

**François Graner
Robin Kaiser
Antonin Marchand
Thomas Salez**

Petits problèmes de physique

**Du quotidien
au laboratoire**

- ◆ **30 problèmes**
- ◆ **Des corrigés détaillés**
- ◆ **Un formulaire complet**

Master
Capes
Agrégation

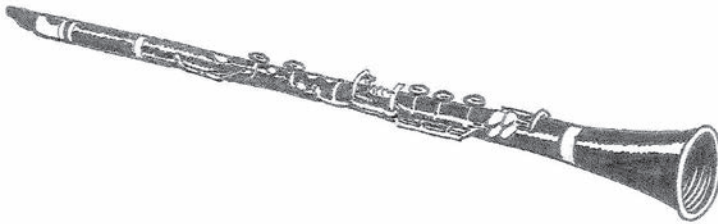
DUNOD

ÉNONCÉS COURTS DES PROBLÈMES

1

1 LA CLARINETTE

Certains instruments à vent comme la clarinette ont des sections non uniformes, qui peuvent croître exponentiellement par exemple. Comment s'y propage le son ? Quelle est la relation de dispersion ? Quelles fréquences sont transmises ?



DÉTAILS PAGE 27.

2 LE POULS

Le pouls est une surpression qui se propage dans nos artères. Comment décrire ce phénomène ? Comment se propage la pression ? En déduire la vitesse du pouls ; vérifier que l'ordre de grandeur est correct.

DÉTAILS PAGE 35.

3 TUYÈRE SUPERSONIQUE

Dans une fusée, on brûle des gaz et on cherche ensuite à les éjecter avec la vitesse la plus grande possible. Pour cela on joue sur la forme de la tuyère (le « pot d'échappement ») de la fusée. Montrer que la meilleure forme est nécessairement une tuyère avec un col, qui converge d'abord puis diverge ensuite.

DÉTAILS PAGE 40.

4 RAYONNEMENT THERMIQUE

Le rayonnement thermique est le rayonnement produit par un corps à l'équilibre thermique à une température donnée. On le caractérise par son énergie libre, que l'on supposera donnée par l'expression $F = -aVT^4$, où T est sa température, V le volume de la région où se propage le rayonnement, et a est un nombre constant.

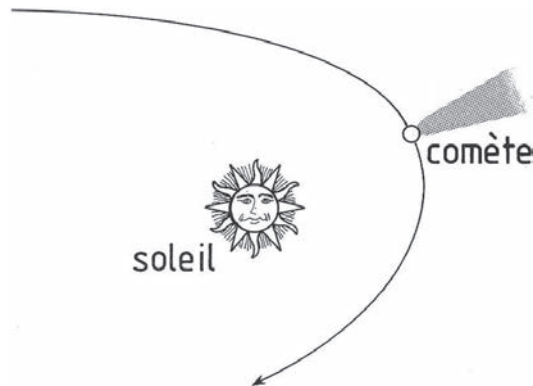
Étudier ce système d'un point de vue thermodynamique. Discuter en particulier l'équation d'état et la détente de ce rayonnement.

Peut-on estimer la température de la Terre à partir de la forme de cette énergie ?

DÉTAILS PAGE 46.

5 QUEUE DES COMÈTES

Estimer la taille maximale des poussières neutres dans les queues des comètes en tenant compte de la pression de radiation et de l'attraction gravitationnelle du Soleil.



DÉTAILS PAGE 54.

6 POLARISABILITÉ

Comment définir la polarisabilité d'un atome ? Comment la calculer ? Comment cette grandeur dépend-elle de la fréquence du champ électrique imposé ?

DÉTAILS PAGE 60.

7 ATOMES ET PHOTONS

Décrire et interpréter les forces exercées par un laser sur un atome. Peut-on négliger l'effet du champ magnétique ?

DÉTAILS PAGE 66.

Les problèmes de physique qui se posent dans la vie quotidienne, et *a fortiori* dans les laboratoires, ne figurent pas nécessairement dans les catalogues. Les énoncés courts qui précèdent en sont une illustration. Nous proposons ici une première piste de réflexion, avant la découverte de l'énoncé détaillé et de sa solution.

Le chapitre est divisé en deux parties. Tout d'abord, les lecteurs trouveront une présentation des grandes étapes possibles de la résolution d'un problème. Ensuite vient une liste de méthodes et d'outils de modélisation fréquemment employés, qui renvoie aux numéros des problèmes où ils sont abordés.

1 COMMENT ABORDER UN PROBLÈME NOUVEAU ?

Quand on aborde un problème nouveau, il est important de ne pas se lancer dans les calculs trop rapidement. En effet, une réflexion préalable permet souvent de comprendre l'essence du problème. Elle facilite ensuite la mise en place d'un modèle optimal, adapté au degré de compréhension que l'on souhaite obtenir. À ce stade seulement, les calculs sont envisageables. Nous allons tenter de détailler ces grandes étapes de la résolution d'un problème.

Manipuler

Lorsque cela est possible, il est très instructif de manipuler physiquement l'objet étudié : essayez de construire une arche avec des morceaux de sucre ou des dominos (problème 21), lancez des coquilles de pistache (problème 19), observez la formation des bulles dans une flûte de champagne (problème 11). L'observation permet de se construire une intuition du phénomène, ce qui va vous guider dans la modélisation : trouvez les différentes quantités physiques qui entrent en jeu et comment elles sont reliées entre elles, faites-les varier expérimentalement, estimez leurs ordres de grandeur, déterminez lesquelles sont négligeables. Pour ne pas vous mâcher ce travail essentiel, les énoncés courts n'entrent volontairement pas dans le détail de la modélisation.

Cette étape est également possible si vous n'avez pas les objets sous les yeux, à l'aide de schémas par exemple : qu'est-ce que le sillage d'un avion (problème 26) ? Comment évolue un champ magnétique tournant (problème 30) ? L'expérience quotidienne permet également de se faire une idée du phénomène : comment se comporte un conducteur lorsqu'il conduit sa voiture (problème 27), un cycliste lorsqu'il grimpe

un col (problème 17) ? Enfin, s'il s'agit d'objets plus compliqués, on peut faire appel à son intuition physique : qu'est-ce que la queue d'une comète (problème 5) ? Comment évolue un électron dans un champ électrique (problèmes 15 et 16) ?

Analyser

L'objectif de cette étape est de modéliser de façon optimale le phénomène étudié. Il s'agit donc d'abord de cibler la problématique essentielle, puis de faire des hypothèses pertinentes permettant de faciliter sa résolution.

En premier lieu, déterminez quels phénomènes interviennent, et à quels domaines de la physique ils appartiennent. Est-on en optique géométrique ou en optique physique ? Est-ce de la mécanique ou de la thermodynamique ? Plusieurs domaines peuvent parfois se recouper : certains exercices couplent par exemple l'électromagnétisme, la mécanique, et l'optique géométrique (problème 10).

Il convient ensuite de définir la problématique, c'est-à-dire les questions auxquelles on souhaite répondre en pratique : il s'agit d'une reformulation de la question initiale. Demandez-vous pour cela quelles lois physiques interviennent. Essayez ensuite de reconnaître les points qui semblent difficiles ou faciles à résoudre, les questions intéressantes ou triviales. Séparez votre système en sous-systèmes que vous savez analyser séparément. Décomposez le phénomène en étapes successives distinctes.

À ce stade, il faut avoir défini précisément le système, les paramètres, les variables, et les hypothèses. N'hésitez pas à refaire vos schémas. Posez les équations et tentez de les résoudre. Tâtonnez. Si vous constatez que votre intuition et vos équations sont en désaccord, pas d'inquiétude, c'est toujours signe qu'il y a quelque chose à apprendre : soit une erreur dans l'équation, soit de la physique non triviale. Revenez sur le modèle, changez les hypothèses.

Calculer

Estimez des valeurs numériques, même approximatives, tout au long de votre travail. Vous avez besoin d'ordres de grandeur pour comprendre les rôles respectifs de chacune des différentes contributions physiques (problème 2). Il ne faut pas se contenter des expressions littérales : prenez votre temps sur les applications numériques, qui sont essentielles. De plus, il est important d'évaluer les incertitudes sur les résultats obtenus.

N'hésitez pas à écrire toutes les opérations que vous faites, ligne par ligne, en ne faisant qu'une opération à la fois si nécessaire. Évitez les calculs de tête, que vous ne pourrez ni relire ni modifier.

Enfin, tracez toutes les courbes que vous jugerez utiles. Choisissez les soigneusement : que cherchez-vous à montrer ? Quelle quantité faut-il tracer en abscisse et en ordonnée, sur quel domaine de variation ?

Vérifier

Pensez systématiquement à vérifier vos résultats :

- L'homogénéité : toute équation doit être homogène. Si vous écrivez un signe « plus », « moins », « égal », « inférieur » ou « négligeable », les termes à droite et à gauche de ce signe doivent avoir la même dimension, c'est-à-dire s'exprimer dans la même unité.
- Les signes : vérifiez que vous n'avez pas écrit d'absurdité évidente.
- Les comportements : pour une équation par exemple, vérifiez que chaque paramètre joue le bon rôle. Pour une solution, vérifiez que chaque paramètre influe dans le bon sens (par exemple le comportement limite aux temps longs, l'influence de la masse...). On peut souvent savoir à l'avance quel comportement on attend.
- Les ordres de grandeur : ce sont eux qui vous évitent d'annoncer des résultats absurdes et vous ramènent à la réalité.
- Les résultats numériques : vérifiez que toutes les unités sont cohérentes. Ne mélangez pas des mètres et des millimètres par exemple. Utilisez de préférence les unités du Système International (voir Annexe B).
- Les hypothèses : ne sont-elles pas contredites par vos résultats numériques ?

Si vous avez manifestement fait une erreur, revenez sur le détail des calculs et la modélisation. Enfin, comparez vos résultats (ordres de grandeur, comportements) à des résultats effectivement observés, puis analysez et commentez les différences éventuelles.

2 QUELQUES MÉTHODES GÉNÉRALES

Après les grandes étapes de la résolution d'un problème, voici le détail de quelques outils et méthodes essentiels, ainsi que les références aux problèmes où ils sont employés.

Ordres de grandeur

Les calculs d'ordres de grandeur sont à la base des raisonnements qualitatifs en physique. Il est donc indispensable de savoir les évaluer. En général, on essaie de se ramener à l'estimation de grandeurs connues. Par exemple, au problème 17, on cherche la puissance que peut fournir le corps humain durant un effort physique. On doit pour cela évaluer un effort typique : en combien de temps monte-t-on un étage par exemple ? D'autres grandeurs plus communes sont parfois difficiles à évaluer directement : la masse par exemple, pour laquelle il est préférable d'évaluer les dimensions

et la densité. De même pour le rayon de courbure, on pourra chercher l'endroit où les normales à la courbe se croisent.

Enfin, quand on évalue un ordre de grandeur, on prend soin de ne pas mettre de chiffres significatifs. Une évaluation en puissance de dix est souvent suffisante.

MÉTHODE UTILISÉE DANS LA MAJORITÉ DES PROBLÈMES.

Analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle est complémentaire aux raisonnements en ordre de grandeur. Elle permet de vérifier d'une part la validité d'un résultat : sa dimension est-elle correcte ? D'autre part, elle permet d'estimer quelles grandeurs sont susceptibles de gouverner l'état d'un système. En effet, en listant les p paramètres qui interviennent *a priori* dans le phénomène, et les u unités indépendantes qu'ils font intervenir, on connaît le nombre n de paramètres indépendants qui gouvernent le phénomène : $n = p - u$. De plus, on peut se ramener à l'étude de n paramètres indépendants sans dimension. On voit donc l'intérêt de cette approche. Toutefois, nous n'avons pas détaillé celle-ci dans les résolutions de problèmes proposés. Nous nous sommes en général contentés d'obtenir des grandeurs caractéristiques intéressantes à partir des paramètres du problème.

Ainsi, on essaiera toujours d'étudier les dimensions des paramètres et de chercher à les simplifier, surtout si elles font intervenir peu d'unités indépendantes. Par exemple, au problème 26, il est possible d'obtenir une relation de dispersion avec les seuls paramètres du problème, sans poser d'équation. Toutefois, l'analyse dimensionnelle ne se substitue pas aux calculs ; elle permet surtout de les justifier.

MÉTHODE UTILISÉE AUX PROBLÈMES 4, 10, 20, 26.

Utilisation des analogies

Certains phénomènes physiques distincts font parfois intervenir des équations similaires ou présentent des effets voisins. Il est par conséquent fructueux d'utiliser les analogies avec des systèmes connus pour résoudre des problèmes difficiles. L'avantage d'une telle démarche est notamment de pouvoir utiliser le formalisme d'un domaine *a priori* très éloigné du problème considéré. On modélise par exemple les perturbations du trafic routier par des ondes de densité (problème 27), ce qui nous permet d'accéder alors au formalisme des ondes : relation de dispersion, vitesse de phase, vitesse de groupe. De la même façon, on utilise le concept de sillage pour des ondes acoustiques pour nous aider à définir le sillage des ondes de surface (problème 26), tout en analysant les différences dans leurs comportements.

MÉTHODE UTILISÉE AUX PROBLÈMES 2, 13, 19, 26, 27.

ÉNONCÉS DÉTAILLÉS ET SOLUTIONS DES PROBLÈMES

3

1 LA CLARINETTE

Énoncé détaillé

On cherche dans cet exercice à étudier un instrument à vent de section non uniforme. Pour simplifier l'étude, on se restreindra à des sections variant de façon exponentielle. Nous serons amenés en particulier à étudier la propagation du son dans une telle géométrie.

1. Afin d'établir l'équation de propagation d'une onde acoustique dans un fluide initialement au repos dans le tube, on cherche à exprimer les bilans de masse et de quantité de mouvement dans l'écoulement.

- 1.a) À quelle condition sur la section peut-on se ramener à un problème unidimensionnel ? Sur quel système va-t-on préférentiellement effectuer des bilans ?
- 1.b) Donner l'équation de conservation de la masse.
- 1.c) On suppose l'écoulement parfait. Exprimer l'équation de bilan de quantité de mouvement le long de l'axe du tube.

2. On s'intéresse ensuite à la propagation d'une faible perturbation. On cherche donc à développer ces équations linéairement.

- 2.a) Supposons que la perturbation créée par le passage de l'onde, par rapport à l'état du fluide au repos, reste faible. Quelles conditions sur la pression, la densité et la vitesse cela impose-t-il ? Faire un développement au premier ordre des deux bilans obtenus.
- 2.b) Comment relier la variation de la densité avec la variation de la pression ?
- 2.c) Obtenir l'équation d'onde pour la pression et la vitesse. Évaluer la célérité des ondes.

3. On considère une onde plane se propageant dans le tube.

- 3.a) En décomposant cette onde en modes sinusoïdaux, trouver la relation de dispersion.
- 3.b) Discuter quelles fréquences se propagent, évaluer les ordres de grandeur pertinents. Montrer qu'il existe une fréquence de coupure. Que se passe-t-il à son voisinage ?

- 3.c) La pression à l'intérieur de ce type d'instrument est de l'ordre de 160 dB dans des conditions normales de jeu. Que dire de cette valeur ? Vérifier les hypothèses. La viscosité joue-t-elle un rôle important ?

Solution

1. On cherche dans cet exercice à étudier un instrument à vent de section non uniforme. Ce problème traite d'acoustique et d'écoulements compressibles, mettant en jeu des bilans de masse et de quantité de mouvement. C'est un problème compliqué, dont nous allons tenter de comprendre l'essentiel à l'aide d'un modèle simple.

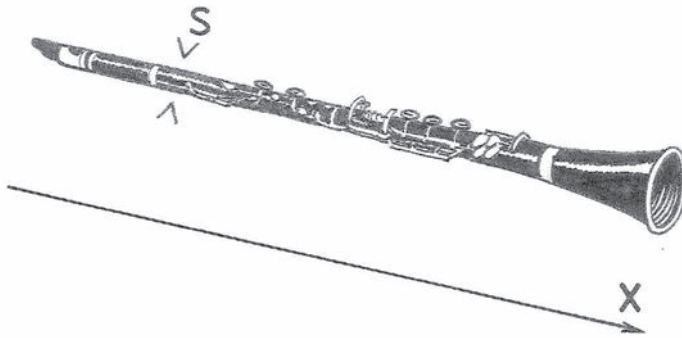


Figure 1.1 - Une clarinette.

1.a) On peut se ramener à un problème à une dimension (toutes les quantités ne dépendent que de x , les vitesses sont parallèles à x) si le tuyau possède une section S qui varie lentement à l'échelle d'une longueur d'onde : $|S(x + \lambda) - S(x)| \ll S(x)$. C'est donc une condition qui dépend de la longueur d'onde et donc de la fréquence de l'onde que l'on étudie. Cette condition est réalisée pour certains instruments à vent (trompette, clarinette, trombone, vuvuzela...), ou pour des pavillons acoustiques (gramophones, pavillons auditifs...), pour lesquels typiquement λ et \sqrt{S} sont centimétriques, et la longueur sur laquelle la surface varie notablement est métrique (cf figure 1.1). On peut donc dans cette étude s'intéresser uniquement aux modes unidimensionnels.

Considérons ensuite pour simplifier un instrument constitué d'un tube d'axe x , de section $S(x) = S_0 e^{\alpha x}$, où α est une constante caractéristique de l'instrument. Cette constante représente l'inverse de la longueur de variation de S , qui est donc de l'ordre du mètre typiquement, alors que λ est centimétrique. On va alors choisir pour système

à étudier une tranche d'air située entre les abscisses x et $x + dx$. Le référentiel dans lequel on se place est celui lié au tuyau.

1.b) Contrairement à la mécanique du solide, on préférera, pour l'étude d'un écoulement, faire des bilans sur un système ouvert. Pour un tel système, la conservation de la masse s'écrit :

$$\delta(\text{masse}) = (\text{entrant}) - (\text{sortant}).$$

On note $v(x, t)$ la vitesse du fluide selon l'axe x et $\rho(x, t)$ sa densité. Pour la tranche considérée, pendant un temps dt , nous avons donc :

$$(\rho S dx)_{t+dt} - (\rho S dx)_t = (S \rho v)_x dt - (S \rho v)_{x+dx} dt,$$

c'est-à-dire l'équation de conservation de la masse pour un écoulement compressible :

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho S v)}{\partial x} = 0. \quad (1.1)$$

1.c) Pour un système ouvert, le bilan de quantité de mouvement s'écrit :

$$\delta(m\vec{v}) = (\text{entrant}) - (\text{sortant}) + \Sigma \vec{F} \delta t. \quad (1.2)$$

Ici, le terme à écrire soigneusement est le terme de forces. On fait ce bilan selon l'axe x , et donc on ne regarde que les forces selon x . Les forces qui s'appliquent au système sont uniquement les forces de pression. Elles s'appliquent sur toute la surface du système : en x , en $x + dx$, mais également sur les parois latérales du tube :

$$\Sigma \vec{F} = (pS)_x - (pS)_{x+dx} + p dS, \quad (1.3)$$

où $dS = S_{x+dx} - S_x$ est la projection selon le plan perpendiculaire au tube de la surface latérale.

Ainsi, on peut écrire lors du bilan la variation interne de la quantité de mouvement selon x du système ouvert :

$$\delta(mv) = (\rho S v dx)_{t+dt} - (\rho S v dx)_t. \quad (1.4)$$

La variation de quantité de mouvement ($dm v$, où $dm = \rho S v dt$) due aux flux entrant et sortant s'écrit quant à elle :

$$(\text{entrant}) - (\text{sortant}) = (S \rho v^2)_x dt - (S \rho v^2)_{x+dx} dt. \quad (1.5)$$

Finalement, le bilan (1.2) s'écrit, grâce aux équations (1.3, 1.4 et 1.5) :

$$\frac{\partial(\rho S v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho S v^2)}{\partial x} + S \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (1.6)$$

Chapitre 3 • Énoncés détaillés et solutions des problèmes

2.a) Au repos, on a une pression p_0 , une vitesse nulle, et une densité ρ_0 . En présence de la perturbation, on note la pression, la vitesse et la densité respectivement :

$$\begin{aligned}p(x, t) &= p_0 + p_1(x, t), \\v(x, t) &= v_1(x, t), \\\rho(x, t) &= \rho_0 + \rho_1(x, t).\end{aligned}$$

On suppose que la perturbation est petite devant l'état au repos, ce qui veut dire à ce stade que $\rho_1 \ll \rho_0$ et $p_1 \ll p_0$. Ainsi on peut faire un développement au premier ordre du bilan de masse (1.1) :

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \alpha \rho_0 v_1 = 0, \quad (1.7)$$

le dernier terme $\alpha \rho_0 v_1$ étant une correction d'ordre plus faible car S varie sur une échelle plus grande que λ , la longueur d'onde, qui est la dimension caractéristique de l'écoulement. Les deux premiers termes sont donc du même ordre, et pour une fréquence f , on trouve que v_1 est un premier ordre également :

$$\frac{v_1}{\lambda f} \approx \frac{\rho_1}{\rho_0}. \quad (1.8)$$

Le bilan de quantité de mouvement (1.6) devient alors :

$$\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0. \quad (1.9)$$

2.b) À ce stade de la résolution, nous avons deux équations bilan, et trois variables indéterminées ρ , p , et v . Il nous manque donc une équation. C'est la thermodynamique de l'évolution du fluide qui nous donne une relation entre la densité et la pression, via la compressibilité : lorsque la pression augmente, la densité augmente. Pour exprimer cette grandeur, il faut faire une hypothèse sur l'évolution du système. Si elle est assez rapide de sorte que la thermalisation n'a pas eu le temps d'opérer, l'évolution est adiabatique. Si de plus l'évolution du fluide supposé parfait est réversible, l'évolution est alors isentropique. Par conséquent, on utilisera une compressibilité à entropie constante :

$$\chi_S = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_S.$$

Notons brièvement qu'à ce stade, rien ne nous empêchait de choisir une évolution (et donc un coefficient de compressibilité) isotherme. Mais l'on verra à la fin de l'exercice que les ordres de grandeur obtenus dans ce cas sont en moins bon accord avec l'expérience.

Ainsi, le développement linéaire nous donne :

$$\chi_S = \frac{1}{\rho_0} \frac{\rho - \rho_0}{p - p_0} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\rho_1}{p_1}, \quad (1.10)$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = \chi_S \rho_0 \frac{\partial p_1}{\partial t}, \quad (1.11)$$

ce qui veut dire notamment que ρ_1/ρ_0 est d'ordre $p_1\chi_S$.

Une autre démonstration plus complète consisterait à écrire qu'à masse et entropie constante, l'entropie massique $s(\rho, p)$ est constante le long de l'écoulement. Il nous faut donc exprimer la dérivée totale de l'entropie, prenant en compte son transport convectif :

$$\frac{ds}{dt} = 0 = \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_\rho \frac{dp}{dt} + \left(\frac{\partial s}{\partial \rho} \right)_p \frac{d\rho}{dt},$$

De plus, on a la relation mathématique entre les trois grandeurs intensives (voir annexe D, équation (F.1)) :

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_\rho \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_p = -1,$$

ce qui nous donne :

$$\frac{d\rho}{dt} = \rho \chi_S \frac{dp}{dt},$$

soit, en linéarisant la dérivée totale (on néglige le terme convectif si $v \ll \lambda f$) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho \chi_S \frac{\partial p}{\partial t},$$

ce qui nous redonne, en ne gardant que l'ordre un, l'équation (1.11).

2.c) En rassemblant les équations (1.7, 1.9 et 1.11), on obtient l'équation de propagation de la surpression :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial p}{\partial x} - c^{-2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \quad (1.12)$$

où l'on a introduit la vitesse du son, ou célérité, dans l'air libre :

$$c = (\rho_0 \chi_S)^{-1/2} = \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s \right]^{-1/2}. \quad (1.13)$$

Nous reconnaissons ici l'équation de propagation des ondes acoustiques, corrigée d'un terme lié à la section variable du tuyau. Le problème est ainsi écrit sous une forme linéaire, au premier ordre en perturbation.

Chapitre 3 • Énoncés détaillés et solutions des problèmes

Pour la vitesse, c'est la même équation :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial v}{\partial x} - c^{-2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \quad (1.14)$$

Afin d'évaluer la célérité, il nous faut estimer χ_S . Pour un gaz parfait, on peut montrer, grâce à la loi de Laplace $PV^\gamma = cste$ (valable si $\gamma = c_p/c_v$, le rapport des capacités calorifiques à pression et à volume constants, est supposé constant, c'est-à-dire indépendant de la température), que $\chi_S = 1/\gamma P$. De façon générale pour les gaz, χ est de l'ordre de $1/P$, donc à pression atmosphérique $\chi \approx 10^{-5} \text{ Pa}^{-1}$. Ici, nous pouvons faire le calcul exact, en prenant pour un gaz parfait diatomique à température usuelle $\gamma = 7/5$: à 298 K, pour l'air de masse molaire $29 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$, on trouve alors $c = 347 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, en très bon accord avec la valeur expérimentale (voir annexe A). En prenant un coefficient de compressibilité isotherme plutôt qu'isentropique, on aurait trouvé, à la même température, $c = 293 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Cette valeur est en moins bon accord avec l'expérience, et confirme notre hypothèse d'une évolution thermodynamique suffisamment rapide pour être isentropique.

3.a) On s'intéresse aux modes harmoniques solutions de l'équation (1.12). On choisit par exemple de travailler sur la pression :

$$p = A e^{i(kx - \omega t)}.$$

Si on choisit de travailler avec la vitesse, le raisonnement est identique. On obtient donc l'équation du second degré :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + i\alpha k, \quad (1.15)$$

dont les solutions sont données par :

$$k = \frac{i\alpha}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-\alpha^2 + \frac{4\omega^2}{c^2}}, \quad (1.16)$$

ce qui constitue la relation de dispersion. On peut vérifier que si $\alpha = 0$, on retrouve $k = \omega/c$, la relation de dispersion du son dans l'air libre. La présence du tuyau crée de la dispersion (la relation de dispersion n'est plus linéaire) et de l'amortissement (k est complexe).

3.b) Avec un instrument à vent, ce que l'on impose c'est la fréquence du son (vibration des lèvres pour les cuivres, de l'anche pour les bois), donc la pulsation ω est réelle. Il y a propagation si k a une partie réelle, donc si $2\omega > \alpha c$. Seules passent donc les fréquences supérieures à la fréquence de coupure $f_c = \alpha c/4\pi$. Pour une clarinette, on peut évaluer α à approximativement 5 m^{-1} en considérant que la section

double de rayon sur une vingtaine de centimètres, ce qui nous donne $f_c \approx 25$ Hz. Pour une trompette, le pavillon s'écarte beaucoup plus rapidement et double de rayon en approximativement 5 cm, on trouve donc une fréquence quatre fois plus grande, de l'ordre de 100 Hz.

Ici k a une partie imaginaire, il y a donc atténuation spatiale même sans tenir compte de la viscosité. Cette atténuation se fait sur une échelle comparable à la longueur typique de variation de la section de l'instrument. Quand f se rapproche de f_c , la distance d'amortissement devient comparable à la longueur d'onde, et la propagation de l'onde devient impossible.

3.c) 160 dB à l'intérieur de l'instrument correspond à une pression efficace de 2000 Pa (voir annexe B). Cette valeur est très grande et de plus d'un ordre de grandeur au-dessus du seuil de douleur de l'oreille humaine (130 dB). Toutefois, même à cette intensité, la surpression reste très petite devant la pression atmosphérique. Et on rappelle que l'on a à l'aide des équations (1.8) et (1.10) :

$$\frac{p_1}{p_0} \approx \frac{\rho_1}{\rho_0} \approx \frac{v}{c} \approx 2 \times 10^{-2}.$$

Les hypothèses de l'approximation acoustique linéaire $p_1 \ll p_0$, $\rho_1 \ll \rho_0$, et $v \ll c$, sont donc vérifiées.

Pour étudier l'influence de la viscosité, on regarde le rapport des forces visqueuses avec l'inertie. En ordre de grandeur, le rapport de ces force volumiques vaut (on évalue l'inverse du nombre de Reynolds) :

$$\frac{|\eta \Delta v|}{|\rho \partial v / \partial t|} \approx \frac{\eta v_M / \lambda^2}{\rho v_M f},$$

car la vitesse, d'ordre v_M , varie sur une longueur d'onde λ , avec une fréquence $f = c/\lambda$. Ce rapport vaut finalement, en prenant la viscosité cinématique $\nu = \eta/\rho \approx 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ pour l'air, et une fréquence de 100 Hz :

$$\frac{\nu f}{c^2} \approx \frac{10^{-5} \cdot 100}{10^5} = 10^{-8} \ll 1.$$

Il est donc correct d'avoir négligé l'effet de la viscosité.

Ouvertures

Nous venons d'étudier la propagation du son dans un instrument dont la section est à profil exponentiel. En réalité, dans de nombreux cas dont celui de la trompette, seul le pavillon présente ce type de profil, le reste du tube possédant une section constante. Prolonger cette étude en considérant qu'un instrument à vent est en fait un oscillateur, siège de modes propres, excité par le musicien, le pavillon assurant la transmission entre l'oscillateur et l'air libre. Montrer qu'il a un rôle d'adaptation d'impédance entre l'instrument et l'air.

On pourra également discuter de l'analogie avec un laser.

POUR S'ENTRAÎNER

[C1] Les instruments à vent. *Concours d'admission X-ESPCI, Filière PC, 2ème composition de Physique, 2001.*

François Graner ■ Robin Kaiser
Antonin Marchand ■ Thomas Salez

Petits problèmes de physique

Du quotidien au laboratoire

Cet ouvrage s'adresse aux étudiants en master ou préparant les **concours des Grandes écoles** scientifiques, **l'Agrégation** ou le **Capes de physique**.

L'objectif principal de ce livre est d'**apprendre à modéliser et à résoudre de manière autonome** un problème nouveau.

Saurez-vous déterminer de quel côté tombe une tartine beurrée ? et une pistache ? Comment piéger un électron ? refroidir des atomes ? Queue de comète, ballons de baudruche, vélo en montagne, ondes gravitationnelles et IRM nucléaire... De la physique du quotidien à la recherche de pointe, toute une série de problèmes de physique sont rassemblés ici, et résolus progressivement à partir des connaissances classiques du premier cycle universitaire.

Contenu :

- des **conseils** et des **méthodes** détaillées ;
- **30 problèmes**, pour lesquels vous trouverez :
 - un énoncé **court**, un énoncé **détaillé**,
 - une **solution complète**,
 - des **encadrés thématiques** ou historiques, des ouvertures et références à des articles scientifiques ou généraux ;
- un **formulaire** complet ; un **index thématique** ; un **index bibliographique**.

Dans la même collection :



9 782100 545223

699524

ISBN 978-2-10-054522-3



François Graner

est directeur de recherche au CNRS, à l'Institut Curie de Paris.

Robin Kaiser

est directeur de recherche au CNRS à l'Université de Nice-Sophia Antipolis.

Antonin Marchand

est professeur agrégé à l'École normale supérieure.

Thomas Salez

est professeur agrégé à l'École normale supérieure.



DUNOD

www.dunod.com