

AIDE-MÉMOIRE

# Résistance des matériaux



Jean **Goulet**  
Jean-Pierre **Boutin**  
Frédéric **Lerouge**

AIDE-MÉMOIRE

# Résistance des matériaux

10<sup>e</sup> édition

EDITIONS  
**LE MONITEUR**

**DUNOD**

## Graphisme de couverture : Nicolas Hubert

Photographie de couverture : © Ignatius Wooster – Fotolia.com

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1<sup>er</sup> juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de

l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du

droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Paris, 1998, 2004, 2008, 2014

2019 pour la nouvelle présentation

ISBN 978-2-10-080757-4

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2<sup>o</sup> et 3<sup>o</sup> a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

# Table des matières

Avant-propos

IX

## A

### Théories de base en domaine élastique

<b>1 ■ Contraintes et déformations</b>	<b>3</b>
1.1 Définitions	3
1.2 Effets produits par l'effort normal : traction et compression simple	5
1.3 Effets produits par le moment de flexion	6
1.4 Effets produits par l'effort tranchant	10
1.5 Effets produits par le moment de torsion	15
1.6 Représentation des contraintes	18
1.7 Contraintes d'équilibre d'un massif	21
1.8 Vérification de la sécurité offerte par une construction	23
<b>2 ■ Caractéristiques des sections transversales des pièces prismatiques</b>	<b>25</b>
2.1 Caractéristiques des sections les plus usuelles	27
2.2 Tables de calcul utilisables dans le cas d'un matériau ne résistant pas à la traction	37

<b>3 ■ Méthodes générales utilisées en résistance des matériaux</b>	<b>43</b>
3.1 Potentiel interne	43
3.2 Théorème de Castigliano	44
3.3 Théorème de Menabrea	44
3.4 Théorème de réciprocité de Maxwell-Betti	45
3.5 Expression analytique des déplacements : formule de Mohr	46
3.6 Principe des travaux virtuels	47
3.7 Théorème des travaux virtuels	47
3.8 Déformation des poutres chargées dans leur plan moyen : formules de Bresse	49
3.9 Lignes d'influence	52

## B

### Formulaires de poutres, plaques et coques en domaine élastique

<b>4 ■ Systèmes isostatiques</b>	<b>57</b>
4.1 Exemples	57
4.2 Effet d'un convoi sur une poutre droite : théorème de Barré	61
4.3 Méthode graphique	62
4.4 Systèmes en treillis articulé	63
4.5 Arc à trois articulations	67
4.6 Portique à trois articulations	70
4.7 Formulaire de la console	71
4.8 Formulaire de la poutre sur deux appuis simples	74
4.9 Formulaire de la poutre sur deux appuis de niveaux différents	85
4.10 Formulaire de la poutre avec un ou deux appuis rotulés	88
4.11 Formulaire de la poutre d'axe vertical	89
4.12 Formulaire de l'arc parabolique isostatique	90
4.13 Calcul de déplacements par le théorème de Castigliano	94
4.14 Calcul de déplacements par le théorème de réciprocité de Maxwell-Betti	97

<b>5 ■ Systèmes hyperstatiques</b>	<b>101</b>
5.1 Poutres droites hyperstatiques à une travée	101
5.2 Poutres continues	119
5.3 Systèmes de poutres croisées	134
5.4 Poutres sur appui élastique continu	137
5.5 Poutre courbe	152
5.6 Anneaux avec chargement symétrique dans leur plan	158
5.7 Portiques	169
5.8 Arcs hyperstatiques	191
<b>6 ■ Plaques</b>	<b>205</b>
6.1 Formules fondamentales	205
6.2 Plaques rectangulaires	207
6.3 Plaques circulaires	232
6.4 Plaques annulaires	237
6.5 Plaques elliptiques	240
6.6 Plaques triangulaires	241
6.7 Plaque sur appui élastique continu	243
6.8 Effet d'un gradient de température	244
<b>7 ■ Coques</b>	<b>245</b>
7.1 Coques sans flexion	246
7.2 Coques cylindriques fléchies	252

## C

### Domaine plastique et comportements particuliers

<b>8 ■ Stabilité de l'équilibre élastique</b>	<b>265</b>
8.1 Flambement des pièces élancées	265
8.2 Déversement latéral des poutres	281
8.3 Flambement des arcs et anneaux	284

8.4	Voilement d'une plaque rectangulaire	286
8.5	Cloquage des voiles minces	287

## **9 ■ Plasticité** **289**

9.1	Lois de la déformation plastique	289
9.2	États d'équilibre limite	290
9.3	Théorème fondamental d'adaptation	292
9.4	Application de la théorie de la plasticité aux plaques	294

## **10 ■ Dynamique** **309**

10.1	Oscillateur simple avec translation	310
10.2	Oscillateur simple avec rotation	317
10.3	Oscillateur multiple	318
10.4	Pulsation du mode propre fondamental	326

Index		331
-------	--	-----



# Avant-propos

Cet aide-mémoire expose toutes les méthodes théoriques et pratiques permettant de réaliser des calculs de résistance des matériaux.

Le lecteur y trouvera les fondamentaux notamment, avec les rappels des notions et méthodes de base, des formulaires sur les poutres, les portiques, les plaques et les coques ainsi qu'un chapitre donnant les éléments essentiels à connaître dans le domaine du calcul dynamique. De nombreux exemples et études de cas viennent illustrer chaque méthode permettant de limiter le recours et la mise en œuvre des logiciels de calcul aux situations véritablement complexes.

Entièrement actualisée et corrigée avec un souci de cohérence des notations, cette 10<sup>e</sup> édition propose une nouvelle mise en pages pour faciliter la lecture. Les conventions adoptées restent inspirées du domaine du génie civil (travaux publics, constructions en béton armé...) et présentent en conséquence des différences de signes et de notations avec celles du génie mécanique. Un minimum d'attention permettra néanmoins de s'y retrouver aisément.

Cet ouvrage constitue un support de travail indispensable aux ingénieurs et techniciens en activité et sera également une référence utile aux étudiants du domaine.

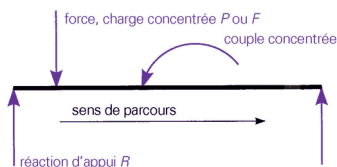
Les auteurs



## Principales notations et conventions de signes

Les principales notations et conventions de signes rencontrées dans le présent ouvrage sont indiquées ci-après :

### Efforts extérieurs



$P, F$  : force, charge concentrée

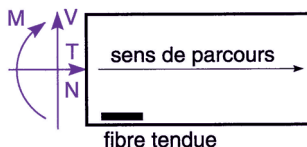
$p$  : charge répartie

$C$  : couple concentré

$c$  : couple réparti

$R$  : réaction d'appui

### Éléments de réduction des forces de gauche



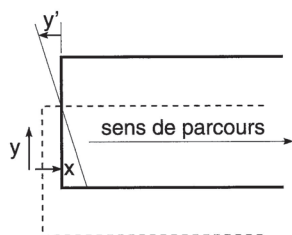
$V$  : effort, tranchant

$N$  : effort normal

$M$  : moment de flexion

$T$  : moment de torsion

### Déformations



$x$  : translation parallèle au sens de parcours

$y$  : translation perpendiculaire au sens de parcours

$y'$  : rotation



# A

**Théories  
de base  
en domaine  
élastique**



# 1

## Contraintes et déformations

### 1.1 Définitions

La Résistance des Matériaux a pour objet l'étude de l'équilibre externe et interne des solides constituant les constructions. Elle s'applique principalement aux poutres solides comportant une dimension longue devant les deux autres transversales. La ligne moyenne d'une poutre supporte la succession de ces sections droites transversales.

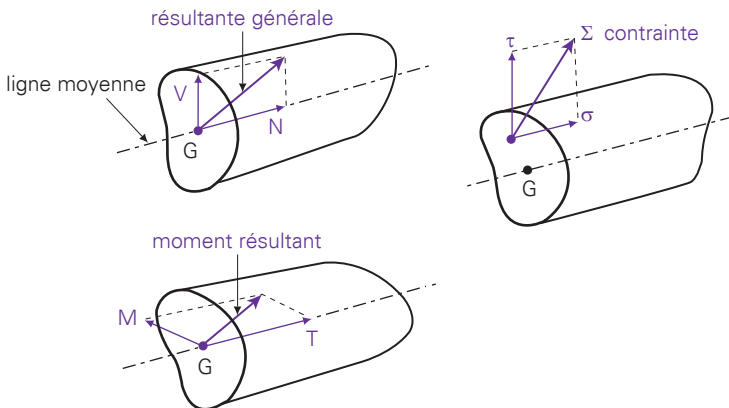


Figure 1.1

Cette étude nécessite, d'une part la vérification de l'équilibre statique, d'autre part la recherche des valeurs des contraintes et des déformations propres subies par un corps donné, soumis à un système de forces

extérieures ; parmi ces forces sont comptées les charges permanentes (comprenant en particulier, le poids propre du corps négligé parfois devant les autres charges prépondérantes notamment pour les corps de faible masse), les charges variables dans le temps et les réactions d'appui (ou forces de liaison) nécessaires à l'équilibre du corps.

### Forces intérieures et contraintes

Dans toute section pratiquée dans un solide et en tout point, les forces intérieures et les contraintes  $\Sigma$  (forces par unité de surface) peuvent être déterminées, dans certaines hypothèses énoncées ci-après, à partir de la résultante générale et du moment résultant des forces extérieures ; ces deux éléments de réduction se décomposent, au point de calcul situé au centre de gravité de la section  $G$ , en l'effort normal ( $N$ ) perpendiculaire au plan de la section, l'effort tranchant ( $V$ ) agissant dans le plan de la section, le moment de flexion ( $M$ ) dans le plan de la section et le moment de torsion ( $T$ ) perpendiculaire au plan de la section.

On distingue pour une contrainte  $\Sigma$  en un point, les composantes normale  $\sigma$  et tangentielle  $\tau$  à la section droite.

### Hypothèses et principes de base de la résistance des matériaux

- 1) Les déformations du corps sont supposées très petites et sans influence sur l'intensité et la direction des forces appliquées, et sur les conditions d'équilibre du corps (sauf notamment dans l'étude des corps sur appuis élastiques et dans l'étude du flambement).
- 2) Entre deux sections voisines d'une pièce prismatique, les variations de forme et d'étendue de section sont supposées être très progressives.
- 3) La section droite (perpendiculaire à la fibre moyenne) d'une pièce prismatique reste plane après l'application des forces sur la pièce ; c'est l'hypothèse de Navier-Bernoulli.
- 4) Dans le domaine de l'élasticité de la matière, les déformations sont proportionnelles aux contraintes ; c'est la loi de Hooke.



5) La généralisation de la loi de Hooke conduit au principe de superposition des effets des forces, selon lequel l'effet produit par un ensemble de forces est égal à la somme des effets produits par chaque force considérée isolément.

6) Les contraintes, et par suite les déformations, dans une région éloignée des points d'application d'un système de forces ( $\gamma$  compris des forces de liaisons), ne dépendent que de la résultante générale et du moment résultant de ce système de forces ; c'est le principe énoncé par Saint-Venant.

## 1.2 Effets produits par l'effort normal : traction et compression simple

Soit une pièce homogène de section constante présentant une aire  $\Omega$ , uniquement soumise à un effort normal  $N$  (traction ou compression) ; la **contrainte normale** (de traction ou de compression) est égale à

$$\sigma = \frac{N}{\Omega} \quad (1.1)$$

Les fibres longitudinales de la pièce subissent un allongement ou raccourcissement unitaire égal à

$$i = \frac{\Delta \ell}{l} = -\frac{\sigma}{E} = -\frac{N}{\Omega E} \quad (1.2)$$

$E$  est appelé **module d'élasticité longitudinale** ou module d'Young.

Simultanément, la dimension transversale  $b$  de la pièce subit une variation relative

$$\frac{\Delta b}{b} = -\nu \frac{\Delta \ell}{\ell} = -\nu i \quad (1.3)$$

- ▶  $\nu$  est un coefficient sans dimension, appelé coefficient de Poisson.
- ▶ Les valeurs de  $E$  et  $\nu$  sont variables suivant la nature des matériaux.
- ▶ Notons que pour un matériau homogène, isotrope et incompressible :  $\nu < 0,5$ .

## 1.3 Effets produits par le moment de flexion

### 1.3.1 Flexion plane simple

Considérons une poutre droite à plan moyen, fléchie dans son plan de symétrie, soumise uniquement à un moment de flexion  $M$ , porté par l'axe  $Gz$ .

On démontre que la section subit des **contraintes normales** dont la valeur est donnée par l'expression :

$$\sigma = \frac{My}{I} \quad (1.4)$$

$I$  désignant le moment quadratique de la section par rapport à l'axe  $Gz$ .

Le diagramme des contraintes est linéaire et présente des valeurs maximales sur les fibres les plus éloignées de l'axe  $Gz$  ; en flexion plane simple, l'axe neutre qui correspond aux fibres ne subissant aucune contrainte, est confondu avec  $Gz$ .

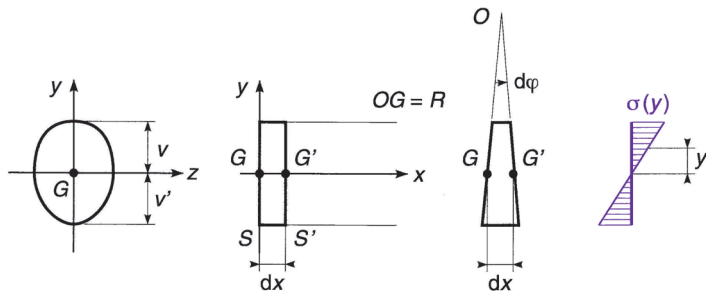


Figure 1.2

Dans le cas de la figure 1.2, la contrainte maximale de compression est égale à  $M/I_v$  ; la contrainte extrême de traction est égale à  $-M/I_{v'}$  ;

$I_v$  et  $I_{v'}$  sont les modules de flexion de la section.

Les valeurs caractéristiques  $I$ ,  $I_v$  et  $I_{v'}$  sont données au chapitre 2 pour les sections les plus courantes.

La déformation se traduit par une **rotation relative** des sections  $S$  et  $S'$  :

$$d\varphi = \frac{M}{EI} dx \quad (1.5)$$

La fibre moyenne ne subit aucune variation de longueur. Le **rayon de courbure** de la fibre moyenne déformée est :

$$R = \frac{dx}{d\varphi} = \frac{EI}{M} \quad (1.6)$$

Lorsque le moment de flexion est constant, la poutre de moment quadratique constant, initialement droite, prend la forme d'un arc de cercle ; dans ce cas la flexion est dite circulaire.

### 1.3.2 Flexion déviée

Lorsque l'axe du moment de flexion  $M$  ne coïncide pas avec l'un des axes dits principaux de la section, la flexion est dite déviée. Les axes principaux sont les deux axes perpendiculaires de la section autour desquels les moments quadratiques sont extremums. Tout axe de symétrie est axe principal. Dans le cas d'une flexion déviée, on décompose le moment  $M$  en ses composantes  $M_y$  et  $M_z$  suivant les axes principaux de section ; puis, en appliquant le principe de superposition, on obtient la contrainte normale au point de coordonnées  $(y, z)$  :

$$\sigma = \frac{M_z y}{I_z} - \frac{M_y z}{I_y} \quad (1.7)$$

L'axe neutre passe par le centre de surface de la section ; il est défini par l'équation précédente dans laquelle on écrit  $\sigma = 0$ .

Lorsque la section est repérée dans un système d'axes  $Gx'y'z'$ , avec  $Gx'$  tangent à la ligne moyenne et  $Gy', Gz'$  quelconques dans le plan de la section droite, les axes principaux  $Gy$  et  $Gz$  sont repérés par l'angle  $\alpha$  tel que :

$$\tan 2\alpha = \frac{2I_{y'z'}}{I_{z'} - I_{y'}}$$

Les moments quadratiques principaux ont pour valeurs :

$$I_y = I_{y'} \cos^2\alpha + I_{z'} \sin^2\alpha - I_{y'z'} \sin 2\alpha$$

$$I_z = I_{y'} \sin^2\alpha + I_{z'} \cos^2\alpha + I_{y'z'} \sin 2\alpha$$

### 1.3.3 Flexion composée (ou flexion plane)

Lorsque le moment de flexion  $M$  est accompagné d'un effort normal  $N$ , la section est soumise à la flexion composée (ou flexion plane).

Toujours par application du principe de superposition, on trouve que la contrainte au point de coordonnées  $(y, z)$  est égale à :

$$\sigma = \frac{N}{\Omega} + \frac{M_z y}{I_z} - \frac{M_y z}{I_y} \quad (1.8)$$

L'axe neutre est défini par l'équation précédente dans laquelle on écrit  $\sigma = 0$  ; on voit qu'il ne passe plus par le point  $G$ .

Le système des forces appliquées à la section est équivalent à une force unique qui passe par un point  $C$ , situé dans le plan de la section, appelé *centre de pression*, et dont les coordonnées sont :

$$y_1 = \frac{M_z}{N} \quad z_1 = -\frac{M_y}{N}$$

Avec ces nouvelles notations, l'équation de l'axe neutre peut s'écrire :

$$\frac{yy_1}{I_z} + \frac{zz_1}{I_y} + \frac{1}{\Omega} = 0 \quad (1.9)$$

Il apparaît donc que les coordonnées du centre de pression suffisent à déterminer l'axe neutre.

Lorsque le centre de pression se trouve à l'intérieur d'un domaine caractéristique de la section, appelé **noyau central**, l'axe neutre est extérieur à la section et les contraintes sont toutes de même signe sur toute l'étendue de la section ; lorsque le centre de pression se trouve sur la frontière de ce domaine, l'axe neutre est tangent au contour de la section ; lorsque le centre de pression se trouve hors du noyau central, l'axe neutre coupe la section et les contraintes, de part et d'autre de cet axe, sont de signes contraires.

Nous précisons au chapitre 2, pour les sections courantes, la forme et les dimensions du noyau central.

### Cas des matériaux dont la résistance à la traction est nulle ou négligeable :

maçonnerie, béton non armé, base d'appui d'une fondation sur le sol.

Dans ce cas, lorsque le centre de pression sort du noyau central, il n'est plus possible d'utiliser la formule (1.8). Les tables de calcul utilisables pour les sections rectangulaires, circulaires ou annulaires se trouvent à la fin du chapitre 2.

### Cas particulier de la section rectangulaire soumise à la flexion composée non déviée.

L'application de la formule (1.8) conduit, avec :

$$M_y = 0, \quad M_z = N y_1 \quad \text{et} \quad I_z = \frac{b b^3}{12}$$

aux contraintes suivantes :

$$\text{arête la plus comprimée} \quad \sigma = \frac{N}{b b} + \frac{6 M_z}{b b^2} = \frac{N}{\Omega} \left( 1 + 6 \frac{y_1}{b} \right) \quad (1.10)$$

$$\text{arête opposée} \quad \sigma = \frac{N}{b b} - \frac{6 M_z}{b b^2} = \frac{N}{\Omega} \left( 1 - 6 \frac{y_1}{b} \right) \quad (1.11)$$

cette dernière contrainte s'annule pour  $y_1 = \frac{b}{6}$ , ; si  $y_1$  est supérieur à  $\frac{b}{6}$  le centre de pression est hors du noyau central et des contraintes de traction apparaissent dans la section.

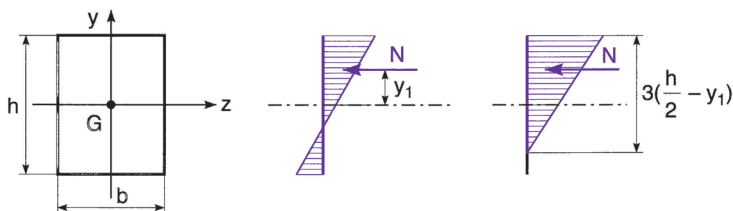


Figure 1.3

Dans ce cas, les formules (1.10) et (1.11) ne sont plus applicables à un matériau ne résistant pas à la traction ; la résultante des contraintes de compression devant coïncider avec le centre de pression, la hauteur de section comprimée est égale à  $3\left(\frac{h}{2} - y_1\right)$  ; la contrainte sur la fibre la plus comprimée est :

$$\sigma = \frac{2N}{3b\left(\frac{h}{2} - y_1\right)} \quad (1.12)$$

## 1.4 Effets produits par l'effort tranchant

### Relation entre moment de flexion et effort tranchant

Considérons la poutre droite envisagée dans l'étude de la flexion ; on démontre que dans une section de la poutre, où n'agit pas de charge concentrée ou de couple extérieur, l'**effort tranchant**  $V$  est lié au moment de flexion par la relation :

$$\frac{dM}{dx} = V \quad (1.13)$$

## 1.4.1 Valeur de la contrainte de cisaillement

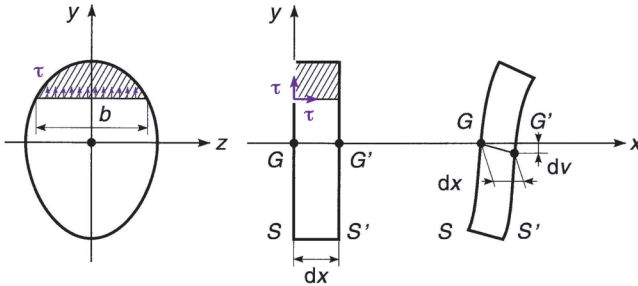


Figure 1.4

**Hypothèse simplificatrice**

En raison de sa répartition complexe suivant le type de section, on suppose communément qu'en tout point de la section droite, la contrainte de cisaillement  $\tau$  est parallèle à  $Gy$  et que sa valeur ne dépend pas de  $z$ . Si par ailleurs on pose :

- $b$  = largeur de la section au niveau où l'on calcule  $\tau$
- $m$  = moment statique par rapport à  $Gz$  de la partie de la section située au-dessus du niveau considéré
- $I$  = moment quadratique de l'ensemble de la section par rapport à  $Gz$ ,

on trouve que la contrainte de cisaillement est égale à :

$$\tau = \frac{Vm}{Ib} \quad (1.14)$$

L'hypothèse simplificatrice reste très satisfaisante pour les sections massives. Ce n'est pas le cas des sections à parois minces.

Selon le théorème de Cauchy, la contrainte de cisaillement longitudinale, c'est-à-dire dans le plan horizontal, à la même valeur que la précédente.

L'effort de glissement longitudinal par unité de longueur de poutre, au niveau considéré, est donc égal à  $\frac{Vm}{I}$ .

La contrainte de cisaillement est maximale à un niveau qui dépend de la forme de la section.

Pour chaque forme de section, on peut définir une section réduite  $\Omega'$  telle que le rapport  $\frac{V}{\Omega'}$  fournit la valeur de la contrainte de cisaillement maximale.

### 1.4.2 Déformation produite par l'effort tranchant

Elle se traduit par un déplacement relatif de deux sections voisines  $S$  et  $S'$ , distantes de  $dx$ , correspondant à une translation  $dv$  parallèle à l'effort tranchant, telle que :

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{V}{G\Omega_1} \quad (1.15)$$

$G$  est le *module d'élasticité transversale* (ou module de Coulomb), sa valeur est (matériaux isotropes) :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (1.16)$$

$\Omega_1$  est la section réduite à prendre en compte pour le calcul de la déformation d'effort tranchant.

Les valeurs de  $\Omega'$  et  $\Omega_1$  sont données au chapitre B, pour certaines sections usuelles.



### 1.4.3 Poutre ne possédant pas de plan moyen de symétrie parallèle à l'effort tranchant. Centre de torsion

#### Centre de torsion

Lorsqu'une section symétrique par rapport à  $Gz$  n'admet pas  $Gy$  comme axe de symétrie, les éléments de réduction qui résultent des contraintes de cisaillement produites par un effort tranchant  $V$  parallèle à  $Gy$ , comportent un moment résultant nul non pas au centre de surface  $G$  mais en un point  $C$  situé sur l'axe  $Gz$ , appelé **centre de torsion**.

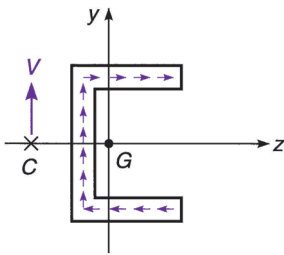


Figure 1.5

Si les forces extérieures sont situées dans le plan parallèle à  $Gy$  passant par le centre de torsion, la résultante des contraintes de cisaillement est équivalente à l'effort tranchant ; sinon, avec les conventions habituelles (calcul en  $G$ ), un moment de torsion parasite apparaît dans la poutre, et les contraintes de cisaillement correspondantes doivent être superposées à celles qui résultent de la formule (1.14).

La position du centre de torsion pour certaines sections particulières, est donnée ci-dessous :

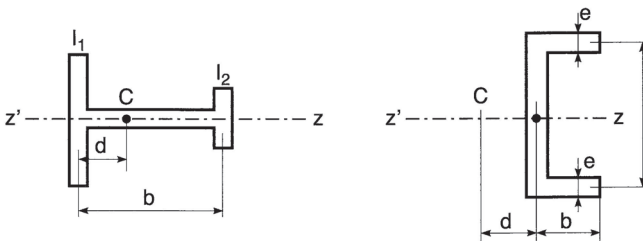


Figure 1.6