- D'abord parce qu'à niveau égal dans les matières scientifiques, c'est l'anglais et le français qui feront la différence aux concours.
- Il est également vivement conseillé aux futurs ingénieurs d'être bilingue français/anglais à leur arrivée sur le marché du travail.
- Mais aussi parce que le français ou l'anglais représentent un « bol d'air frais » dans la semaine qui est remplie de formules mathématiques et scientifiques en tout genre.

Faites-vous des amis !

D'accord, vous êtes systématiquement classés à chaque devoir sur table, ce qui peut instaurer un certain « esprit concours » dans la classe. N'entrez surtout pas dans ce jeu : prêtez vos cours aux absents, expliquez ce que vous avez bien compris à ceux qui ont des difficultés, travaillez avec vos camarades de classe, etc. Pourquoi ? Parce que vous avancez

beaucoup plus rapidement en expliquant aux autres et en leur posant des questions plutôt qu'en révisant tout seul dans votre coin.

Ne faites pas que travailler avec les personnes de votre classe, sortez, allez au cinéma, allez au théâtre, allez voir des expositions, etc. Organisez-vous aussi des dîners de classe ! Le but est de partager autre chose que la vie scolaire. Et vous verrez, on peut se faire des amis en prépa ! Cela vous permettra aussi de supporter le rythme soutenu des cours.

Rassurez-vous !

Il se peut que vous entendiez beaucoup de commentaires décourageants sur la prépa : « c'est horrible », « c'est très difficile », « tu ne vas que travailler », etc. De quoi vous miner le moral... Mais prenez les choses du bon côté :

- vous avez choisi cet enseignement et en plus vous avez eu la chance de voir votre candidature retenue. C'est tout de même une très bonne nouvelle !
- vous allez travailler sur des thèmes qui vous plaisent *a priori* ;
- la prépa est l'occasion de développer d'excellentes méthodes de travail ;
- vous ne perdez pas votre temps car en cas d'échec ou de changement d'orientation vous pouvez intégrer d'autres filières.

Remerciements

Je tiens, tout d'abord, à remercier l'équipe d'édition pour son soutien, son écoute et sa confiance. Je remercie en particulier Maxine Pouzet et Jean-Luc Blanc avec qui il est très agréable de travailler.

Merci aussi à tous les élèves que j'ai pu accompagner au cours de leurs études en classes préparatoires scientifiques. Leurs doutes et leurs questionnements m'ont permis d'insister sur les points les plus délicats à leur arrivée en mathématiques supérieures.

En espérant que cet ouvrage vous aide du mieux possible, je vous souhaite une très bonne année scolaire.

Bon travail et excellente « prépa » à tous !

« Le succès ne vient qu'à ceux qui ne craignent pas l'effort »

Marie-Virginie SPELLER

Mathématiques

Le point sur les équations

1. Rappels de cours

1. Les équations généralités

Les équations se présentent sous la forme $f(x) = b$ où f est une fonction, souvent une fonction affine, une fonction logarithme, une exponentielle, une racine, etc.

Exemple

La fonction carrée f définie par $f(x) = x^2$ ne réalise pas une bijection sur \mathbb{R} car elle n'est pas monotone sur \mathbb{R} (elle est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$).

Vous ne pouvez donc pas utiliser la formule $x = f^{-1}(b)$ avec cette fonction lorsque $x \in \mathbb{R}$.

2. Les équations avec expressions affines

- Equations du type $ax = 0$ avec a réel :
si a est un réel non nul, alors l'unique solution de cette équation est $x = 0$ donc l'ensemble S des solutions est $S = \{0\}$.
Si a est nul, alors l'équation admet une infinité de solutions. $S = \mathbb{R}$.
- Equations du type $x + b = 0$ avec b réel ;
l'unique solution de cette équation est $x = -b$. $S = \{-b\}$.
- Equations du type $ax + b = 0$:
si a est un réel non nul et b un réel, alors cette équation a pour unique solution $x = -\frac{b}{a}$. $S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

3. Équations sous forme de nullité d'un produit de facteurs

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs au moins est nul : $A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ou $B = 0$.

Parfois, et même souvent, l'équation ne se présente pas sous la forme d'un produit directement factorisé. C'est donc à vous de factoriser

l'expression afin d'obtenir un produit de facteurs et pouvoir ainsi résoudre l'équation.

4. Équations sous forme de nullité d'un quotient

Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul et son dénominateur non nul :

$$\frac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ et } B \neq 0.$$

Parfois et même souvent, il arrive que l'équation ne se présente pas sous la forme d'un seul quotient. C'est donc à vous de réduire l'expression au même dénominateur afin d'obtenir un unique quotient et pouvoir ainsi résoudre l'équation.

[ATTENTION]

Ne pas oublier que le dénominateur B ne doit pas s'annuler.

Exemple

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = 0 &\Leftrightarrow \frac{(x - 2)(x - 3)}{x - 2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ ou } x = 3 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3, \text{ et donc } S = \{3\} \end{aligned}$$

5. Les équations non linéaires

La fonction f est dans ce cas une fonction non affine. Il peut s'agir d'une fonction bijective (c'est-à-dire que chaque y admet un unique antécédent x par f).

Équations	Solutions
$\frac{1}{x} = a, x \neq 0, a \neq 0$	$x = \frac{1}{a}, x \neq 0, a \neq 0$
$\ln(x) = a, x > 0$	$x = e^a$
$e^x = a, a > 0$	$x = \ln(a), a > 0$
$\sqrt{x} = a, a \geq 0, x \geq 0$	$x = a^2, a \geq 0, x \geq 0$
$x^2 = a, a \geq 0$	$x = \pm\sqrt{a}, a \geq 0$

Équations	Solutions
$x^3 = a$	$x = \sqrt[3]{a}$
$x^{2p} = a, a \geq 0, p \in \mathbb{N}^*$	$x = \pm \sqrt[2p]{a}, a \geq 0, p \in \mathbb{N}^*$
$x^{2p+1} = a$	$x = \sqrt[2p+1]{a}$
$ x = a, a \geq 0$	$x = a$ ou $x = -a$

[REMARQUE]

Un nombre entier pair n s'écrit $n = 2p$ et un nombre entier impair n s'écrit $n = 2p + 1$ où p est un entier naturel.

[ATTENTION]

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, x \geq 0$	$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}, x \geq 0$	$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}, n \geq 1, \begin{cases} x \geq 0, n \text{ pair} \\ x \text{ réel}, n \text{ impair} \end{cases}$ $x \geq 0$
--	---	---

2. Applications directes du cours

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation suivante :

$$(x - 1)(2x + 3) = 0$$

2. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation suivante :

$$\frac{x + 1}{x - 1} = \frac{-1}{2x - 3}$$

Corrigés

1. $(x - 1)(2x + 3) = 0 \Leftrightarrow (x - 1 = 0 \text{ ou } 2x + 3 = 0) \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ou } x = -\frac{3}{2})$
2. Tout d'abord vous mettez tous les termes du même côté :

$$\frac{x + 1}{x - 1} = \frac{-1}{2x - 3} \Leftrightarrow \frac{x + 1}{x - 1} + \frac{1}{2x - 3} = 0$$

Puis vous réduisez au même dénominateur :

$$\Leftrightarrow \frac{(2x-3)(x+1)}{(x-1)(2x-3)} + \frac{1 \times (x-1)}{(x-1)(2x-3)} = 0$$

Ensuite vous développez, réduisez et ordonnez :

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 + 2x - 3x - 3}{(x-1)(2x-3)} + \frac{x-1}{(x-1)(2x-3)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - x - 3}{(x-1)(2x-3)} + \frac{x-1}{(x-1)(2x-3)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 4}{(x-1)(2x-3)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \\ (x-1)(2x-3) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{2} \text{ ou } x = \sqrt{2} \\ x \neq 1 \text{ et } x \neq \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$S = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$$

[ATTENTION]

Lorsqu'il s'agit de déterminer des valeurs interdites, il faut utiliser « et » et non « ou », par exemple :

$$(x-1)(2x-3) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \text{ et } x \neq \frac{3}{2}$$

[TECHNIQUE]

Pour gagner du temps vous pouvez effectuer un produit en croix (attention : non valable dans le cas d'inéquations !) et obtenez :

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{-1}{2x-3} \Leftrightarrow (x+1)(2x-3) = (x-1) \times (-1)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 2x - 3 = -(x-1) \Leftrightarrow 2x^2 - x - 3 = -x + 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

3. Exercices

1. Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

a) $x^2 + 4 + (x - 4) = 0$

b) $x^2 - 25 + (x - 5)(x + 1) = 0.$

2. Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

a) $\frac{2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{2x}{x - 1}$

b) $x^2 = -1.$

Corrigés

1. a) $x^2 + 4 + (x - 4) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4 + x - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -1$$

et donc $S = \{-1 ; 0\}$

b) $x^2 - 25 + (x - 5)(x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 5)(x + 5) + (x - 5)(x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 5)[(x + 5) + (x + 1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 5)(2x + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x - 5)(x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 5 = 0 \text{ ou } x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \text{ ou } x = -3$$

et donc $S = \{-3 ; 5\}$

2. a) $\frac{2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{2x}{x - 1}$

$$\frac{2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{2x}{x - 1} \Leftrightarrow \frac{2x + 1}{x^2 - 1} - \frac{2x}{x - 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x + 1}{x^2 - 1} - \frac{2x(x + 1)}{x^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x + 1 - 2x^2 - 2x}{x^2 - 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x^2 + 1}{x^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2} \\ x^2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x \neq -1 \text{ et } x \neq 1 \end{cases}$$

$$S = \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

- b) L'équation $x^2 = -1$ n'admet pas de solution dans \mathbb{R} car un carré n'est jamais négatif dans cet ensemble. $S = \emptyset$.

[ATTENTION]

Dans l'ensemble des nombres complexes, cette équation admet deux solutions :

$$x^2 = -1 \Leftrightarrow x^2 = i^2 \Leftrightarrow x = i \text{ ou } x = -i$$

Le point sur la résolution de systèmes

1. Rappels de cours

On cherche à résoudre un système linéaire de 2 équations à 2 inconnues x et y :

$$(S) \begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

1. La résolution par substitution

Il s'agit d'exprimer l'une des variables en fonction de l'autre. Dans le système (S), il est possible d'exprimer y en fonction de x dans la première équation, si $b \neq 0$:

$$ax + by = e \Leftrightarrow by = e - ax \Leftrightarrow y = \frac{e - ax}{b}$$

Puis on remplace y dans la seconde équation :

$$cx + dy = f \Leftrightarrow cx + d \times \frac{e - ax}{b} = f \Leftrightarrow \frac{cbx + de - dax}{b} = \frac{bf}{b}$$

$$\Leftrightarrow cbx + de - dax = bf \Leftrightarrow (bc - ad)x = bf - de$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{bf - de}{bc - ad}, \text{ si } bc - ad \neq 0$$

On obtient l'expression de y en remplaçant par la valeur obtenue ci-dessus :

$$y = \frac{e - ax}{b} = \frac{e - a \frac{bf - de}{bc - ad}}{b} = \frac{e(bc - ad) - a(bf - de)}{b(bc - ad)}$$

$$y = \frac{ebc - ead - abf + ade}{b(bc - ad)} = \frac{ebc - abf}{b(bc - ad)} \Leftrightarrow y = \frac{ec - af}{bc - ad}$$

Il n'est pas utile de retenir les valeurs de x et y calculées ci-dessus. Dans chaque exemple, on fera le calcul.

2. La résolution par combinaison

Cette méthode consiste à éliminer une variable de manière à se retrouver en présence d'une équation à une seule inconnue x ou y . Pour cela, il suffit d'additionner ou soustraire les deux équations affectées d'un facteur permettant de supprimer une variable.

Dans le système (S), il suffit de multiplier la 1^{re} équation par d et la 2^{de} par b puis de les soustraire. Cela permet d'éliminer la variable y :

$$d(ax + by) - b(cx + dy) = de - bf$$

$$\Leftrightarrow dax + dby - bcx - bdy = de - bf \Leftrightarrow dax - bcx = de - bf$$

$$\Leftrightarrow (da - bc)x = de - bf \Leftrightarrow x = \frac{de - bf}{ad - bc} = \frac{bf - de}{bc - ad}, \text{ si } bc - ad \neq 0$$

Puis on remplace x par son expression dans l'une ou l'autre des équations de départ pour obtenir le même résultat que précédemment. Le y s'obtient alors de la même manière que dans la méthode par substitution.

3. Représentation graphique

Les droites (d) et (d') ont pour équations respectives : $ax + by = e$ et $cx + dy = f$.

