

MATHS

MPSI-MP2I

Michaël Bages | Pierre Bernard
Christine Lagrange | Jérôme Levie | Mathieu Mansuy
Julien Freslon | Marie Hézard | Jérôme Poineau | Amaury Freslon

MATHS

MPSI-MP2I

**EXERCICES
INCONTOURNABLES**

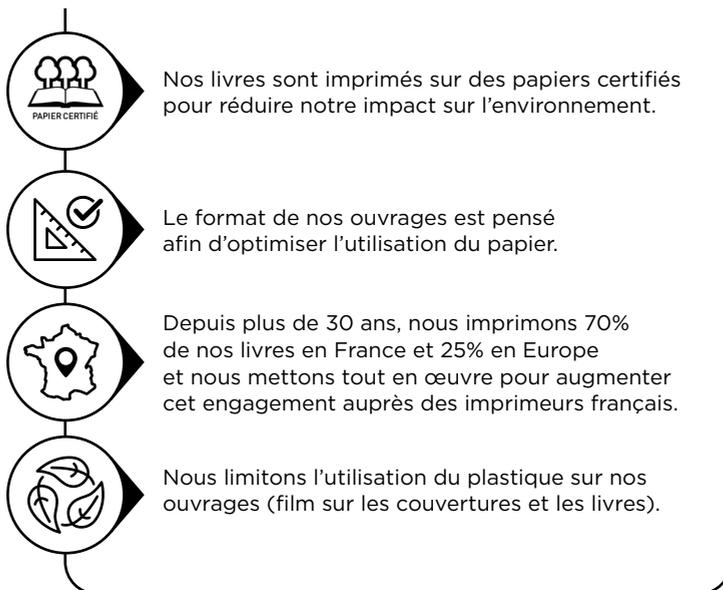
5^e édition

DUNOD

l'intelligence

Couverture : création Hokus Pokus, adaptation Studio Dunod

NOUS NOUS ENGAGEONS EN FAVEUR DE L'ENVIRONNEMENT :



© Dunod, 2023
11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-082884-5

Table des matières

1^{er} semestre — Approfondissements de Terminale

1 Calcul algébrique	17
1.1 : Raisonnements pour la résolution d'équations	17
1.2 : Calcul de produits par factorielles	20
1.3 : Calcul de somme par décomposition de fraction	23
1.4 : Sommes doubles	25
1.5 : Triangle de Pascal généralisé	28
1.6 : Sommes binomiales de référence	31
1.7 : Sommes binomiales dérivées	34
2 Complexes et trigonométrie	39
2.1 : Équation trigonométrique par analyse-synthèse	39
2.2 : Systèmes non linéaires	40
2.3 : Calcul de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$	42
2.4 : Théorème de Napoléon	44
2.5 : Argument et arc tangente	47
2.6 : Sommes de cosinus	49
2.7 : Linéarisation, formule de Moivre	53
2.8 : Méthode de Cardan	55
3 Calculs en analyse	61
3.1 : Calcul de dérivées	61
3.2 : Étude de fonction	63
3.3 : Calcul de limite par encadrement	67
3.4 : Fonctions circulaires réciproques	70
3.5 : Résolution d'une équation trigonométrique	74
3.6 : Différence d'arctangentes	76
3.7 : Réciproques des fonctions hyperboliques	78

4 Calcul de primitives, équations différentielles	83
4.1 : Intégration par parties	83
4.2 : Changement de variable $u = e^t$	85
4.3 : Changement de variable $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$	87
4.4 : Ordre 1 et variation de la constante	89
4.5 : Équation fonctionnelle de l'exponentielle	92
4.6 : Ordre 2 et second membre exponentiel	93
4.7 : Ordre 2 et racine double	96
4.8 : Ordre 2 et second membre trigonométrique	97
5 Arithmétique	101
5.1 : Congruences et récurrences	101
5.2 : Nombres premiers	102
5.3 : Divisibilité et puissances	103
5.4 : Périodicité modulaire de la suite des puissances	104
5.5 : Équation diophantienne	106
5.6 : Équation diophantienne et congruences	109
5.7 : Autour du petit théorème de Fermat	111
5.8 : Résolution d'un système de congruences	114
5.9 : Autour du produit des diviseurs	116
5.10 : Des sommes de chiffres de sommes de chiffres...	117
5.11 : Une application des p -valuations	119

1^{er} semestre — Les bases des mathématiques

6 Structures algébriques	125
6.1 : Sous-groupes de \mathbb{Z}	125
6.2 : Groupes d'exposant 2	128
6.3 : Commutant d'une partie d'un anneau	131
6.4 : Automorphismes de corps	133
7 Réels, suites	137
7.1 : Partie entière	137
7.2 : Calcul de bornes (par divergence, par densité)	138
7.3 : Calcul de bornes (par maximum, par limite de suite)	140
7.4 : Existence d'un point fixe par borne supérieure	142
7.5 : Étude d'une suite définie par une somme	144
7.6 : Irrationalité de e	149
7.7 : Étude d'une suite définie par récurrence	152
7.8 : Divergence de $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$	156
7.9 : Exemple de suites récurrentes linéaires	158
7.10 : Étude d'une suite implicite	162

8 Matrices et Systèmes	165
8.1 : Modélisation par système linéaire	165
8.2 : Système linéaire à paramètre	167
8.3 : Systèmes linéaires de grande taille	170
8.4 : Calcul explicite de l'inverse d'une matrice 3×3	171
8.5 : Puissances de matrices d'ordre 2	173
8.6 : Suites liées à une décomposition matricielle d'ordre 2	175
8.7 : Inversibilité d'une matrice d'ordre n	179
8.8 : Puissances de matrices particulières	181
8.9 : Puissances d'une matrice par la formule du binôme	184
8.10 : Puissances d'une matrice par diagonalisation	186
8.11 : Puissances d'une matrice par combinaisons linéaires	188
9 Limite, continuité, dérivabilité	191
9.1 : Calcul de limites	191
9.2 : Fonction continue ayant des limites finies à l'infini	194
9.3 : Trois théorèmes de point fixe	196
9.4 : Équation fonctionnelle	201
9.5 : Fonction continue injective	203
9.6 : Étude locale de dérivabilité	205
9.7 : Calcul d'une limite par accroissements finis	206
9.8 : Suite récurrente	207
9.9 : $f(f(x)) = ax + b$	210
10 Polynômes	215
10.1 : Racine et division euclidienne de polynômes	215
10.2 : Relations coefficients-racines	216
10.3 : Détermination d'un polynôme par divisibilités	220
10.4 : Polynômes de Legendre	222
10.5 : Polynômes de Tchebychev	224
10.6 : Suite de Polynômes	230
10.7 : Calcul de sommes de fractions rationnelles	236
10.8 : Décomposition de P'/P	241
11 Fonctions de classe \mathcal{C}^k, convexité	245
11.1 : Formule de Leibniz	245
11.2 : Dérivées successives	246
11.3 : Égalité de Taylor-Lagrange	250
11.4 : Fonctions pathologiques	253
11.5 : Prolongement	255
11.6 : Inégalités de convexité	258
11.7 : Asymptote à une fonction convexe	262

2nd semestre — Algèbre linéaire et bilinéaire

12	Espaces vectoriels, applications linéaires	269
12.1	Fonctions paires et impaires	269
12.2	Combinaison linéaire	271
12.3	Famille libre de fonctions	275
12.4	Itérées d'un endomorphisme	277
12.5	Images et noyaux I	280
12.6	Endomorphismes de l'espace des polynômes	282
12.7	Somme de projecteurs	285
13	Dimension finie et matrices	289
13.1	Suites récurrentes linéaires d'ordre 3	289
13.2	Images et noyaux II	293
13.3	Noyaux et images itérés	295
13.4	Inégalités sur le rang	298
13.5	Indice de nilpotence	301
13.6	Hyperplan	304
13.7	Réduction d'un endomorphisme	306
13.8	Projecteur et symétrie	307
13.9	Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$	311
13.10	Matrices équivalentes	313
14	Déterminants	317
14.1	Calcul de déterminant par récurrence d'ordre 1	317
14.2	Déterminant par récurrence linéaire d'ordre 2	319
14.3	Déterminant d'un endomorphisme	323
14.4	Calcul par somme de colonnes	325
14.5	Déterminant d'une somme	327
14.6	Déterminant de Hurwitz	328
14.7	Déterminant d'une famille de vecteurs	330
14.8	Inversibilité de matrices à coefficients entiers	332
14.9	Multilinéarité	334
15	Espaces euclidiens	339
15.1	Orthonormalisation dans \mathbb{R}^3	339
15.2	Espace euclidien de polynômes	342
15.3	Caractérisation des projecteurs orthogonaux	347
15.4	Espace euclidien de matrices	349
15.5	Matrices orthogonales et décomposition RT	352

2nd semestre — Analyse

16 Analyse asymptotique	359
16.1 : Calculs de développements limités	359
16.2 : Développement limité d'un quotient	364
16.3 : Développement limité d'une fonction réciproque	366
16.4 : Formes indéterminées	368
16.5 : Recherche d'asymptote	372
16.6 : Prolongement \mathcal{C}^1	374
16.7 : Fonctions pathologiques - le retour	377
16.8 : Développement asymptotique d'une suite	380
16.9 : Développement asymptotique d'une suite implicite	382
17 Intégration	387
17.1 : Étude d'une fonction définie par une intégrale	387
17.2 : Changements de variable usuels : $u = \cos(t)$	390
17.3 : Sommes de Riemann	392
17.4 : Intégrales de Wallis	395
17.5 : Lemme de Riemann-Lebesgue	398
17.6 : Intégrale de Gauss	401
17.7 : Inégalité de Taylor-Lagrange	406
18 Séries et familles sommables	409
18.1 : Nature et somme de séries	409
18.2 : Nature par comparaison à une série géométrique	414
18.3 : Séries géométriques dérivées	418
18.4 : Natures de séries par équivalents	421
18.5 : Constante d'Euler et série harmonique alternée	425
18.6 : Formule de Stirling	429
18.7 : Séries de Bertrand	432
18.8 : Familles sommables et calcul de sommes	436
19 Fonctions de deux variables	443
19.1 : Ouverts de \mathbb{R}^2	443
19.2 : Étude du caractère \mathcal{C}^1	445
19.3 : Calcul de distance	449
19.4 : Recherche d'extremum	452
19.5 : Équation aux dérivées partielles	454

2nd semestre — Probabilités

20 Entiers et dénombrement	459
20.1 : Constitution de jury	459

20.2 : Formule de Vandermonde	461
20.3 : Coffre-fort	463
20.4 : Choix d'entiers non consécutifs	467
21 Probabilités	473
21.1 : Lancers aléatoires de deux dés	473
21.2 : Saut en hauteur	475
21.3 : Tirage dans une urne choisie aléatoirement	478
22 Variables aléatoires	485
22.1 : Urne remplie aléatoirement	485
22.2 : Valeur d'une action	489
22.3 : Maximum de deux variables aléatoires	491
22.4 : Tirage sans remise dans une urne	494
22.5 : Distribution aléatoire de cartes	499
22.6 : Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev	506
Index	509

Avant-propos

Cet ouvrage s'adresse aux élèves de première année de classes préparatoires scientifiques en filières MPSI et MP2I. Il leur propose de mettre en pratique les notions abordées en cours de mathématiques par le biais d'exercices. Chacun est assorti d'une correction détaillée, dans laquelle l'accent est mis sur la méthode qui mène à la solution. Comme l'indique le titre, l'objectif a été de couvrir, pour l'ensemble des chapitres du programme, non seulement toutes les notions à connaître, mais encore les techniques, astuces essentielles, ainsi que quelques exercices-types, classiques ou de synthèse : en particulier, on progresse, au sein de chaque chapitre, des techniques les plus fondamentales d'application du cours vers des techniques plus avancées pouvant ressembler à des exercices d'oral de concours.

Cette 5^e édition tient compte de toutes les nouveautés et modifications du nouveau programme, valable à partir de l'année 2021-2022. Au-delà d'une mise à jour nécessaire liée au changement de programme, nous avons cherché à améliorer et approfondir l'édition précédente, tout en respectant les principes qui ont fait le succès de cette collection :

- fournir un panel le plus représentatif possible des exercices-types, compétences et notions, sur chaque chapitre ;
- donner, pour chaque exercice, d'une part une rédaction exemplaire conforme aux attendus des épreuves écrites – tout en mettant en relief les canevas susceptibles de servir souvent –, d'autre part une explicitation des démarches heuristiques et déductives sous-jacentes – afin notamment de faciliter l'application des techniques apprises à d'autres exercices.

Nous souhaitons ici remercier les quatre auteurs historiques, sur le travail desquels nous nous sommes fondés pour cette édition : Julien Freslon, Marie Hézard, Jérôme Poineau et Amaury Freslon.

Les auteurs,

Michaël BAGES

Pierre BERNARD

Christine LAGRANGE

Jérôme LEVY

Matthieu MANSUY

Structure de l'ouvrage

Le livre est divisé en vingt-deux chapitres, consacrés chacun à une partie du programme.

Au-delà de la répartition officielle des chapitres en deux semestres, nous avons bien distingué la première période du 1^{er} semestre (*grosso modo* de la rentrée jusqu'aux vacances de la Toussaint), qui consiste en un approfondissement des connaissances de lycée, afin de permettre un passage progressif de la classe de Terminale à l'enseignement supérieur.

La seconde partie du 1^{er} semestre s'attache à revenir de manière la plus rigoureuse possible sur les notions fondatrices des mathématiques sur lesquelles seront construites toutes les connaissances ultérieures.

Pour le 2nd semestre, nous avons opté pour un découpage thématique traditionnel : « Algèbre », « Analyse » puis « Probabilités ».

En ce qui concerne les corrections, nous avons choisi de séparer clairement la réflexion préliminaire, comprenant analyse du problème et tâtonnements, de la rédaction finale, rigoureuse et précise. Cette dernière étape est signalée, dans le texte, par la présence d'un liseré gris sur la gauche et du pictogramme . Insistons sur le fait que nous ne prétendons nullement présenter l'unique cheminement permettant d'aboutir à la solution d'un exercice donné, ni la seule rédaction acceptable. Dans les deux cas, bien des possibilités existent.

Par ailleurs, lorsque nous avons souhaité mettre en lumière un point important, nous l'avons rédigé sur un fond grisé et indiqué par . De même, la présence d'un piège dont il faut se méfier est signalée par .

Partie 1

1^{er} semestre — Approfondissements de Terminale

Calcul algébrique

Exercice 1.1 : Raisonnements pour la résolution d'équations

1. Déterminer les réels x tels que $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$.
2. Déterminer les réels strictement positifs x tels que $x^{(x^x)} = (x^x)^x$.
3. Déterminer les réels x tels que $\sqrt{x(x-3)} = 3x+5$.

Dans la résolution d'équations, comme face à toute expression mathématique comportant des variables, le premier réflexe est de se demander pour quelles valeurs des variables cette expression a un sens – on parlera ici de *domaine de l'équation*. Le mieux est de déterminer ce domaine au début du problème, mais il faudra également se poser la question en fin de résolution, au moment d'écrire l'ensemble des solutions.

1. Nous allons pouvoir raisonner par équivalences pour cette première équation.

► Détermination du domaine de l'équation.



Pour tout x réel, les deux membres de l'équation ont un sens si, et seulement si, les radicandes sont positifs, c'est-à-dire si, et seulement si :

$$x(x-3) \geq 0 \quad \text{et} \quad 3x-5 \geq 0.$$

La première condition est équivalente à $x \leq 0$ ou $x \geq 3$ (un trinôme du second degré est du signe de son coefficient en x^2 à l'extérieur de ses racines et du signe contraire entre les racines), et la deuxième est équivalente à $x \geq \frac{5}{3}$.

Ainsi, l'équation a un sens uniquement pour $x \in [3, +\infty[$.

► Résolution proprement dite de l'équation.

L'idée est de tout élever au carré pour nous ramener à une équation du second degré.



Pour tout $x \in [3, +\infty[$, les deux membres de l'équation étant positifs, et la fonction carré réalisant une bijection de \mathbb{R}_+ vers \mathbb{R}_+ , l'équation est équivalente à l'égalité des carrés

$$x(x-3) = 3x-5,$$

laquelle se réécrit

$$x^2 - 6x + 5 = 0.$$

Les réels x vérifiant cette équation du second degré sont 1 et 5, et, parmi ceux-ci, seul 5 appartient au domaine de l'équation, à savoir : $[3, +\infty[$.



Dans toute rédaction mathématique soignée, il faut veiller à avoir introduit correctement, et au bon moment, chaque objet considéré. On voit ici qu'il n'est pas possible d'introduire précisément la variable x sans avoir effectué préalablement la première étape, l'étude du domaine de l'équation.

► **Conclusion.**

On ne conserve que les solutions de l'équation qui appartiennent au domaine.



L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathcal{S} = \{5\}$.



Attention, l'étape de résolution fait apparaître une « fausse solution » (dite également *solution parasite*). En effet, la fonction carré n'est pas injective sur \mathbb{R} : s'il est vrai que $a = b$ entraîne $a^2 = b^2$, la réciproque est fautive en général. Ainsi, en l'occurrence, l'équation $x(x-3) = 3x-5$ admet plus de solutions que l'équation de l'énoncé.

2. Pour cette deuxième équation, nous devons raisonner par disjonction de cas :

► **Détermination du domaine de l'équation.**

L'énoncé nous limite aux réels strictement positifs, or x^y a bien un sens lorsque x et y sont strictement positifs, c'est donc le cas des deux membres de notre équation.

► **Résolution proprement dite de l'équation.**



Soit x un réel strictement positif. Le logarithme népérien étant une fonction bijective, l'équation est équivalente à :

$$x^x \ln(x) = x \ln(x^x),$$

donc à

$$x^x \ln(x) = x^2 \ln(x).$$



On ne peut en déduire $x^x = x^2$ en simplifiant par $\ln(x)$: en effet, $\ln(x)$ pourrait être nul. Il faut donc raisonner par disjonction de cas, afin de gérer à part le cas $x = 1$.



Raisonnons par disjonction de cas.

- Si $x \neq 1$, alors $\ln(x) \neq 0$. L'équation est alors équivalente à $x^x = x^2$, puis, en prenant à nouveau le logarithme des deux membres, à $x \ln(x) = 2 \ln(x)$. Comme ici $x \neq 1$, ceci est équivalent à $x = 2$.
- Si $x = 1$, on constate alors immédiatement que $1^{(1^1)} = 1 = (1^1)^1$.

► **Conclusion.**

L'ensemble des solutions est la réunion de toutes les solutions trouvées dans chacun des cas traités.



Finalement,

$$\mathcal{S} = \{1, 2\}.$$

Ces deux premières questions mènent à deux constats :

- Si, dans la première question, on oublie pour quelles valeurs de la variable on raisonne, on aboutit à une solution parasite.
- Si, dans la deuxième question, on ne fait pas attention à ne pas diviser par 0 lors de la simplification par $\ln(x)$, on perd la solution $x = 1$.



Le manque de rigueur dans le raisonnement mathématique peut aboutir à trouver de « fausses solutions », ou au contraire à en oublier de vraies. Pour éviter cela, il est nécessaire, d'une part, de systématiquement déterminer le domaine de l'équation et, d'autre part, de s'assurer que tous les calculs sont licites (ne pas diviser par zéro, ne pas prendre la racine carrée ou le logarithme d'un nombre négatif, etc.). Ne pas hésiter, au besoin, à distinguer des cas.

3. Cette équation semble similaire à la première. Pourtant, nous n'allons pas pouvoir la résoudre avec la même méthode. En effet, nous n'allons pas pouvoir raisonner par équivalences à cause du membre de droite dont le signe n'est pas constant. La fonction carré n'étant pas bijective sur \mathbb{R} , nous ne pouvons pas élever au carré tout en conservant les équivalences.

Lorsqu'il n'est pas possible de conserver les équivalences, le bon raisonnement à adopter est celui de l'analyse-synthèse. Avant cela toutefois, nous nous interrogeons sur le domaine de l'équation.

► **Domaine.**



Le premier membre de l'équation n'est défini que pour les réels x tels que $x(x - 3) \geq 0$, c'est-à-dire pour $x \in] - \infty, 0] \cup [3, +\infty[$.

Ainsi, l'équation a un sens uniquement pour $x \in] - \infty, 0] \cup [3, +\infty[$.

Ceci implique évidemment que $\mathcal{S} \subset] - \infty, 0] \cup [3, +\infty[$.

► **Résolution par analyse-synthèse.**



Procédons par analyse-synthèse.

◇ *Analyse :*

Soit $x \in \mathcal{S}$. En appliquant la fonction carré à l'égalité $\sqrt{x(x - 3)} = 3x + 5$, on obtient l'égalité

$$x(x - 3) = (3x + 5)^2,$$

qui, une fois développée et réduite, est équivalente à :

$$8x^2 + 33x + 25 = 0.$$

Or, les racines du trinôme $8x^2 + 33x + 25$ sont $x_1 = -\frac{25}{8}$ et $x_2 = -1$.

Par conséquent, si x est solution, alors il vaut nécessairement $-\frac{25}{8}$ ou -1 .

Cela s'écrit ainsi de manière ensembliste :

$$\mathcal{S} \subset \left\{ -\frac{25}{8}, -1 \right\}.$$

◇ *Synthèse :*

On commence par vérifier l'appartenance au domaine. Les deux candidats-solutions sont tous les deux négatifs, donc appartiennent au domaine. Il faut donc vérifier qu'ils sont bien solutions en remplaçant dans l'égalité initiale.

Pour x_1 ,

d'une part, $\sqrt{-\frac{25}{8} \left(-\frac{25}{8} - 3\right)} = \sqrt{-\frac{25}{8} \left(-\frac{49}{8}\right)} = \frac{5 \times 7}{8} = \frac{35}{8},$

d'autre part, $3 \times \left(-\frac{25}{8}\right) + 5 = -\frac{75}{8} + \frac{40}{8} = -\frac{35}{8} \neq \frac{35}{8}. \text{ Donc } -\frac{25}{8} \notin \mathcal{S}.$

Pour x_2 ,

d'une part, $\sqrt{-1 \times (-1 - 3)} = \sqrt{4} = 2,$

d'autre part, $3 \times (-1) + 5 = 2. \text{ Donc } -1 \in \mathcal{S}.$

L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\mathcal{S} = \{-1\}.$$



L'intérêt du raisonnement par analyse-synthèse est de s'affranchir des conditions – souvent drastiques – des équivalences, pour aller plus rapidement repérer des « candidats-solutions » au sein du domaine. Son défaut réside dans la phase de synthèse : il est parfois difficile, ou très long, de vérifier si chaque candidat est oui ou non solution.

Dans ce dernier exercice, on aurait pu raisonner par équivalence au prix d'une disjonction de cas sur le signe du second membre, $3x + 5$:

- Si $3x + 5 \geq 0$, c'est-à-dire si $x \geq -\frac{5}{3}$, les deux membres sont positifs, donc l'équivalence est valide, puisque la fonction carré est bijective sur \mathbb{R}_+ . On trouve dans ce cas les deux mêmes candidats-solutions, -1 et $-\frac{25}{8}$; mais $-\frac{25}{8} < -\frac{5}{3}$. Donc il faut rejeter $-\frac{25}{8}$ puisqu'elle n'est pas dans le domaine considéré ici.
- Si $3x + 5 < 0$, une racine carrée ne pouvant être strictement négative, l'égalité n'est jamais vraie : l'équation n'admet pas de solution dans ce cas.

Nous aborderons dans l'exercice 2.1 du chapitre 2 une équation qui ne peut être raisonnablement résolue que par analyse-synthèse.

Exercice 1.2 : Calcul de produits par factorielles

Pour tout $(p, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, écrire les expressions suivantes à l'aide de factorielles.

1. $A = (p+1)(p+2) \cdots (p+n)$.

2. $B = 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2p)$.

3. $C = 1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2p+1)$.

Les factorielles ne sont compatibles avec aucune opération. La seule formule utilisable est donc celle issue de la définition, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 = \prod_{k=1}^n k \quad \text{et} \quad 0! = 1$$

1. Dans cette expression, on reconnaît une partie des facteurs de $(p+n)!$, nous allons faire apparaître les facteurs manquants.



Soit $(p, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. Il vient successivement :

$$\begin{aligned} A &= (p+1) \times (p+2) \times \cdots \times (p+n) \\ &= \frac{1 \times 2 \times \cdots \times p}{1 \times 2 \times \cdots \times p} \times (p+1) \times (p+2) \times \cdots \times (p+n) \\ &= \frac{1 \times 2 \times \cdots \times (p+n)}{1 \times 2 \times \cdots \times p} \\ &= \frac{(p+n)!}{p!}. \end{aligned}$$

2. Ici n'apparaissent que des facteurs pairs ; en factorisant 2 dans chacun d'entre eux, on obtiendra $p!$.



Le facteur 2 apparaît dans chaque facteur d'un *produit* de p facteurs, c'est donc la puissance 2^p qui se factorise.



Soit $p \in \mathbb{N}$.

Faisons apparaître 2 dans chaque facteur :

$$\begin{aligned} B &= 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2p) \\ &= (2 \times 1) \times (2 \times 2) \times (2 \times 3) \times \cdots \times (2 \times p) \\ &= 2^p \times 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times p \\ &= 2^p p! \end{aligned}$$



Il ne faut pas confondre $(2p)!$, qui est le produit de *tous* les entiers de 1 à $2p$, et B , qui est le produit des nombres *pairs* jusqu'à $2p$; par ailleurs, le symbole de la factorielle est prioritaire, ce qui signifie que $2p!$ doit être compris comme $2(p!)!$, le double de la factorielle de p , ce qui est encore différent des expressions précédentes.

3. Nous allons procéder comme pour le calcul de A : introduire les facteurs manquants pour obtenir une factorielle, ici $(2p + 1)!$. On reconnaîtra alors B .



Soit $p \in \mathbb{N}$.

Multiplions numérateur et dénominateur par le produit des nombres pairs de 2 à $2p$, c'est-à-dire B :

$$\begin{aligned} C &= 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2p + 1) \\ &= \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \cdots \times (2p) \times (2p + 1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2p)} \\ &= \frac{(2p + 1)!}{B} = \frac{(2p + 1)!}{2^p p!}. \end{aligned}$$



Nous avons choisi de rédiger les trois démonstrations précédentes avec des « \cdots », afin de permettre aux lecteurs débutants de bien comprendre ce qui se passe.

Le lecteur plus aguerri devra démontrer ces résultats avec le symbole produit. C'est l'objectif que vous devez vous fixer à court terme (c'est-à-dire d'ici la fin du premier semestre).

Voici comment rédiger rigoureusement, à l'aide du symbole produit :

$$\begin{aligned} A &= \prod_{k=p+1}^{p+n} k = \frac{\prod_{k=1}^p k}{\prod_{k=1}^p k} \times \prod_{k=p+1}^{p+n} k = \frac{\prod_{k=1}^{p+n} k}{\prod_{k=1}^p k} = \frac{(p+n)!}{p!} \\ B &= \prod_{k=1}^p (2k) = 2^p \prod_{k=1}^p k = 2^p p! \\ C &= \prod_{k=1}^p (2k + 1) = \frac{B}{B} \times \prod_{k=1}^p (2k + 1) = \frac{1}{B} \times \prod_{k=1}^p (2k) \times \prod_{k=1}^p (2k + 1) \\ &= \frac{1}{B} \times \prod_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2p} k \times \prod_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2p+1} k = \frac{1}{B} \prod_{k=1}^{2p+1} k = \frac{(2p + 1)!}{2^p p!} \end{aligned}$$

Exercice 1.3 : Calcul de somme par décomposition de fraction

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

1. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}.$$

2. En déduire, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, une expression simplifiée de $\sum_{n=1}^N u_n$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$. Vérifier que $u_n = x_n - x_{n+1}$,

puis retrouver la valeur de $\sum_{n=1}^N u_n$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$.

1. Nous allons réduire au même dénominateur l'expression proposée, réorganiser le numérateur et comparer l'expression obtenue à la définition de u_n .



Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

En mettant les fractions au même dénominateur, l'égalité de l'énoncé est équivalente à

$$u_n = \frac{a(n+1)(n+2) + b n(n+2) + c n(n+1)}{n(n+1)(n+2)},$$

c'est-à-dire à

$$u_n = \frac{(a+b+c)n^2 + (3a+2b+c)n + 2a}{n(n+1)(n+2)}.$$

Il y a donc égalité si, et seulement si, le système suivant a une solution :

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \\ 2a=1 \end{cases} \xleftrightarrow{L_4 \leftarrow \frac{1}{2}L_4} \begin{cases} a+b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \\ a=\frac{1}{2} \end{cases} \xleftrightarrow{\text{substitution}} \begin{cases} b+c=\frac{-1}{2} \\ 2b+c=\frac{-3}{2} \\ a=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\xleftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} b+c=-\frac{1}{2} \\ b=-1 \\ a=\frac{1}{2} \end{cases} \xleftrightarrow{\text{substitution}} \begin{cases} c=\frac{1}{2} \\ b=-1 \\ a=\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Ainsi, le triplet $(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2})$, et seulement lui, convient.



Attention à bien regrouper les termes de même degré dans l'expression du numérateur avant de former un système sur a , b et c .

2. Nous allons sommer les u_n en utilisant l'expression trouvée précédemment : cela nous fournira trois sommes analogues se prêtant à un changement d'indice.



Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Alors, par linéarité de la somme,

$$\sum_{n=1}^N u_n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+2}.$$

En effectuant les changements d'indice $\ell = n + 1$ et $\ell = n + 2$ dans les deux dernières sommes, on obtient

$$\sum_{n=1}^N u_n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{N+2} \frac{1}{n}.$$

Notez que l'on a implicitement renommé les nouveaux indices avec l'ancienne lettre n , ce que l'on fait régulièrement lors d'un changement d'indice.

Les trois sommes obtenues ne sont pas tout à fait identiques : les termes généraux sont les mêmes, mais les bornes sont différentes. Pour simplifier ces sommes, nous allons toutes les exprimer en fonction de l'une d'elles, par exemple la première.



Posons $H_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$. Il vient

$$\sum_{n=1}^N u_n = \frac{1}{2} H_N - \left(H_N - 1 + \frac{1}{N+1} \right) + \frac{1}{2} \left(H_N - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} \right),$$

c'est-à-dire, toutes simplifications effectuées,

$$\sum_{n=1}^N u_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(N+1)(N+2)}.$$



Les simplifications dans les sommes ne sont pas toujours simples à repérer. Pour les détecter, au brouillon, on peut écrire les premiers termes des différentes sommes et apercevoir ainsi qu'il y a des simplifications entre les différentes sommes. Par exemple, ici, si l'on écrit les premiers termes, on obtient

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \right).$$

Ensuite, au moment de rédiger, on effectue les changements d'indice mettant en évidence les simplifications.

3. Suivons les indications de l'énoncé.



Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le calcul donne

$$\begin{aligned} x_n - x_{n+1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{n+2} \\ &= u_n. \end{aligned}$$

Grâce à cette égalité, nous pouvons à présent écrire $\sum_{n=1}^N u_n$ sous forme d'une somme télescopique, ce qui va grandement faciliter son calcul.



Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

On déduit de ce qui précède que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N u_n &= \sum_{n=1}^N (x_n - x_{n+1}) \\ &= x_1 - x_{N+1} \quad \text{par télescopage} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \frac{1}{N+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{N+2}, \end{aligned}$$

qui est bien le résultat obtenu précédemment.

Exercice 1.4 : Sommes doubles

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes doubles suivantes.

$$1. S_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i 2^j.$$

$$2. S_2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^n (1 - 2^i) 2^{ij}.$$

$$3. S_3 = \sum_{k=1}^n \sum_{i=k}^n \frac{1}{i}.$$

Le principe « général » (on verra que la troisième somme est un contre-exemple) de calcul des sommes doubles est de commencer par calculer la somme « interne », en considérant lors de ce calcul que l'indice de la somme « externe » est constant. On effectue ensuite le calcul de la somme externe, ce qui revient donc à calculer les sommes successivement, en partant de la plus intérieure.

1. Nous allons calculer S_1 en deux temps. À i fixé, nous allons calculer $\sum_{j=1}^n i 2^j$ en faisant apparaître une somme géométrique, puis nous sommerons sur i .



Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. L'indice i est constant du point de vue de j , donc on peut le mettre en facteur de la somme :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n i2^j &= i \sum_{j=1}^n 2^j \quad \text{par linéarité de la somme} \\ &= i \left(\sum_{j=0}^n 2^j - 1 \right) \\ &= i \left(\frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} - 1 \right) \quad \text{somme géométrique de raison 2} \\ &= i(2^{n+1} - 2). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{i=1}^n i(2^{n+1} - 2) \\ &= (2^{n+1} - 2) \sum_{i=1}^n i \quad \text{par linéarité de la somme} \\ &= (2^{n+1} - 2) \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{d'après une formule usuelle} \\ &= (2^n - 1)n(n+1). \end{aligned}$$



Le fait que le terme général de la somme soit le produit d'un facteur dépendant uniquement de i et d'un autre dépendant uniquement de j permet d'effectuer plus rapidement le calcul, de la façon suivante.

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{i=1}^n \left(i \sum_{j=1}^n 2^j \right) = \left(\sum_{i=1}^n i \right) \left(\sum_{j=1}^n 2^j \right) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} - 1 \right) = (2^n - 1)n(n+1). \end{aligned}$$

En effet, i ne dépendant pas de j , on peut le « sortir » de la somme interne. On obtient alors une somme de la forme $\sum_{i=1}^n (i \times A)$, où A ne dépend pas de i , et ainsi

$$S_1 = A \sum_{i=1}^n i = \left(\sum_{i=1}^n i \right) \left(\sum_{j=1}^n 2^j \right).$$

Cette manipulation est cependant impossible lorsque l'on ne peut pas factoriser séparément les indices, comme c'est le cas dans la question suivante.



Il est un bon réflexe, lors de l'établissement de telles formules, de les vérifier pour de petites valeurs de n .

Ici, pour $n = 0$, la somme est vide et vaut donc 0, et $(2^0 - 1) \times 0 \times (0 + 1)$ donne bien 0.

Pour $n = 1$, la somme n'a qu'un terme, qui vaut 2, et $(2^1 - 1) \times 1 \times (1 + 1)$ donne bien 2.

2. On procède comme dans la question précédente : on commence par fixer i pour calculer $\sum_{j=0}^n 2^{ij}$, puis on somme l'expression obtenue (qui dépend de i , mais plus de j) pour i allant de 1 à n . Les calculs font intervenir deux fois la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique.



Effectuons le calcul en commençant par la somme interne.

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{i=1}^n \left((1 - 2^i) \sum_{j=0}^n 2^{ij} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left((1 - 2^i) \sum_{j=0}^n (2^i)^j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left[(1 - 2^i) \frac{1 - (2^i)^{n+1}}{1 - 2^i} \right] \quad (\text{somme géométrique de raison } 2^i \neq 1) \\ &= \sum_{i=1}^n (1 - 2^{i(n+1)}) \\ &= \sum_{i=1}^n 1 - \sum_{i=1}^n (2^{n+1})^i \quad \text{par linéarité de la somme} \\ &= n - 2^{n+1} \frac{1 - (2^{n+1})^n}{1 - 2^{n+1}} \quad (\text{somme géométrique de raison } 2^{n+1} \neq 1). \end{aligned}$$



Attention à ne pas oublier le premier terme de la somme d'une suite géométrique. On rappelle la formule au départ de $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, \forall q \in \mathbb{C}, q \neq 1, \quad \sum_{k=n_0}^n q^k = q^{n_0} \times \frac{1 - q^{n-n_0+1}}{1 - q}.$$

3. Cette somme double est plus difficile que les précédentes : elle est « triangulaire », c'est-à-dire que l'une des bornes de la somme interne dépend de l'indice de la somme externe.



Cela n'a pas de sens de permuter les deux sommes et d'écrire

$$\sum_{i=k}^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{i}.$$

En effet, dans la première somme, i varie de k à n , alors que k n'est pas encore défini (il ne l'est que pour la somme interne).

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ fixé. Aucune formule ne permet de simplifier la somme $\sum_{i=k}^n \frac{1}{i}$, et nous allons donc la réécrire différemment pour pouvoir la calculer. Pour cela, nous allons commencer par écrire la somme double sous forme d'une seule somme avec un double indice. Pour ce faire, il suffit de remarquer que, si $(k, i) \in \mathbb{N}^2$, alors

$$1 \leq k \leq n \text{ et } k \leq i \leq n \iff 1 \leq k \leq i \leq n.$$

Cette chaîne d'inégalités traduit bien le fait que k peut prendre toutes les valeurs entre 1 et n , et i les valeurs entre k et n .

Ensuite, de la même façon, on remarque que, si $(k, i) \in \mathbb{N}^2$, alors

$$1 \leq k \leq i \leq n \iff 1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq k \leq i.$$

Autrement dit, on interprète désormais cette chaîne d'inégalités de la façon suivante : tout d'abord, i varie entre 1 et n , ensuite k varie entre 1 et i . Ceci nous donne la nouvelle écriture sous forme de somme double.

La totalité de ce raisonnement se rédige élégamment avec les sommes.



S_3 est une somme triangulaire ; inversons l'ordre de sommation :

$$S_3 = \sum_{k=1}^n \sum_{i=k}^n \frac{1}{i} = \sum_{1 \leq k \leq i \leq n} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \frac{1}{i}.$$

Or, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ fixé, $\sum_{k=1}^i \frac{1}{i} = \frac{1}{i} \sum_{k=1}^i 1 = \frac{1}{i} \times i = 1$. Ainsi,

$$S_3 = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^n 1 = n.$$

Exercice 1.5 : Triangle de Pascal généralisé

1. Soit p entier naturel fixé. Démontrer, par récurrence, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p, \quad \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

2. Proposer une autre démonstration utilisant un télescopage.

3. À l'aide de cette formule, retrouver les sommes classiques :

$$\sum_{k=1}^n k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n k^2.$$

1. L'énoncé indique clairement le raisonnement à utiliser, à savoir une récurrence. Mais il faut préciser que la récurrence va porter sur la variable n . C'est implicitement fait lorsqu'on prend la peine de définir la propriété qui va être démontrée par récurrence.



On pose, pour tout n entier supérieur ou égal à p , \mathcal{H}_n : « $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$ ».

- **Initialisation.** Pour $n = p$. Alors \mathcal{H}_p se réduit à $\binom{p}{p} = \binom{p+1}{p+1}$, c'est-à-dire $1 = 1$. Donc \mathcal{H}_p est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq p$ tel que \mathcal{H}_n vraie. Il vient successivement :

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} &= \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} \\ &= \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \binom{n+2}{p+1} \quad \text{par la formule du triangle de Pascal.} \end{aligned}$$

Donc \mathcal{H}_{n+1} est vraie.

- **Conclusion.** Ainsi, \mathcal{H}_n est vraie pour tout entier $n \geq p$.



Il est essentiel de bien préciser quelle est la variable de la récurrence : ici, *a priori*, trois variables entières sont présentes dans la formule : k , p et n . La variable k étant muette, il n'est pas possible de faire une récurrence dessus ; pour p , il ne paraît pas simple de relier la formule au rang p à la formule au rang $p+1$. Par ailleurs, p est fixé par l'énoncé. Il est donc plus naturel de procéder à une récurrence sur n .

2. Nous allons retrouver ce résultat sans utiliser de raisonnement par récurrence, mais en utilisant exclusivement les formules du cours connues sur les coefficients du binôme. L'avantage de cette seconde méthode est qu'elle ne nécessite pas de connaître *a priori* le résultat.



Conformément au programme, nous appliquons la convention suivante pour les coefficients binomiaux :

$$\forall (n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}, \quad \binom{n}{k} = 0 \quad \text{dès que} \quad k < 0 \quad \text{ou} \quad k > n.$$



Soit $n \in \mathbb{N}$. On peut écrire directement la formule du triangle de Pascal dans la somme :

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} &= \sum_{k=p}^n \left(\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} \right) \\ &= \binom{n+1}{p+1} - \binom{p}{p+1} \quad \text{par télescopage} \\ &= \binom{n+1}{p+1} \quad \text{car} \quad \binom{p}{p+1} = 0 \quad \text{par convention.} \end{aligned}$$

3. Nous cherchons d'abord à calculer $\sum_{k=1}^n k$. Étant donné que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\binom{k}{1} = k$, nous allons utiliser le résultat démontré précédemment avec $p = 1$.



Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $p = 1$, et donc $n \geq 1$. La formule devient alors

$$\sum_{k=1}^n \binom{k}{1} = \binom{n+1}{2},$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Et ceci reste vrai pour $n = 0$.

Ensuite, pour calculer $\sum_{k=1}^n k^2$, nous pouvons utiliser $\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$, autrement dit le cas $p = 2$.



On suppose que $p = 2$, et donc $n \geq 2$. La formule devient alors

$$\sum_{k=2}^n \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3},$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=2}^n \frac{k(k-1)}{2} = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}.$$