50 CLÉS POUR COMPRENDRE LES MATHS

TONY
CRILLY

Traduit de l'anglais par Véronique Bordellès

DUNOD

Table des matières

Introduction

Les mathématiques sont un vaste domaine que nul ne peut maîtriser entièrement. Ce que l'on peut faire en revanche, c'est trouver son propre chemin pour les explorer. Les possibilités qui nous sont offertes nous entraîneront alors vers d'autres époques et des cultures différentes, nous faisant ainsi découvrir des idées qui ont plongé les mathématiciens dans la perplexité pendant des siècles.

Les mathématiques sont une discipline à la fois ancienne et moderne et se sont édifiées à partir d'influences culturelles et politiques venues du monde entier. Les Indiens et les Arabes nous ont donné notre système de numération actuel que viennent cependant émailler quelques vestiges du passé. Nous retrouvons encore des traces de la base « 60 » des Babyloniens des 2^e^ et 3^e^ millénaires av. J.-C. Ainsi, il y a 60 secondes dans 1 minute et 60 minutes dans 1 heure, un angle droit fait toujours 90° et non pas 100 grades en dépit de la tentative de la France révolutionnaire d'imposer le système décimal.

Les triomphes technologiques de l'époque moderne sont liés aux mathématiques, ce qui fait qu'aujourd'hui, on ne peut certainement plus se vanter d'avoir été un élève médiocre dans cette matière. Bien sûr, les mathématiques de l'école sont différentes car souvent enseignées dans le seul but de préparer à des examens. Le rythme soutenu imposé aux élèves n'est pas non plus propice à son enseignement, car les mathématiques sont une matière pour laquelle on ne gagne pas à être rapide. Il faut du temps pour apprivoiser les idées. Certains des plus grands mathématiciens ont fait preuve d'une lenteur monumentale dans leurs efforts pour comprendre les concepts compliqués qu'ils étudiaient.

Inutile, donc, de se précipiter pour lire ce livre. On peut le feuilleter à loisir. Prenez le temps de découvrir le sens réel de ces idées dont vous avez peut-être déjà entendu parler. Commencez par le chapitre sur le chiffre zéro, ou un autre si vous voulez, et de là, vous pouvez partir à la découverte des terres de la pensée mathématique. Vous pouvez, par exemple, vous informer sur la théorie des jeux, puis lire le chapitre sur les carrés magiques. Ou alors, après avoir vu les rectangles d'or, vous pouvez aller au grand théorème de Fermat, ou n'importe où ailleurs.

Nous vivons une époque passionnante pour les mathématiques. Ces dernières années, quelques-uns des plus grands problèmes ont été résolus. Les développements modernes de l'informatique ont permis d'en résoudre certains, mais se sont avérés impuissants pour en résoudre d'autres. La solution au problème des quatre couleurs a été trouvée grâce à l'ordinateur, mais l'hypothèse de Riemann, sujet du chapitre final de cet ouvrage, n'est toujours pas démontrée, que ce soit avec un ordinateur ou par un autre moyen.

Les mathématiques s'adressent à tous. La popularité du sudoku est la preuve que l'on peut faire des mathématiques (sans le savoir) et en plus y prendre du plaisir. Les mathématiques, comme l'art ou la musique, ont connu des génies dont l'histoire ne résume pas tout. Vous verrez plusieurs éminents personnages faire leur entrée et leur sortie dans certains chapitres puis revenir dans d'autres. Leonhard Euler, dont le tricentenaire a eu lieu en 2007, apparaît régulièrement dans ces pages. On doit cependant les vrais progrès des mathématiques à cette « multitude obscure » dont les travaux se sont accumulés au cours des siècles. Ce choix, certes personnel, de 50 sujets a toutefois été guidé par le désir de respecter un certain équilibre. Vous trouverez des thèmes familiers et d'autres plus poussés, des mathématiques pures et appliquées, abstraites et concrètes, anciennes et modernes. Les mathématiques forment cependant un tout, et la difficulté n'a donc pas été de choisir les sujets mais d'en éliminer certains. Il aurait pu y avoir 500 idées, mais 50 suffisent largement pour vous permettre de faire de bons débuts dans le monde mathématique.

01 Zéro

Tout petits, c'est d'un pas mal assuré que nous faisons notre entrée au pays des nombres. On nous y apprend que le 1 occupe la première position dans « l'alphabet des nombres », et qu'il est suivi de 2, 3, 4, 5… Les nombres ne servent à rien d'autre qu'à compter des choses réelles telles que des pommes, des oranges, des bananes, des poires. Ce n'est que bien plus tard que l'on apprend à compter le nombre de pommes dans une boîte lorsque celle-ci est vide.

Les Grecs de l'Antiquité eux-mêmes, qui ont pourtant permis l'avancée prodigieuse des sciences et des mathématiques, et qui se sont illustrés par leurs prouesses dans le domaine de la technologie, ne disposaient d'aucune méthode efficace pour compter le nombre de pommes dans une boîte vide. Ils n'ont pas réussi à donner un nom au « rien ». Les Romains avaient quant à eux une façon très particulière de combiner I, V, X, L, C, D et M. Mais qu'en était-il du 0 ? Ils ne comptaient pas le « rien ».

Comment le zéro est-il parvenu à se faire accepter ? L'utilisation d'un symbole pour désigner « le néant » remonterait à des milliers d'années. La civilisation Maya qui occupait le Mexique actuel employait le zéro sous différentes formes. Un peu plus tard, l'astronome Claudius Ptolémée, influencé par les Babyloniens, utilisait un symbole proche de notre 0 pour marquer une position dans son système de numération. En tant que marqueur de position, le zéro pouvait servir à différencier des nombres tels que 75 et 705 par exemple, sans avoir besoin de se référer au contexte comme le faisaient les Babyloniens. C'est un peu comme la « virgule » dans le langage écrit : tous deux nous permettent de « lire » la bonne signification. Toutefois, de même que l'utilisation de la virgule est accompagnée d'un ensemble de lois, des règles sont nécessaires pour bien utiliser le zéro.

Le mathématicien indien Brahmagupta au VIIe siècle de notre ère, pour qui le zéro était un « nombre » comme les autres, avait fixé des règles pour l'utiliser. Selon l'une d'elles, « la somme d'un nombre positif et de zéro est positive » et « la somme de zéro plus zéro est égale à zéro ». En considérant zéro comme un nombre et non pas seulement comme un marqueur de position, il était en avance sur son temps. Le système de numération indo-arabe dans lequel le zéro était utilisé comme un nombre fut diffusé en occident par Léonard de Pise, plus connu sous le nom de Fibonacci,

chronologie

700 av. J.-C.
Les Babyloniens utilisent le zéro en tant que marqueur de position dans leur système de numération.

628 av. J.-C.
Brahmagupta utilise le zéro et fixe des règles pour l'utiliser avec les autres chiffres.

dans son ouvrage intitulé *Liber Abaci* (*Le Livre des abaques*) qu'il publia en 1202. Élevé en Afrique du Nord et formé à l'école arithmétique indo-arabe, il reconnaissait tout l'intérêt qu'il y avait à utiliser le signe supplémentaire 0 en combinaison avec les symboles indiens 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.

L'introduction du zéro dans le système de numération posa un problème que Brahmagupta n'examina que rapidement : comment fallait-il traiter cet « intrus » ? Il esquissa une solution, mais les expédients qu'il proposait étaient vagues. Comment faire pour réellement intégrer le zéro dans le système arithmétique existant ? Certains ajustements étaient simples. Tant qu'il s'agissait d'additionner et de multiplier, 0 s'intégrait parfaitement, mais les opérations de soustraction et de division s'entendaient mal avec « l'étranger ». Des simplifications étaient nécessaires pour permettre au 0 de s'accorder avec l'arithmétique pratiquée à l'époque.

Comment fonctionne le zéro ? Les additions et les multiplications avec zéro sont simples et ne donnent pas lieu à contestation. Si 0 vient s'ajouter à 10, on obtient 100, mais « ajouter » doit être pris ici dans un sens purement numérique. additionner 0 à un nombre le laisse inchangé alors que multiplier 0 par n'importe quel nombre donne toujours 0. Par exemple, on a $7 + 0 = 7$ et $7 \times 0 = 0$. La soustraction est une opération simple qui peut cependant donner des nombres négatifs, $7 - 0 = 7$, et $0 - 7 = -7$, alors que la division avec 0 est source de difficultés.

Imaginons qu'il nous faille mesurer une longueur donnée avec une règle. Supposons que cette règle est de sept unités de long. Nous voulons savoir combien de règles nous pouvons mettre bout à bout pour effectuer notre mesure. Si notre longueur est de 28 unités effectives, la réponse est 28 divisé par 7 ou, avec les symboles mathématiques, $28 \div 7 = 4$. On préfère noter cette division sous la forme

$$\frac{28}{7} = 4$$

On peut alors effectuer un « produit en croix » et l'on obtient la multiplication $28 = 7 \times 4$. Que faire maintenant de 0 divisé par 7 ? Pour faciliter notre travail, appelons cette réponse a de sorte que

$$\frac{0}{7} = a$$

Avec un produit en croix, cela équivaut à $0 = 7 \times a$. Si c'est le cas, la seule valeur possible pour a est 0, car si la multiplication de deux nombres donne 0, alors l'un des deux doit être égal à 0.

Et ce n'est pas le plus difficile. Le point critique est la division par 0. Si l'on essaie de traiter 7/0 de la même manière que 0/7, on obtient l'équation

$$\frac{7}{0} = b$$

830 ap. J.-C.
Mahavira se penche sur les effets de l'introduction du zéro dans le système numérique.

1100
Bhaskara utilise 0 comme symbole en algèbre et entreprend de montrer comment il peut être utilisé.

1202
Fibonacci utilise le symbole supplémentaire 0 qu'il ajoute au système indo-arabe de chiffres de 1 à 9 mais ne lui donne pas le statut de nombre au même titre que les autres.

Avec le produit en croix, $0 \times b = 7$ et on aboutit à cette ineptie que $0 = 7$. Si l'on admet la possibilité pour 7/0 d'être un nombre, on risque alors une pagaille numérique à grande échelle. La solution est de dire que 7/0 est indéterminé. La division de 7 (ou de tout autre nombre que 0) par 0 ne débouche sur aucune réponse acceptable et c'est pourquoi cette opération n'est tout simplement pas autorisée. De manière similaire, il n'est pas permis de placer une virgule au « mi,lieu » d'un mot sans glisser dans l'absurde.

Le mathématicien indien Bhaskara au XIIe siècle, à la suite de Brahmagupta, n'écartait pas la division par 0 et suggérait qu'un nombre divisé par 0 était infini. Ce raisonnement se tient parce que si l'on divise un nombre par un très petit nombre, le résultat obtenu est très grand. Par exemple, 7 divisé par 1/10 est égal à 70 et 7 divisé par 1/100 donne 700. Plus on réduit le nombre du dénominateur, plus le nombre que l'on obtient est grand. Si l'on allait dans la petitesse ultime en prenant 0 lui-même, la réponse serait l'infini. En adoptant cette forme de raisonnement, nous nous trouvons obligés d'expliquer un concept plus bizarre encore, à savoir celui de l'infini. Se débattre avec l'infini n'aide pas ; l'infini (symbolisé aujourd'hui par ∞) ne suit pas les règles habituelles de l'arithmétique et n'est pas un nombre au sens habituel du terme.

Si 7/0 pose problème, que faire alors de l'encore plus bizarre 0/0 ? Si $0/0 = c$, avec le produit en croix on obtient l'équation $0 = 0 \times c$ et donc $0 = 0$. Cela n'apporte pas grand-chose, mais ce n'est pas absurde non plus. En fait, c peut être un nombre quelconque et ainsi, nous ne débouchons pas sur une impossibilité. Nous arrivons à la conclusion que 0/0 peut prendre n'importe quelle valeur, finie ou infinie ; les spécialistes parlent de « forme indéterminée ».

Pour résumer, l'étude de la division par zéro amène à la conclusion qu'il est préférable d'exclure cette opération de tous les calculs. L'arithmétique se porte tout aussi bien sans elle.

Pourquoi utiliser le zéro ? Il était tout simplement impossible de s'en passer. Les progrès de la science en dépendaient. On parle du degré zéro de longitude, du degré zéro sur l'échelle des températures et, de la même manière, de l'énergie du point zéro et du zéro absolu. Cette notion est entrée dans le langage courant avec des idées telles que le risque zéro et la tolérance zéro.

Une plus grande utilisation pourrait cependant en être faite. Si vous quittez la 5e avenue à New York et pénétrez dans l'Empire State Building, vous vous retrouvez dans le magnifique hall d'entrée au niveau 1. On utilise la capacité des nombres à s'ordonner, le 1 étant utilisé pour désigner le « premier » étage, le 2 pour désigner le « second » et ainsi de suite jusqu'à 102 pour le « cent deuxième » étage. En Europe, le rez-de-chaussée n'est en fait rien d'autre qu'un étage 0 que l'on a cependant quelques répugnances à appeler ainsi.

Les mathématiques ne pourraient pas fonctionner sans le zéro. C'est même un élément fondamental dans les concepts mathématiques qui régissent notre système de nombres, l'algèbre et la géométrie. Sur la ligne des nombres, 0 est celui qui sépare les nombres positifs des nombres négatifs, et c'est pourquoi il occupe une position privilégiée. Dans le système décimal, le zéro sert de marqueur de position qui nous permet d'utiliser à la fois des nombres gigantesques et d'autres microscopiques.

Le zéro a mis des centaines d'années avant de se faire accepter et de devenir l'une des inventions les plus importantes de l'homme. Le mathématicien américain G. B. Halsted au XIX^{e} siècle a détourné une réplique tirée du *Songe d'une nuit d'été* de Shakespeare pour dire que le zéro est le moteur du progrès qui « accorde à un rien dans l'air non seulement une demeure précise et un nom, une image, un symbole, mais également un pouvoir efficace ; il est la propriété du peuple indien qui lui a donné naissance. »

Au début, on a dû trouver le 0 tout à fait curieux, mais les mathématiciens ont la manie de s'enticher de concepts étranges qui s'avèrent utiles bien des années plus tard. C'est le cas aujourd'hui avec la théorie des ensembles où le concept d'un ensemble est défini comme une collection d'éléments. Dans cette théorie, Ø désigne l'ensemble qui ne contient aucun élément, ce que l'on désigne par « l'ensemble vide ». C'est un ensemble curieux, certes, mais comme 0, il est indispensable.

Tout sur rien

La somme de zéro et d'un entier strictement positif est strictement positive.
La somme de zéro et d'un entier strictement négatif est strictement négative.
La somme d'un entier strictement positif et d'un entier strictement négatif est égale à leur différence, ou, s'ils sont égaux, à zéro.
Zéro divisé par un entier strictement négatif ou positif est égal à zéro ou s'écrit sous la forme d'une fraction dont le numérateur est égal à zéro et le dénominateur est une quantité finie.

Brahmagupta, 628

idée clé
Rien est quelque chose

02 Les systèmes de nombres

Un système de nombres est un outil qui permet de traiter le concept de « quantité ». Diverses cultures à des moments différents de l'histoire ont adopté des méthodes variées, qui vont de la méthode de base « un, deux, trois, beaucoup » à la notation décimale hautement sophistiquée que nous utilisons aujourd'hui.

Les Sumériens et les Babyloniens, qui occupaient la Syrie, la Jordanie et l'Irak actuels il y a 4 000 ans environ, utilisaient un système de numérotation de position pour leur usage quotidien. Nous l'appelons système de position parce que l'on reconnaît le « nombre » grâce à la position d'un symbole. Ils utilisaient également 60 comme unité de base : c'est ce que nous appelons aujourd'hui un système sexagésimal ou système « en base 60 ». Il reste aujourd'hui des vestiges de la base 60. Il y a 60 secondes dans une minute, 60 minutes dans une heure. En ce qui concerne les angles, leur mesure repose aujourd'hui encore largement sur le système sexagésimal et s'exprime en degrés notés °. Ainsi, l'angle nul mesure 360° contre 400 grades avec le système décimal qui n'a jamais réussi à s'imposer. Un angle droit vaut donc 100 grades.

Nos très lointains ancêtres utilisaient principalement les nombres à des fins pratiques, et pourtant certains signes prouvent que les mathématiques en tant que telles excitaient la curiosité de ces cultures primitives, et qu'elles ont pris sur le temps réservé à l'exécution des tâches quotidiennes pour les explorer. Au nombre de ces explorations, figurent ce que l'on pourrait appeler « l'algèbre » et les propriétés des figures géométriques.

Le système égyptien du XIII^e siècle av. J.-C. utilisait la base 10 associée à un système de signes hiéroglyphiques. Les Égyptiens développèrent notamment un système destiné à traiter les fractions, mais la notation décimale de position actuelle nous est venue des Babyloniens, et ce sont les Indiens qui l'ont plus tard améliorée. Elle présente l'avantage de pouvoir exprimer à la fois de très petits nombres et de très gros. Les chiffres indo-arabes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 utilisés seuls permettent de

chronologie

300000 av. J.-C.
Les peuples européens du paléolithique comptent en faisant des entailles sur des os.

2000 av. J. C.
Les Babyloniens utilisent des symboles pour représenter les nombres.

calculer assez facilement. Pour le comprendre, examinons le système romain. Il était adapté à leurs besoins mais seuls des spécialistes du système étaient capables de s'en servir pour réaliser des calculs.

Le système romain Les symboles de base utilisés par les Romains étaient les « dix » (I, X, C et M), et leur moitié (V, L et D). Ces symboles sont combinés pour en former d'autres. On suppose que les symboles I, II, III et IIII tirent leur origine de l'apparence de nos doigts, V de la forme de notre main, et que, si l'on combine ce dernier symbole avec un V à l'envers de manière à former un X, on retrouve deux mains, ou dix doigts. C viendrait de *centum* et M de *mille*, mots latins signifiant respectivement cent et mille. Les Romains utilisaient aussi S pour « une moitié » ainsi qu'un système de fractions en base 12.

Le système romain utilisait une méthode qui reposait sur la position « avant et après » des symboles de base pour construire les combinaisons nécessaires, mais elle n'aurait, semble-t-il, pas été uniformément adoptée. Les Romains de l'Antiquité préféraient écrire IIII, alors que IV n'a été introduit que bien plus tard. La combinaison IX semble avoir été utilisée, mais pour un Romain, SIX aurait signifié $8\frac{1}{2}$! Voici les nombres de base du système romain, avec quelques ajouts effectués à l'époque médiévale :

Le système de nombres romain

Empire Romain		**Extensions de l'époque médiévale**	
S	une moitié		
I	un		
V	cinq	$\overline{V}$	cinq mille
X	dix	$\overline{X}$	dix mille
L	cinquante	$\overline{L}$	cinquante mille
C	cent	$\overline{C}$	cent mille
D	cinq cents	$\overline{D}$	cinq cent mille
M	mille	$\overline{M}$	un million

Il n'est pas facile de manier les chiffres romains. Il est par exemple impossible de comprendre MMMCDXLIIII si l'on n'introduit pas mentalement des parenthèses, de sorte que (MMM) (CD) (XL) (IIII) se lit alors 3 000 + 400 + 40 + 4 = 3 444. Mais essayez d'ajouter MMMCDXLIIII à CCCXCIIII. Un spécialiste romain de ce système aurait usé d'astuces pour s'en sortir, mais pour nous, il est difficile d'obtenir la bonne réponse sans d'abord effectuer le calcul dans le système décimal pour traduire ensuite le résultat en notation romaine :

Addition

	3 444	→	MMMCDXLIIII
+	394	→	CCCXCIIII
=	3 838	→	MMMDCCCXXXVIII

La multiplication de deux nombres est bien plus difficile et pourrait bien être impossible dans ce système de base, même pour les Romains ! Pour résoudre 3 444 × 394, il est nécessaire d'avoir recours aux extensions médiévales.

600 ap. J.-C.
L'ancêtre de notre numération décimale moderne est utilisée en Inde.

1200
Le système indo-arabe de notation des chiffres commence à se répandre.

1600
Les symboles du système décimal prennent les formes que nous leur connaissons aujourd'hui.

Multiplication

$$\begin{array}{lll} & 3\,444 & \rightarrow \quad \text{MMMCDXLIIII} \\ \times & 394 & \rightarrow \quad \text{CCCXCIIII} \\ = & 1\,356\,936 & \rightarrow \quad \overline{\text{M}}\,\overline{\text{C}}\,\overline{\text{C}}\,\overline{\text{L}}\,\overline{\text{V}}\text{MCMXXXVI} \end{array}$$

Les Romains n'avaient pas de symbole spécifique pour le zéro. Si vous aviez demandé à un citoyen végétarien de Rome de recenser le nombre de bouteilles de vin consommées dans sa journée, il aurait peut-être écrit III, mais si vous lui aviez demandé combien de poulets il avait mangé, il n'aurait pas pu écrire 0. Il reste des vestiges du système romain dans la pagination de certains livres (pas dans celui-ci cependant) et sur les frontons de certaines bâtisses. Certaines compositions n'ont jamais été utilisées par les Romains, comme MCM pour 1900 par exemple, mais elles ont été introduites à l'époque moderne pour satisfaire des préférences purement formelles. Les Romains auraient écrit MDCCCC. Le quatorzième Roi Louis de France, maintenant universellement connu sous le nom de Louis XIV, préférait en réalité se faire appeler Louis XIIII et avait décidé que le 4 des horloges devait s'écrire sous la forme IIII.

Pendule Louis XIIII

Représentation décimale des nombres entiers Dans le langage courant, on ne fait pas la différence entre « les nombres » et les nombres entiers. Le système décimal prend 10 pour base et utilise les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9. Lorsque l'on écrit le nombre **394**, on peut expliciter sa signification décimale en disant qu'il est composé de 3 centaines, 9 dizaines et 4 unités, ce qui s'écrirait

$$\mathbf{394} = \mathbf{3} \times 100 + \mathbf{9} \times 10 + \mathbf{4} \times 1$$

On peut aussi l'écrire en utilisant des « puissances » de 10 (encore appelées « exposants ») :

$$\mathbf{394} = 3 \times 10^2 + \mathbf{9} \times 10^1 + \mathbf{4} \times 10^0$$

En effet $10^2 = 10 \times 10$, $10^1 = 10$ et nous admettons le cas à part $10^0 = 1$. Cette notation fait apparaître plus clairement la base décimale de notre système de nombres usuel, système grâce auquel l'addition et la multiplication gagnent en transparence.

La virgule décimale Jusque-là, nous avons examiné la représentation des nombres entiers. Le système décimal peut-il traiter des parties de nombre telles que $^{572}/_{1\,000}$? Cet exemple peut être noté sous la forme développée

$$\frac{572}{1000} = \frac{5}{10} + \frac{7}{100} + \frac{2}{1000}$$

On peut traiter les « réciproques » de 10, 100, 1 000 comme des puissances négatives de 10, de sorte que

$$\frac{572}{1000} = 5 \times 10^{-1} + 7 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3}$$

ce qui peut s'écrire **0,572** avec une virgule qui indique le début des puissances négatives de 10. Si l'on ajoute ce résultat à la notation décimale de 394, on obtient l'expansion décimale du nombre $394^{572}/_{1\,000}$, c'est-à-dire **394,572** tout simplement.

Pour les très grands nombres, la notation décimale est parfois très longue, c'est pourquoi l'on revient dans ce cas à la « notation scientifique ». Par exemple, 1 356 936 892 peut s'écrire $1{,}356\,936\,892 \times 10^9$ qui apparaît souvent sous la forme « 1,356 936 892 × 10E9 » sur les calculatrices ou les ordinateurs. Dans cet exemple, la puissance 9 correspond au nombre de chiffres contenus dans le nombre moins 1 et la lettre E signifie « exposant ». Il nous arrive parfois de vouloir utiliser de plus grands nombres encore, par exemple pour parler du nombre d'atomes d'hydrogène que contient l'univers connu. On l'estime à environ $1{,}7 \times 10^{77}$. De la même manière, $1{,}7 \times 10^{-77}$, avec une puissance négative, est un très petit nombre qui est lui aussi facile à utiliser avec cette notation scientifique. On ne pourrait même pas imaginer ces nombres si l'on ne disposait que des symboles romains.

Les zéros et les uns Alors que la base 10 est parfaitement établie dans notre vie quotidienne, quelques applications nécessitent d'autres bases. Le système binaire qui utilise la base 2 se dissimule derrière notre puissant ordinateur moderne. La beauté de ce système réside dans le fait que l'on peut exprimer un nombre quel qu'il soit à l'aide des seuls symboles 0 et 1. En contrepartie de cette économie, les nombres écrits en base deux peuvent être très longs.

Comment écrire **394** en base 2 ? Cette fois, nous traitons de puissances de 2 et après quelques calculs, nous pouvons donner l'expression complète comme suit,

$$\mathbf{394} = \mathbf{1} \times 256 + \mathbf{1} \times 128 + \mathbf{0} \times 64 + \mathbf{0} \times 32 + \mathbf{0} \times 16 + 1 \times 8 + \mathbf{0} \times 4 + 1 \times 2 + \mathbf{0} \times 1$$

de sorte que, si on relève les zéros et les uns, **394** s'écrit **110001010** en base 2.

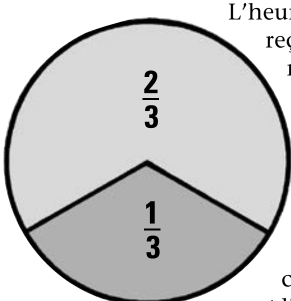
Comme les notations des nombres en base 2 peuvent être très longues, d'autres bases sont fréquemment utilisées en informatique. Il s'agit du système octal (base 8) et du système hexadécimal (base 16). Dans le système octal, seuls les symboles 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, sont nécessaires, alors que le système hexadécimal utilise 16 symboles. Dans ce système en base 16, on utilise généralement 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F. Étant donné que 10 correspond à la lettre A, le nombre 394 s'écrit 18A en base hexadécimale. C'est l'ABC du système, ABC qui, dans le système décimal, équivaut à 2748, pensez-y !

Puissances de 2	Écriture décimale
2^0	1
2^1	2
2^2	4
2^3	8
2^4	16
2^5	32
2^6	64
2^7	128
2^8	256
2^9	512
2^{10}	1 024

l'idée clé
Notation des nombres

03 Les fractions

Une fraction est un « nombre fragmenté », au sens propre du terme. Pour fragmenter un nombre entier, la meilleure façon de procéder est d'utiliser des fractions. Prenons un exemple traditionnel, celui bien connu du gâteau que nous couperons ici en trois parts.



L'heureux convive qui reçoit deux des trois parts du gâteau en reçoit une fraction équivalente à 2/3. Son acolyte malheureux n'en reçoit que 1/3. En réunissant les deux portions du gâteau, on le reconstitue en entier, ou, sous forme de fractions, 1/3 + 2/3 = 1, où 1 représente le gâteau entier.

Voici un autre exemple. Imaginez que vous avez fait les soldes et que vous avez repéré une chemise affichée aux quatre cinquièmes de son prix initial. Dans ce cas, la fraction s'écrit 4/5. On pourrait également dire que la chemise est vendue un cinquième moins cher que son prix d'origine. On l'écrirait 1/5 et l'on voit alors que 1/5 + 4/5 = 1, 1 représentant le prix d'origine.

Une fraction prend toujours la forme d'un nombre entier placé « au-dessus » d'un autre nombre entier. Le nombre du bas s'appelle le « dénominateur » parce qu'il nous indique le nombre de parties égales qui constituent le tout. Le nombre du haut s'appelle le « numérateur » parce qu'il nous dit de combien de fractions unitaires est constituée cette partie du tout. Par conséquent, l'écriture d'une fraction se présente toujours comme suit

$$\frac{\textit{numérateur}}{\textit{dénominateur}}$$

Dans le cas du gâteau, la part que vous voulez peut-être manger correspond aux 2/3 du tout, et dans ce cas le dénominateur est égal à 3 et le numérateur à 2. La fraction 2/3 est constituée de 2 fractions unitaires égales à 1/3 chacune.

On peut aussi avoir des fractions telles que 14/5 (appelées fractions impropres) où le numérateur est plus grand que le dénominateur. Si l'on divise 14 par 5, on obtient 2 et il reste 4, ce qui peut s'écrire sous la forme du nombre « mixte » $2^4/_5$. Il est constitué du nombre entier 2 et de la fraction « propre » 4/5. Certains

chronologie

1800 av. J.-C.
Les fractions sont utilisées dans les cultures Babyloniennes.

1650 av. J.-C.
Les Égyptiens utilisent les fractions unitaires.

mathématiciens la notaient autrefois sous la forme $^4/_5 2$. Les fractions sont généralement représentées avec un numérateur et un dénominateur (le « haut » et le « bas ») qui n'ont aucun facteur commun. Par exemple, le numérateur et le dénominateur de 8/10 ont 2 pour facteur commun, parce que $8 = 2 \times 4$ et $10 = 2 \times 5$. Si l'on écrit la fraction $8/10 = {}^{(2 \times 4)}/_{(2 \times 5)}$ on peut supprimer les 2 et donc 8/10 = 4/5, forme équivalente plus simple. Les mathématiciens appellent les fractions « des nombres rationnels » parce qu'elles expriment un ratio entre deux nombres. Les nombres rationnels étaient des nombres que les Grecs savaient « mesurer ».

Additionner et multiplier Chose curieuse avec les fractions, c'est qu'il est plus facile de les multiplier que de les additionner. La multiplication des nombres entiers est tellement pénible qu'il a fallu inventer des méthodes astucieuses pour y parvenir. Avec les fractions, c'est l'addition qui pose le plus de problèmes et qui demande un petit effort de réflexion.

Commençons par la multiplication. Si vous achetez une chemise aux quatre cinquièmes de son prix initial de 30 €, vous la payez au final 24 €. Les 30 € sont divisés en 5 parties de 6 € chacune et quatre de ces cinq parties sont égales à $4 \times 6 = 24$, somme à payer pour acheter la chemise.

Par la suite, le directeur du magasin découvre que ses chemises ne se vendent pas bien. Il baisse alors encore les prix et les affiche à $^1/_2$ du prix soldé. Si vous allez dans le magasin, vous pouvez maintenant acheter la chemise pour 12 €. On a en effet $^1/_2 \times {}^4/_5 \times 30$ qui est égal à 12 €. Pour multiplier deux fractions, il suffit de multiplier deux à deux les dénominateurs puis les numérateurs :

$$\frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{1 \times 4}{2 \times 5} = \frac{4}{10}$$

Si le directeur avait fait les deux réductions en une seule fois, il aurait affiché les chemises à quatre dixièmes du prix initial qui est de 30 €, c'est-à-dire $^4/_{10} \times 30$, soit 12 €.

Additionner deux fractions est une tout autre affaire. L'addition de $^1/_3 + {}^2/_3$ est simple parce que les dénominateurs sont identiques. Il suffit d'ajouter les deux numérateurs et l'on obtient $^3/_3$, ou 1. Mais comment additionner deux tiers du gâteau avec quatre cinquièmes du gâteau ? Comment calculer $^2/_3 + {}^4/_5$? Si seulement on pouvait dire $^2/_3 + {}^4/_5 = {}^{(2+4)}/_{(3+5)} = {}^6/_8$, mais c'est malheureusement impossible.

Additionner les fractions exige une approche différente. Pour ajouter $^2/_3$ à $^4/_5$, il faut d'abord les mettre au même dénominateur. Commencez par multiplier le haut et le bas de $^2/_3$ par 5 : vous obtenez $^{10}/_{15}$. Multipliez à présent le haut et le bas de $^4/_5$ par 3 : vous obtenez $^{12}/_{15}$. Maintenant, les deux fractions ont 15 pour dénominateur commun et pour les additionner, il suffit d'additionner les numérateurs obtenus :

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{10}{15} + \frac{12}{15} = \frac{22}{15}$$

100 ap. J.-C.
Les Chinois conçoivent un système de calcul qui utilise des fractions.

1202
La notation fractionnaire avec la barre se répand grâce à Léonard de Pise (Fibonacci).

1585
Simon Stevin expose sa théorie sur les fractions décimales.

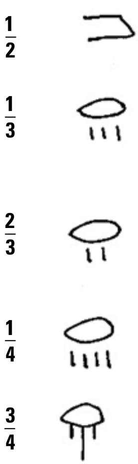
1700
Le trait de fraction « / » (comme dans $^a/_b$) est d'emploi courant.

Conversions sous forme décimale Dans le monde des sciences et dans la plupart des applications mathématiques, c'est sous forme décimale que l'on préfère exprimer les fractions. La fraction $^4/_5$ est équivalente à la fraction $^8/_{10}$ qui a 10 pour dénominateur et qui peut s'écrire sous la forme décimale 0,8.

Les fractions dont le dénominateur est égal à 5 ou 10 sont faciles à convertir. Mais comment pourrions-nous convertir par exemple $^7/_8$ sous forme décimale ? Tout ce qu'il faut savoir, c'est que lorsque l'on divise un nombre entier par un autre, ou bien il y va un certain nombre exact de fois, ou bien il y va un certain nombre de fois et il reste quelque chose que l'on appelle le « reste ».

Si l'on prend $^7/_8$ à titre d'exemple, la formule pour passer des fractions aux formes décimales est la suivante :

• Essayez de diviser 7 par 8. On ne peut pas, ou vous pourriez dire qu'il y va 0 fois et qu'il reste 7. On le note en écrivant zéro suivi de la virgule décimale : « 0, ».
• Maintenant, divisez 70 par 8 (le reste de l'étape précédente multiplié par 10). Il y va 8 fois, puisque $8 \times 8 = 64$; la réponse est donc 8 et il reste 6 (70 – 64). On écrit alors ce résultat à côté du précédent, ce qui donne « 0,8 ».
• Divisez à présent 60 par 8 (le reste de l'étape précédente multiplié par 10). Comme $7 \times 8 = 56$, la réponse est 7 et il reste 4. On le note, et nous en sommes maintenant à « 0,87 ».
• Divisez 40 par 8 (le reste de l'étape précédente multiplié par 10). Il y va 5 fois et il reste 0. Lorsque l'on obtient 0, on est arrivé au bout de la formule. C'est terminé. La réponse est « 0,875 ».



Fractions égyptiennes

Avec d'autres fractions parfois, les choses ne s'arrêtent jamais ! On pourrait continuer à l'infini ; si l'on essaie de convertir $^2/_3$ sous forme décimale par exemple, on trouve que 20 divisé par 3 donne 6 et qu'il reste 2. Il faut alors diviser à nouveau 20 par 6, mais à aucun moment le reste n'est égal à 0. Dans ce cas, on obtient la forme décimale infinie 0,666666… On l'écrit 0,6–… pour indiquer que c'est une « fraction périodique ».

Un grand nombre de fractions nous mènent ainsi à l'infini. La fraction $^5/_7$ est intéressante. Dans ce cas, on a $^5/_7 = 0{,}714\,285\,714\,285\,714\,285\ldots$ et on voit que la suite 714285 se répète périodiquement. Si une fraction quelconque donne une suite qui se répète périodiquement, il est impossible de l'écrire sous forme décimale et l'utilité de la notation avec la barre apparaît dans toute sa splendeur. Dans le cas de $^5/_7$ on écrit

$$\frac{5}{7} = 0{,}\overline{714\,285\ldots}$$

Fractions égyptiennes Les Égyptiens du deuxième millénaire avant J.-C. avaient construit leur système de fractions à partir de hiéroglyphes qui désignaient des fractions unitaires, c'est-à-dire des fractions dont le numérateur est égal à 1. C'est ce que le papyrus Rhind entreposé au British Museum de Londres nous a enseigné. C'était un système de fractions si compliqué que seuls ceux qui avaient reçu un enseignement spécifique en connaissaient tous les mystères pour réussir à effectuer parfaitement leurs calculs.

Les Égyptiens avaient une prédilection pour quelques fractions telles que $^2/_3$ mais toutes les autres fractions étaient exprimées sous forme de fractions unitaires, comme par exemple $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_{11}$ ou $^1/_{168}$. Ces « fractions de base » leur permettaient d'écrire toutes les autres fractions. Ainsi, $^5/_7$ n'est pas une fraction unitaire mais elle pourrait s'écrire en fractions unitaires sous la forme

$$\frac{5}{7}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{168}$$

Ici, il faut utiliser des fractions unitaires différentes. Une caractéristique du système est qu'il peut y avoir plusieurs écritures d'une même fraction, certaines étant plus courtes que d'autres. Par exemple

$$\frac{5}{7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}$$

La « décomposition égyptienne » est peut-être d'une utilité pratique limitée mais le système a inspiré des générations de parfaits mathématiciens et fourni un grand nombre de problèmes stimulants, qui n'ont d'ailleurs pas tous été résolus aujourd'hui. Une analyse complète des méthodes qui permettraient de trouver la décomposition égyptienne la plus courte attend par exemple le vaillant explorateur des terres mathématiques.

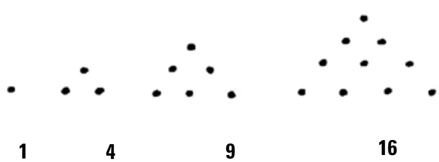
l'idée clé

Un nombre placé au-dessus d'un autre

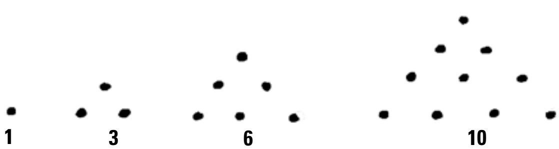
04 Les carrés et les racines carrées

Si vous aimez construire des carrés avec des points, alors vous avez l'esprit Pythagoricien. Cette activité était hautement prisée des membres de la Fraternité qui suivaient les principes imposés par leur maître Pythagore, personnage dont on se souvient davantage pour son célèbre théorème. Il naquit sur l'île grecque de Samos et fonda une société religieuse secrète qui prospéra en Italie du sud. Les disciples de Pythagore pensaient que les mathématiques étaient la clé pour comprendre l'essence de l'Univers.

Si l'on compte les points, on voit que le premier « carré » à gauche est constitué d'un seul point. Pour les Pythagoriciens, 1 était le nombre le plus important, car il était imprégné d'une existence toute spirituelle. C'est donc un bon début. Si l'on continue de compter les points dans les carrés suivants, on trouve les nombres « carrés » 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64… On les appelle les carrés « parfaits ». On peut calculer un carré parfait en additionnant le nombre total de points d'un carré donné au nombre de points situés sur deux côtés extérieurs du carré suivant, par exemple 9 + 7 = 16. Les disciples de Pythagore ne se sont pas arrêtés aux carrés. Ils se sont penchés sur d'autres figures, telles que le triangle, les pentagones (figures à cinq côtés) et autres figures polygonales (figures à plusieurs côtés).



Les nombres triangulaires ressemblent à un tas de pierres. Compter les points qui les constituent nous donne 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, … Si vous voulez calculer un nombre triangulaire, il faut additionner le nombre de points d'un triangle donné au nombre de points de la dernière rangée du triangle suivant. Par exemple, quel nombre



chronologie

1750 av. J.-C.
Les Babyloniens établissent des tables de racines carrées.

525 av. J.-C.
Les Pythagoriciens étudient les carrés parfaits sous forme de points arrangés en figures géométriques.

Vers 300 av. J.-C.
La théorie d'Eudoxe sur les nombres irrationnels est publiée dans le livre 5 des *Éléments* d'Euclide.