

PHYSIQUE
CHIMIE
PT - TSI

METHODES ET EXERCICES

Tout le catalogue sur
www.dunod.com



OLIVIER FIAT

PHYSIQUE
CHIMIE

PT • TSI

METHODES ET EXERCICES

l'intégrale

DUNOD

Avec la collaboration scientifique de Pierre-Emmanuel Leroy

Conception graphique de la couverture : Hokus Pokus Créations

<p>Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.</p> <p>Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements</p>		<p>d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.</p> <p>Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).</p>
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

© Dunod, 2018

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-077551-4

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^e et 3^e a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Avant-propos

ix

I	Thermodynamique et mécanique des fluides	1
CHAPITRE 1	PARTICULE DE FLUIDE, STATIQUE DES FLUIDES	3
	Les méthodes à retenir	4
	Énoncés des exercices	10
	Du mal à démarrer ?	15
	Corrigés des exercices	16
CHAPITRE 2	THERMODYNAMIQUE DIFFÉRENTIELLE, CHANGEMENTS D'ÉTAT	21
	Les méthodes à retenir	22
	Énoncés des exercices	35
	Du mal à démarrer ?	43
	Corrigés des exercices	44
CHAPITRE 3	ÉCOULEMENTS	53
	Les méthodes à retenir	54
	Énoncés des exercices	66
	Du mal à démarrer ?	74
	Corrigés des exercices	75
CHAPITRE 4	THERMODYNAMIQUE INDUSTRIELLE	83
	Les méthodes à retenir	84
	Énoncés des exercices	97

Du mal à démarrer ?	107
Corrigés des exercices	108
CHAPITRE 5 TRANSFERTS THERMIQUES	117
Les méthodes à retenir	117
Énoncés des exercices	122
Du mal à démarrer ?	129
Corrigés des exercices	130
II Électronique	139
CHAPITRE 6 MONTAGES ÉLECTRIQUES ET ÉLECTRONIQUES	141
Les méthodes à retenir	142
Énoncés des exercices	154
Du mal à démarrer ?	161
Corrigés des exercices	162
CHAPITRE 7 TRAITEMENT DU SIGNAL	171
Les méthodes à retenir	172
Énoncés des exercices	177
Du mal à démarrer ?	180
Corrigés des exercices	180
III Optique	183
CHAPITRE 8 SUPERPOSITION D'ONDES LUMINEUSES	185
Les méthodes à retenir	186
Énoncés des exercices	198
Du mal à démarrer ?	208
Corrigés des exercices	209

CHAPITRE 9	DISPOSITIF DES TROUS D'YOUNG	219
	Les méthodes à retenir	220
	Énoncés des exercices	230
	Du mal à démarrer ?	243
	Corrigés des exercices	244
CHAPITRE 10	INTERFÉROMÈTRE DE MICHELSON [PT]	255
	Les méthodes à retenir	256
	Énoncés des exercices	268
	Du mal à démarrer ?	278
	Corrigés des exercices	279
IV	Électromagnétisme	289
CHAPITRE 11	ÉQUATIONS DE MAXWELL	291
	Les méthodes à retenir	292
	Énoncés des exercices	301
	Du mal à démarrer ?	311
	Corrigés des exercices	312
CHAPITRE 12	CHAMP ÉLECTRIQUE EN RÉGIME STATIONNAIRE	321
	Les méthodes à retenir	322
	Énoncés des exercices	334
	Du mal à démarrer ?	341
	Corrigés des exercices	342
CHAPITRE 13	CHAMP MAGNÉTIQUE EN RÉGIME STATIONNAIRE	351
	Les méthodes à retenir	352
	Énoncés des exercices	365
	Du mal à démarrer ?	377
	Corrigés des exercices	378

V Physique des ondes 389

CHAPITRE 14 ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LE VIDE 391

Les méthodes à retenir	392
Énoncés des exercices	401
Du mal à démarrer ?	407
Corrigés des exercices	407

CHAPITRE 15 ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES EN PRÉSENCE DE MÉTAUX 413

Les méthodes à retenir	414
Énoncés des exercices	423
Du mal à démarrer ?	431
Corrigés des exercices	432

VI Chimie 439

CHAPITRE 16 THERMOCHIMIE 441

Les méthodes à retenir	442
Énoncés des exercices	457
Du mal à démarrer ?	463
Corrigés des exercices	464

CHAPITRE 17 ÉLECTROCHIMIE [PT] 475

Les méthodes à retenir	476
Énoncés des exercices	497
Du mal à démarrer ?	508
Corrigés des exercices	509

CHAPITRE 18 FORMULAIRE MATHÉMATIQUE 519

18.1 Équations différentielles	519
--------------------------------	-----

18.2	Fonctions de plusieurs variables, équations aux dérivées partielles	521
18.3	Analyse vectorielle	522
18.4	Intégrales de champs et grandeurs élémentaires	526
	Index	529

Avant-propos

Présentation générale.

Cet ouvrage de la collection Méthodes et exercices traite de l'intégralité du programme de physique et de chimie des filières PT, PT* et TSI-2. Le programme de TSI est strictement inclus dans celui de PT, les chapitres et paragraphes du programme de PT et hors programme TSI sont mentionnés par l'encadré PT. Chacun des 17 chapitres est divisé en quatre parties (le chapitre 18 est un formulaire de mathématiques).

Les méthodes à retenir : chaque chapitre commence par plusieurs fiches structurées avec des rappels de cours synthétiques, des méthodes de raisonnement ou de calcul, un exemple complet et un renvoi aux exercices concernés.

Énoncés des exercices : des énoncés d'exercices d'application du cours et de nombreux exercices inspirés d'écrits et d'oraux de concours sont proposés. Ils sont affectés d'un niveau de difficulté, de 1 à 4.

Du mal à démarrer ? : des indications de méthode ou de calcul sont données à l'image de celles qui seraient données en colle ou à l'oral des concours.

Corrigés des exercices : les solutions détaillées sont entièrement rédigées.

Conseils de travail.

Nous vous encourageons à adopter une discipline de travail rigoureuse. Vous ne devez jamais oublier que c'est en faisant qu'on apprend. Lire un énoncé puis son corrigé est absolument contre-productif, et même si vous avez l'impression de « tout comprendre » (ce qui est flatteur pour le rédacteur de la solution !), vous n'apprendrez presque rien, et surtout vous ne retiendrez rien. Un exercice est fait pour être cherché, longuement, avec application, puis rédigé complètement, applications numériques, commentaires et conclusions compris. Si vous ne trouvez pas la réponse, cherchez encore. Si vous ne trouvez toujours pas, reportez-vous à la fiche méthode et réessayez en profitant des rappels et conseils qui y sont donnés. Si vous ne trouvez toujours pas, reportez-vous à l'aide donnée dans la rubrique « Du mal à démarrer ? ». Si vous n'avez que partiellement trouvé, laissez-vous un peu de temps encore, une nuit de repos, et cherchez encore le lendemain, c'est souvent profitable. Enfin, vous pouvez consulter le corrigé, sans oublier qu'avoir réellement compris une solution, c'est être capable une heure, une semaine ou un an après, de la restituer.

À propos du choix d'exercices.

Les exercices ont été choisis pour couvrir tout le programme, et tous les styles : certains sont calculatoires, d'autres plus qualitatifs, d'autres encore à forte composante documentaire (c'est alors mentionné dans le titre) avec une volonté dans cet ouvrage de proposer beaucoup de lectures graphiques (schémas, diagrammes, cartes de champ, de potentiel). Certains exercices qui demandent une initiative particulière de modélisation, de choix d'hypothèses, d'organisation du raisonnement, sont estampillés « résolution de problème ».

Quelques données plus techniques.

- Les grandeurs complexes sont soulignées, les grandeurs vectorielles surmontées d'une flèche, les vecteurs unitaires notés \vec{u} .
- L'imaginaire pur est noté i en électromagnétisme dans l'étude des ondes, et j dans les chapitres d'électricité pour éviter la confusion avec l'intensité.
- Nous avons délibérément omis de fournir les lois d'analyse vectorielle dans le corps des exercices, afin d'éviter de donner une indication trop précise. Nous avons ainsi respecté la convention de l'écrit des concours, où la liste des formules utiles est toujours donnée avant ou après l'énoncé.
- Un formulaire de mathématiques utiles à la physique est proposé à la fin de l'ouvrage.
- Il en est de même pour les formules de trigonométrie et les éléments différentiels de longueur, de surface et de volume pour les intégrales spatiales.
- Un index complet est proposé à la toute fin de ce livre.

En guise de conclusion.

Nous espérons que cet ouvrage vous aidera à réussir le mieux possible les épreuves de physique des concours et nous vous souhaitons bon courage pour votre travail.

Première partie

Thermodynamique et mécanique des fluides

CHAPITRE *1*

Particule de fluide, statique des fluides

Thèmes abordés dans les exercices

- ◇ Particule de fluide.
- ◇ Champ de vitesses, carte de champ.
- ◇ Force volumique de pression.
- ◇ Force surfacique de viscosité.
- ◇ Statique des fluides.
- ◇ PT Résultante de forces de pression.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- ◇ Décrire le mouvement d'un fluide.
- ◇ Exprimer les actions de contact sur la particule de fluide.
- ◇ Résoudre un problème de statique des fluides.
- ◇ PT Calculer la résultante des forces de pression sur une surface.

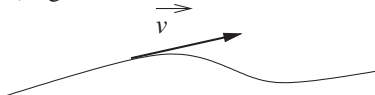
Les méthodes à retenir

Décrire le mouvement d'un fluide.

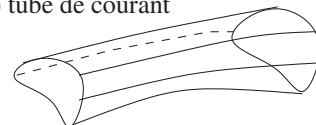
Le mouvement d'un fluide est décrit par le **champ eulérien des vitesses** : en tout point M de l'espace (de coordonnées fixes), $\vec{v}(M, t)$ est la vitesse de la particule de fluide qui passe par M à la date t . L'analyse d'une **carte de courant** permet d'identifier quelques propriétés remarquables de l'écoulement. Voici les axes d'étude.

- Le vecteur vitesse est tangent en tout point d'une **ligne de courant**.
- La réunion des lignes de courant qui passent par les points d'un lacet (ligne fermée) forme un **tube de courant**.
- Si le débit sortant d'une surface fermée est non nul, alors l'écoulement est **divergent**.
- Si la circulation du vecteur vitesse le long d'un lacet (ligne fermée) est non nulle, alors l'écoulement est **rotationnel**.
- Si les variations spatiales en direction de la vitesse sont très faibles, alors les lignes de courant sont sensiblement parallèles les unes aux autres, les tranches de fluide sont comme des lames qui glissent les unes sur les autres et l'écoulement est **laminaire**. Si les variations spatiales en direction de la vitesse sont très fortes, alors les lignes de courant sont très sinueuses et l'écoulement est **turbulent**.

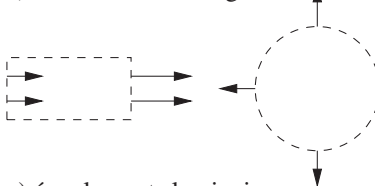
a) ligne de courant



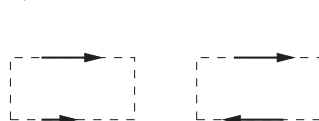
b) tube de courant



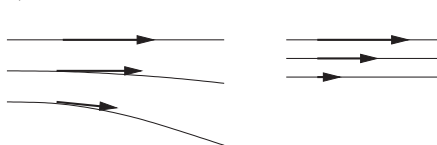
c) écoulements divergents



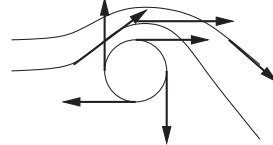
d) écoulements rotationnels



e) écoulements laminaires



écoulement turbulent



Exemple :

L'écoulement suivant

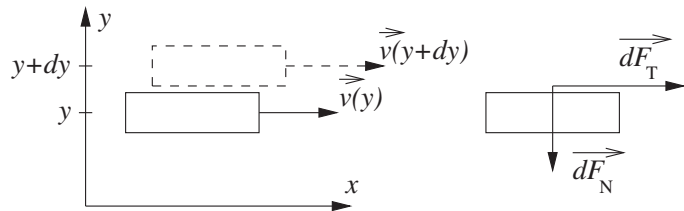
est à la fois

- divergent car le débit volumique sortant de la boîte est positif
- rotationnel car la circulation le long du lacet orienté est négative.

↪ Exercices 1.1, 1.2, 1.3.

Exprimer les actions de contact sur la particule de fluide.

Une particule de fluide de masse volumique μ et de volume $d\tau$ est soumise à un ensemble d'actions à distance, son poids en particulier $\mu d\tau \vec{g}$. Les forces de contact s'exercent sur les facettes qui la délimitent. On définit l'axe y perpendiculairement à la facette plane de séparation entre la particule d'ordonnée y et sa voisine d'ordonnée $y + dy$. La particule supérieure appuie et glisse sur la particule inférieure, en exerçant sur elle une force possédant une composante normale \vec{dF}_N et une composante tangentielle \vec{dF}_T .



- La force normale est une force de **pression** $\vec{dF}_P = -P \cdot dS \vec{n}$ avec $\vec{n} = \vec{u}_y$, où P est la pression exprimée en Pascal ($\text{Pa} = \text{N} \cdot \text{m}^{-2}$).
- La force tangentielle est une force de **viscosité** $\vec{dF}_T = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot dS \vec{u}_x$ où η est la **viscosité dynamique** exprimée en Poiseuille ($\text{Pl} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$).

La résultante des forces de pression et de viscosité sur la particule de fluide est proportionnelle à son volume $d\tau$. Dans le cas d'un fluide soumis au seul champ de pesanteur, la résultante des forces de pression s'écrit

$$\vec{dF}_P = -\vec{\text{grad}} P \cdot d\tau \text{ avec } \vec{\text{grad}} P = \begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Exemple :

Un écoulement a pour champs de vitesse et de pression

$$\vec{v}(x, y, z, t) = V_0 \frac{z^2}{a^2} \vec{u}_x \text{ et } P(x, y, z, t) = P_0 + \mu g(a - z)$$

Soit une particule de fluide définie par

$$[x, x + dx] \times [y, y + dy] \times [z, z + dz]$$

Son volume est $d\tau = dx \cdot dy \cdot dz$. La résultante des forces de pression sur ses faces inférieure et supérieure est

$$d\vec{F}_P = -\vec{\text{grad}} P \cdot d\tau \text{ donc } \frac{d\vec{F}_P}{d\tau} = \begin{cases} -\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ -\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ -\frac{\partial P}{\partial z} = \mu g \end{cases} = -\mu \vec{g}$$

La résultante des forces de viscosité sur ses faces inférieure et supérieure est

$$d\vec{F}_T = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z}(x, y, z + dz) \cdot dx \cdot dy \vec{u}_x - \eta \frac{\partial v_x}{\partial z}(x, y) \cdot dx \cdot dy \vec{u}_x$$

$$\text{soit } d\vec{F}_T = \eta dx dy \vec{u}_x \cdot \left[\frac{2V_0(z + dz)}{a^2} - \frac{2V_0 z}{a^2} \right]$$

$$\text{donc } \frac{d\vec{F}_T}{d\tau} = \frac{2\eta V_0}{a^2} \vec{u}_x$$

↪ Exercice 1.4.

Résoudre un problème de statique des fluides.

En statique des fluides, les forces de viscosité sont nulles et la somme des forces sur la particule de fluide est nulle. Dans le cas particulier où la seule force à distance est le poids, la **loi de la statique des fluides** s'écrit

$$\mu \vec{g} - \vec{\text{grad}} P = \vec{0} \text{ soit } \frac{dP}{dz} = -\mu g$$

où z est l'axe vertical dirigé vers le haut. Cette équation s'intègre dans différents cas de figure selon les hypothèses sur le fluide et sa masse volumique μ ou sur l'évolution de g avec l'altitude. Souvent, l'équation en $P(z)$ obtenue est du type « à variables séparables », et on l'intègre membre à membre entre une altitude où on connaît la pression et l'altitude z .

Exemple :

- Pour un fluide incompressible, dans le champ de pesanteur uniforme, on en déduit la **loi de l'hydrostatique** :

$$P(z) = P_0 + \mu g z$$

où P_0 est la pression à la surface du liquide ($z = 0$) et l'axe des z orienté vers le bas.

- En assimilant l'atmosphère à un gaz parfait isotherme de masse molaire M à la température T , et en négligeant les variations de g avec l'altitude, on obtient le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dP}{dz} = -\mu g \\ PM = \mu RT \end{cases} \quad \text{donc} \quad \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT} dz$$

En notant P_0 la pression au niveau de la mer en $z = 0$, il vient

$$\int_0^z \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT} \int_0^z dz$$

$$\text{soit } [\ln P]_0^z = -\frac{Mg}{RT} [z]_0^z$$

$$\text{soit } \ln P(z) - \ln P_0 = -\frac{Mg}{RT} z$$

$$\text{donc } P(z) = P_0 e^{-\frac{Mgz}{RT}}$$

↪ **Exercices 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 1.10, 1.11.**

PT Calculer la résultante des forces de pression sur une surface.

En statique des fluides, la paroi d'un réservoir est soumise à un ensemble de forces de pression réparties sur toute la surface dont on cherche à déterminer la **résultante** \vec{R} . Comme la pression n'est pas nécessairement uniforme, et que la surface n'est pas nécessairement plane, la loi naïve identifiant la force au produit de la pression par la surface est fautive en général, et nécessite un calcul d'intégrale double. Voici la démarche à suivre.

a) On choisit les variables d'intégration

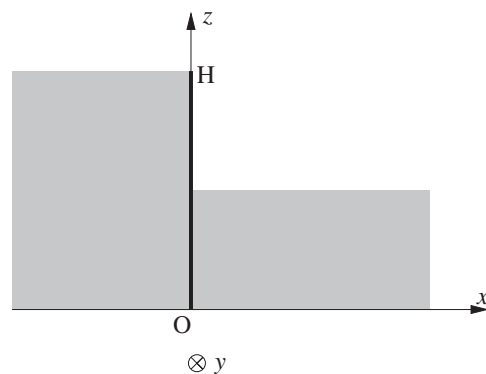
- (x, y) ou (y, z) ou (x, z) sur une surface plane
- (θ, z) sur une surface cylindrique
- (θ, φ) sur une surface sphérique.

- b) On détermine les bornes de variation des deux variables.
 c) En un point de la surface, on détermine la pression P, fonction des deux variables, grâce à la loi de la statique des fluides.
 d) On détermine le vecteur surface élémentaire \vec{dS} orthogonal à la surface, dirigé de la paroi vers le fluide :
- $\pm dx dy \vec{u}_z$ ou $\pm dy dz \vec{u}_x$ ou $\pm dx dz \vec{u}_y$ sur une surface plane
 - $\pm r d\theta dz \vec{u}_r$ sur une surface cylindrique
 - $\pm r \sin \theta d\theta d\varphi \vec{u}_r$ sur une surface sphérique.
- e) On utilise les symétries du problème pour déterminer a priori la direction \vec{u} de la force résultante et on projette le vecteur surface sur cette direction, soit $dS = -\vec{dS} \cdot \vec{u}$.
 f) On calcule l'intégrale double sur la surface S de la paroi

$$R = \iint_S P dS \text{ et } \vec{R} = R\vec{u}$$

Exemple :

La paroi d'un barrage est définie par $(y, z) \in [0, D] \times [0, H]$. D'un côté ($x < 0$), la hauteur d'eau est H, de l'autre côté ($x > 0$), elle vaut $\frac{H}{2}$. La pression dans l'air est uniformément égale à P_0 , on note μ la masse volumique de l'eau et g l'accélération de la pesanteur.



- a) Les variables d'intégration sont y et z.
 b) Les bornes sont 0 et D pour y, 0 et H pour z.

c) Par application de la loi de l'hydrostatique, la pression à l'altitude z à gauche du barrage est $P_1(z) = P_0 + \mu g(H - z)$ et à droite $P_2(z) = P_0 + \mu g\left(\frac{H}{2} - z\right)$ si $0 \leq z \leq \frac{H}{2}$ et $P_2(z) = P_0$ si $\frac{H}{2} \leq z \leq H$.

d) Calculons la résultante \vec{R}_1 des forces de pression à gauche de la paroi. On a $d\vec{S} = -dydz\vec{u}_x$ (dirigé vers le fluide).

e) Toutes les forces étant selon l'axe \vec{u}_x , la résultante est $\vec{R} = R\vec{u}_x$ et $dS = dydz$.

f) On en déduit

$$R_1 = \int_{y=0}^D \int_{z=0}^H (P_0 + \mu g(H - z)) dydz$$

$$R_1 = [y]_0^D \left[P_0 z + \mu g H z - \mu g \frac{z^2}{2} \right]_0^H$$

$$R_1 = P_0 H D + \mu g D \frac{H^2}{2}$$

$$\text{donc } \vec{R}_1 = \left[P_0 H D + \mu g D \frac{H^2}{2} \right] \vec{u}_x$$

De même, en intégrant sur les deux moitiés de la partie droite de la paroi

$$\vec{R}_2 = -P_0 \frac{H D}{2} \vec{u}_x - \left[\frac{P_0 H D}{2} + \mu g D \frac{H^2}{8} \right] \vec{u}_x$$

$$\text{et } \vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 = \frac{3\mu g D H^2}{8} \vec{u}_x$$

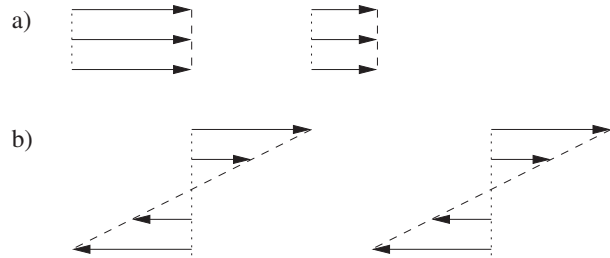
↪ Exercices 1.12, 1.13.

Énoncés des exercices

1.1

Analyse d'écoulements

Les écoulements suivants sont-ils divergents et/ou rotationnels ?



1.2

Écoulement divergent et écoulement permanent

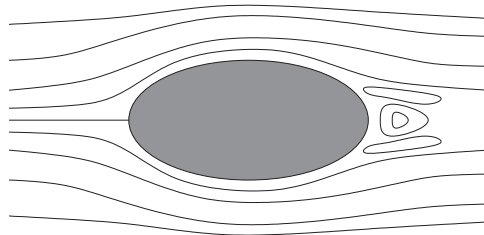
Le débit volumique sortant d'une surface fermée est non nul pour un écoulement divergent. Décrire

- un écoulement divergent permanent
- un écoulement non permanent et non divergent.

1.3

Couche limite

Voici l'allure des lignes de courant au voisinage d'un pilier de pont.

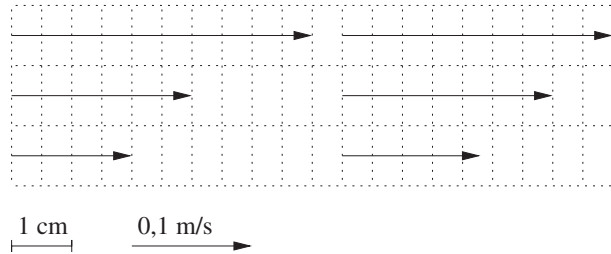


On admet que la vitesse est nulle au contact de la paroi du pilier. La **couche limite** au voisinage d'un obstacle est la zone dans laquelle les fluctuations spatiales du vecteur vitesse sont importantes. Identifier

- une couche limite laminaire
- une couche limite turbulente
- un point d'arrêt

1.4
Estimation de la viscosité par analyse d'une carte de vitesses

Voici la carte du champ des vecteurs vitesse pour l'écoulement permanent d'un fluide visqueux incompressible et homogène de masse volumique $\mu = 1500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.



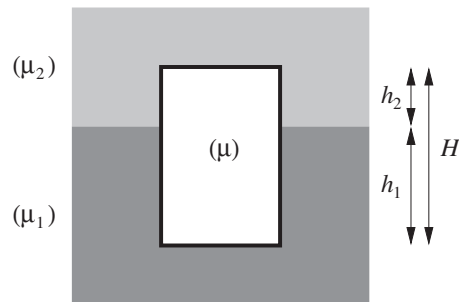
Donner une estimation de la valeur numérique de sa viscosité en supposant la pression homogène dans tout le fluide et le poids négligeable devant la force de viscosité.

1.5
Hydrostatique et poussée d'Archimède

- Un liquide incompressible de masse volumique constante et uniforme μ dans le champ de pesanteur uniforme ($\vec{g} = -g\vec{u}_z$) a pour pression de surface P_0 en $z = 0$. Établir l'expression de $P(z)$ (loi de l'hydrostatique).
- Un solide cylindrique de hauteur H et de section S est immergé dans le liquide, ses faces parallèles sont aux cotes respectives $z_0 < 0$ et $z_0 - H$. Déterminer la résultante des forces de pression sur le cylindre.
- Vérifier l'identité de cette résultante à la poussée d'Archimède.

1.6
Équilibre à l'interface entre deux fluides

Un cylindre vertical de hauteur H et de masse volumique μ est placé à l'interface entre deux fluides de masses volumiques μ_1 (fluide inférieur) et μ_2 (supérieur) avec $\mu_1 > \mu_2$. Déterminer la position d'équilibre du cylindre en exprimant les hauteurs h_1 et h_2 des parties immergées dans les deux fluides.



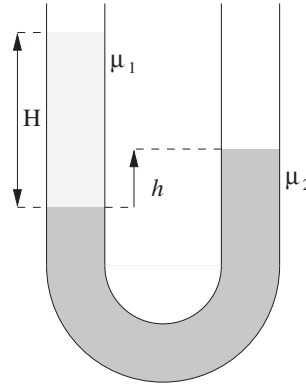
Justifier que cette flottaison à l'interface n'est possible que si $\mu_1 > \mu > \mu_2$.



1.7

Équilibre de deux fluides dans un tube en U

On place dans un tube en U deux liquides non miscibles de masses volumiques respectives μ_1 et μ_2 avec $\mu_1 < \mu_2$. Les deux extrémités sont ouvertes au contact de l'air atmosphérique et on note H la hauteur de la colonne du fluide le moins dense.



Déterminer la différence h entre les niveaux libres des deux liquides.



1.8

Loi de l'atmosphère à gradient de température uniforme

On assimile l'atmosphère à un gaz parfait de masse molaire M , soumise à un champ de gravitation uniforme g et de température variant avec l'altitude selon la loi $T(z) = T_0 - Az$. Déterminer le champ des pressions $P(z)$ en notant P_0 la pression au sol.



1.9

Pression au cœur d'une planète

Une planète dépourvue d'atmosphère est assimilée à une sphère de rayon R , de masse M et de masse volumique μ uniforme (magma liquide). Le champ de gravitation est donné par la loi

$$g(r) = \frac{4}{3}\mathcal{G}\pi\mu r$$

Déterminer la pression au centre de la planète en fonction de la constante de gravitation \mathcal{G} , de la masse M et du rayon R .



1.10

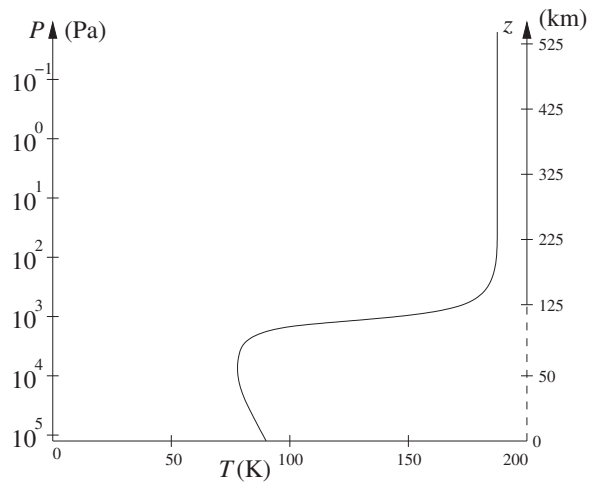
Atmosphère de Titan (analyse documentaire, ENSTIM 2008)

Dans le modèle de l'atmosphère polytropique, on suppose que la pression et la masse volumique, à l'altitude z , du gaz qui la constitue vérifie la loi

$$P(z)\mu^{-\alpha}(z) = P_0\mu_0^{-\alpha}$$

avec $P_0 = P(0)$ et $\mu_0 = \mu(0)$. L'accélération de la pesanteur g est supposée uniforme, le gaz est assimilé à un gaz parfait de masse molaire M , on note R la constante des gaz parfaits.

- a) À quels cas particuliers correspondent $\alpha = 0$? $\alpha = 1$? $\alpha = \gamma = \frac{C_p}{C_v}$?
- b) Pour $\alpha = 1$, établir l'expression de $P(z)$ en fonction de P_0 et T_0 , pression et température en $z = 0$.
- c) Même question pour $\alpha \neq 1$.
- d) La sonde Huygens a traversé l'atmosphère de Titan, une des lunes de Saturne, en janvier 2005. On donne ci-dessous l'allure du relevé de la pression (axe de gauche en échelle logarithmique) et de la température (courbe) en fonction de l'altitude (axe de droite en échelle linéaire pour $z > 125$ km). L'accélération de la pesanteur est de l'ordre de $g = 1,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, et l'atmosphère est constituée à 95% de diazote de masse molaire moléculaire $M_{N_2} = 28 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et de 5% de méthane de masse molaire moléculaire $M_{CH_4} = 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. Peut-on valider, dans un intervalle d'altitude, l'hypothèse d'atmosphère isotherme ? l'hypothèse d'atmosphère isentropique (polytropique avec $\alpha = \gamma = \frac{7}{5}$) ?



1.11

Masse de l'atmosphère (résolution de problème)

La masse molaire moyenne de l'air est $M = 29 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$. La constante des gaz parfaits vaut $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$, l'accélération de la pesanteur à basse altitude est $g \approx 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, la pression moyenne au niveau du sol est de l'ordre de $1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, le rayon terrestre est $R_T = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$ et on prend l'hypothèse d'une atmosphère isotherme à $T = 290 \text{ K}$. Estimer la masse totale de l'atmosphère.

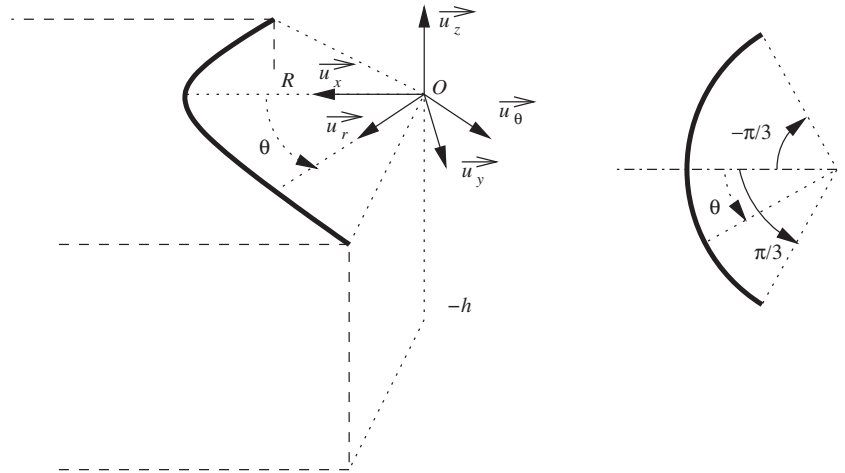
1.12

PT Résultante des forces sur un barrage cylindrique

Le mur d'un barrage a la forme d'un arc de cylindre de rayon R , de hauteur h et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Le paramétrage des points de cette paroi en coordonnées cylindriques est :

$$r = R, \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right] \text{ et } z \in [-h, 0]$$

En amont du barrage, l'eau, fluide incompressible de masse volumique ρ , remplit la vallée sur la totalité de la hauteur h . On note $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ l'accélération de la pesanteur et P_0 la pression de l'air atmosphérique.



- Donner l'expression de la pression $P(z)$.
- Justifier que la résultante des forces de pression exercée par l'eau sur la paroi du barrage s'écrit $\vec{F} = -F\vec{u}_x$.
- La force exercée sur l'élément de surface de largeur angulaire $d\theta$ et de hauteur dz s'écrit $d\vec{F} = -P(z)d\vec{S}$. Exprimer la composante dF_x selon \vec{u}_x .
- Calculer la résultante F .
- De l'autre côté du barrage, il n'y a que de l'air à la pression atmosphérique P_0 . En utilisant le résultat de la question précédente, et sans aucun calcul supplémentaire, donner l'expression de la force exercée par l'air sur le barrage et en déduire la résultante des forces de pression, air et eau, sur le barrage. Calculer la valeur de cette force en prenant $h = 50$ m et $R = 300$ m.

1.13

PT Résultante des forces de pression sur un dôme hémisphérique

Un dôme hémisphérique de rayon a est placé au fond d'une cuve contenant une hauteur H d'eau, fluide incompressible de masse volumique μ . L'air atmosphérique est à la pression P_0 . Sous le dôme, une poche d'air à la même pression est emprisonnée. Le dôme est donc soumis aux forces de pression de l'eau au dessus et à celles de l'air de la poche en dessous. On cherche à déterminer la résultante \vec{f} de toutes ces forces de pression par deux méthodes distinctes.

- a) **Méthode intégrale.** La surface du dôme est décrite en coordonnées sphériques par $r = a$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ et $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Le vecteur surface élémentaire est

$$\vec{dS} = a^2 \sin\theta d\theta d\varphi \vec{u}_r$$

- i) Déterminer la pression $P(z)$ à l'altitude z dans l'eau.
 ii) En déduire son expression $P(\theta)$ en fonction de θ et l'expression de la résultante $d\vec{f} = -df\vec{u}_r$ des forces de pression de l'air intérieur et de l'eau extérieure sur l'élément de surface.
 iii) Justifier que la résultante \vec{f} des forces de pression sur le dôme est selon \vec{u}_z . Donner l'expression de la projection $-df_z$ de $d\vec{f}$ sur cet axe.
 iv) Par un calcul intégral, en déduire la résultante $\vec{f} = -f\vec{u}_z$.
- b) **Superposition.** Le dôme peut être considéré comme la différence entre le dôme muni d'un couvercle de fond totalement immergé dans l'eau, pour lequel la loi de la poussée d'Archimède s'applique, et ce couvercle plan sur lequel les forces de pression de l'air et de l'eau sont faciles à exprimer. En déduire la résultante $\vec{f} = -f\vec{u}_z$.

Du mal à démarrer ?

1.1 On trace dans chaque cas une boîte fermée et un lacet et on cherche si, respectivement, le débit sortant et la circulation associés sont nuls ou pas.

1.2 De tels écoulements ne peuvent être associés qu'à des fluides compressibles, on pourra chercher à les décrire en considérant des gaz parfaits dans des conduites cylindriques.

1.3 La description des particularités de l'écoulement permet de les identifier très facilement. La notion de couche limite est fondamentale pour les écoulements en présence d'obstacles et peut être mémorisée.

1.4 Une exploitation poussée du graphe permet de déterminer les vitesses des particules de fluide, d'en déduire le gradient de ces vitesses, puis la durée du passage de la particule centrale de la zone de gauche à la zone de droite, et d'en déduire son accélération. L'application de la loi de la quantité de mouvement à cette particule de fluide soumise aux forces de viscosité permet de conclure.

1.5 Le fait que μ et g soient constants facilite l'intégration de la loi de la statique des fluides entre la surface en $z = 0$ et la cote $z < 0$. La résultante des forces de pression sur le cylindre se ramène à la somme de ces forces sur les deux disques horizontaux.

1.6 Le cylindre est soumis à son poids et à l'équivalent des poussées d'Archimède des deux portions immergées dans les deux fluides.

1.7 On écrit l'égalité entre les pressions à l'interface entre les deux liquides.

1.8 La conjugaison de la loi de la statique des fluides et de la loi des gaz parfaits (en termes de masse volumique) donne, quand on

exprime la température avec la formule de l'énoncé, une équation différentielle à variables séparables (z et P) qu'on intègre entre le sol et l'altitude z .

1.9 En exprimant $g(r)$ dans la loi de la statique des fluides, on obtient une équation différentielle en $P(r)$ qu'on intègre grâce à la conditions aux limites $P(R) = 0$.

1.10 L'établissement des lois donnant $P(z)$ dans les différents cas se ramène à l'intégration de la loi de la statique des fluides couplée à la loi polytropique. On pourra chercher sur le graphe • une zone isotherme • une zone polytropique, en cherchant dans les deux cas un profil particulier de température et en vérifiant si la loi de pression est cohérente.

1.11 La faible épaisseur de l'atmosphère par rapport à son rayon permet géométriquement de se ramener à un calcul d'intégrale sur une forme cylindrique dont la surface est celle de la Terre et de hauteur infinie (ce qui ne pose pas de problème pour une forme exponentielle).

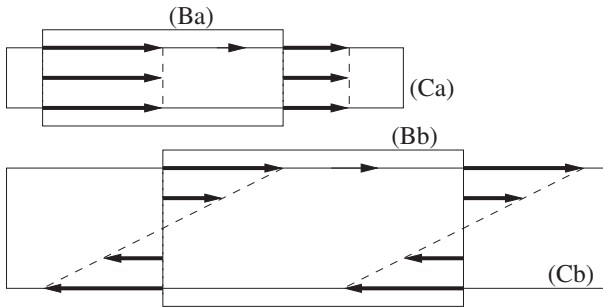
1.12 La détermination du champ de pressions utilise la loi de l'hydrostatique, on utilise les symétries du problème pour déterminer la direction de la résultante des forces de pression. On projette la force élémentaire de pression sur cet axe avant de calculer l'intégrale.

1.13 La méthode intégrale est très guidée et purement calculatoire. La méthode de superposition utilise le fait que la loi de la poussée d'Archimède peut être appliquée au dôme muni de son couvercle plan, car lui est réellement immergé (au contact de l'eau dessus et dessous). Il faut persévérer dans cet exercice jusqu'à ce que les expressions obtenues par les deux méthodes soient rigoureusement identiques.

Corrigés des exercices

1.1

- a) Le débit volumique sortant de la boîte (Ba) est négatif (le volume de fluide entrant à gauche est supérieur à celui sortant à droite). L'écoulement est donc divergent. La circulation de la vitesse le long du lacet (Ca) est nulle. On peut admettre que c'est le cas pour tout lacet et donc que l'écoulement est irrotationnel.
- b) Le débit volumique sortant de la boîte (Bb) est nul (le volume de fluide entrant à gauche est égal à celui sortant à droite). On peut admettre que c'est le cas pour toute boîte et donc que l'écoulement est non divergent. La circulation de la vitesse le long du lacet orienté (Cb) est positive dans le sens de circulation choisi. L'écoulement est rotationnel.

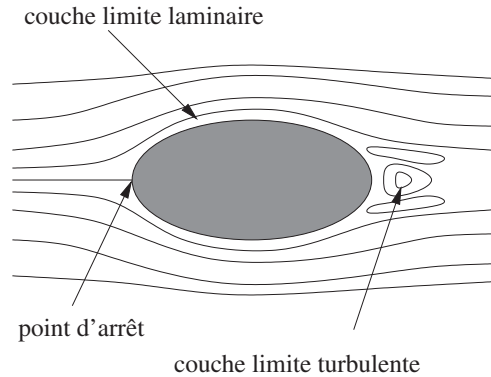


1.2

- a) En régime permanent, il peut paraître étonnant que le volume entrant ne soit pas égal au volume sortant d'une boîte fermée. Mais la loi de Lavoisier atteste que ce n'est pas le volume, mais la masse qui se conserve (et qui ne peut donc ni être créée ni être perdue). Il suffit donc que la masse volumique ne soit pas uniforme. Ainsi, dans une tuyère d'échappement cylindrique, le gaz à forte pression et à grande masse volumique entre à faible vitesse, il se détend, et sort à faible masse volumique et à forte vitesse. Le débit volumique entrant n'est pas égal au débit volumique sortant, mais le débit massique entrant est égal au débit massique sortant (il en est de même à un péage autoroutier).
- b) Imaginons de même une canalisation cylindrique dans laquelle la température T augmente au cours du temps. Un gaz à température T_0 constante entre à la vitesse v_0 et à la pression P_0 et en sort à la température $T(t)$, à la même pression P_0 et à la même vitesse v_0 . L'écoulement est donc non divergent. Comme la pression est constante et la température augmente, la masse volumique du gaz sortant diminue au cours du temps, le débit massique sortant diminue au cours du temps alors que le débit massique entrant

reste constant. La masse de gaz à l'intérieur de la canalisation augmente donc au cours du temps (de la matière s'accumule), on n'est donc pas en régime permanent.

1.3



1.4

Choisissons l'axe x horizontal, l'axe y vertical et l'axe z perpendiculaire à la figure. La particule de fluide étudiée est de volume $d\tau = dx \times b \times dz$ avec $b = 1$ cm. Ses facettes supérieure et inférieure ont une surface $dS = dx \times dz$. Sur la partie gauche de la figure, la vitesse de la particule centrale est $v_x(y) = 0,150 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Celle de la particule voisine supérieure $v_x(y+b) = 0,250 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, celle de la particule voisine inférieure $v_x(y-b) = 0,100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Les dérivées de la composante horizontale de la vitesse par rapport à y sont estimées sur les facettes supérieure et inférieure :

$$\begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial y}_{\text{sup}} \approx \frac{v_x(y+b) - v_x(y)}{b} = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y}_{\text{inf}} \approx \frac{v_x(y-b) - v_x(y)}{b} = -5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} \end{cases}$$

Par application de la formule du cours, les forces de viscosité correspondantes sont

$$\begin{cases} \vec{dF}_{\text{sup}} = \eta \cdot 10 \cdot dx dz \vec{u}_x \\ \vec{dF}_{\text{inf}} = -\eta \cdot 5 \cdot dx dz \vec{u}_x \end{cases}$$

L'accélération de la particule de fluide est estimée ainsi. À une distance de $\Delta x = 5,5$ cm sur la même ligne de courant, la vitesse vaut $0,175 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Elle est donc peu différente de sa valeur initiale et on peut considérer que cette distance a été parcourue en une durée proche de $\Delta t = \frac{\Delta x}{0,15} = 0,367$ s. L'accélération de la particule de fluide est donc estimée à

$$a = \frac{dv}{dt} \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0,175 - 0,150}{0,367} = 0,068 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Par application de la loi de la quantité de mouvement à la particule de fluide :

$$\begin{aligned} \mu d\tau \vec{a} &= \vec{dF}_{\text{sup}} + \vec{dF}_{\text{inf}} \text{ donc} \\ \mu b dx dz \cdot 0,068 &= \eta \cdot 10 \cdot dx dz - \eta \cdot 5 \cdot dx dz \\ \text{et } \eta &= \frac{0,068 \mu b}{5} = 0,20 \text{ Pl} \end{aligned}$$

1.5

a) La loi de la statique des fluides s'écrit

$$-\vec{\text{grad}} P + \mu \vec{g} = \vec{0} \text{ soit } \begin{cases} -\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ -\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ -\frac{\partial P}{\partial z} - \mu g = 0 \end{cases}$$

donc P ne dépend que de z et

$$\frac{dP(z)}{dz} = -\mu g \text{ donc } P(z) = -\mu g z + K$$

et la condition aux limites donne

$$P_0 = 0 + K \text{ donc } P(z) = P_0 - \mu g z$$

b) La résultante des forces de pression sur la face latérale du cylindre est nulle car le dispositif est symétrique par rapport à tout plan passant par l'axe du cylindre. Les pressions sur les faces planes supérieure et inférieure du cylindre sont

$$\begin{cases} P(z_0) = P_0 - \mu g z_0 \\ P(z_0 - H) = P_0 - \mu g (z_0 - H) \end{cases}$$

On en déduit la résultante des forces de pression

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -[P_0 - \mu g z_0] S \vec{u}_z + [P_0 - \mu g (z_0 - H)] S \vec{u}_z \\ \text{soit } \vec{F} &= \mu S H g \vec{u}_z \end{aligned}$$

c) SH est le volume du cylindre, donc celui du fluide déplacé, μSH est donc la masse du fluide déplacé, et \vec{F} est l'opposé du poids de volume du fluide déplacé, c'est donc bien la poussée d'Archimède.

1.6

Le cylindre est à l'équilibre sous l'action de son poids et des poussées d'Archimède qui s'exercent sur ses deux parties. En notant S sa section :

$$-\mu S H g + \mu_1 S h_1 g + \mu_2 S h_2 g = 0$$

avec $h_1 + h_2 = H$ donc

$$h_1 = \frac{\mu - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \cdot H$$

Le cylindre est à l'interface si $0 < h_1 < H$ soit si $0 < \frac{\mu - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} < 1$. Or $\mu_1 > \mu_2$ donc la double inégalité s'écrit

$$0 < \mu - \mu_2 < \mu_1 - \mu_2 \text{ donc } \mu_2 < \mu < \mu_1$$

1.7

Il y a égalité entre les pressions à l'interface entre les deux fluides. Par application de la loi de l'hydrostatique dans les deux colonnes

$$P_0 + \mu_1 g H = P_0 + \mu_2 g h \text{ donc } h = \frac{\mu_1}{\mu_2} H$$

1.8

On associe la loi de la statique des fluides en projection sur l'axe vertical et la loi des gaz parfaits

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{dP(z)}{dz} = -\mu(z)g \\ P(z)M = \mu(z)RT(z) \end{cases} &\text{ donc } \frac{dP(z)}{dz} = -\frac{P(z)Mg}{R(T_0 - Az)} \\ \text{soit } \frac{dP(z)}{P(z)} &= -\frac{Mg dz}{R(T_0 - Az)} \end{aligned}$$

On intègre cette équation à variables séparables entre ($z = 0, P_0$) et ($z, P(z)$) :

$$\begin{aligned} \int_0^z \frac{dP(z)}{P(z)} &= \frac{Mg}{AR} \int_0^z \frac{-Adz}{-Az + T_0} \\ \text{donc } [\ln P(z) - \ln P_0] &= \frac{Mg}{AR} [\ln(-Az + T_0) - \ln T_0] \\ \text{soit } P(z) &= P_0 \left[\frac{T_0 - Az}{T_0} \right]^{\frac{Mg}{AR}} \end{aligned}$$

1.9

On écrit la loi de la statique des fluides en projection sur \vec{u}_r

$$\begin{aligned} \frac{dP(r)}{dr} &= -\mu g(r) = -\frac{4}{3} \mathcal{G} \pi \mu^2 r \\ \text{donc } P(r) &= -\frac{2}{3} \mathcal{G} \pi \mu^2 r^2 + K \end{aligned}$$

La condition aux limites est la nullité de la pression à la surface de la planète (en l'absence d'atmosphère, on est dans le vide), soit $P(R) = 0$, soit

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{2}{3} \mathcal{G} \pi \mu^2 R^2 + K \\ \text{donc } K &= \frac{2}{3} \mathcal{G} \pi \mu^2 R^2 \end{aligned}$$

La pression au centre de la planète est

$$P(0) = K = \frac{2}{3} \mathcal{G} \pi \mu^2 R^2$$

Par définition de la masse volumique

$$\mu = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$\text{donc } P(0) = \frac{3\mathcal{G}M^2}{8\pi R^4}$$

1.10

a) La loi des gaz parfaits s'écrit $PM = \mu RT$. $\alpha = 0$ donne $P(z) = P_0$, correspondant à une atmosphère isobare. $\alpha = 1$ donne $\frac{P(z)}{\mu(z)} = \frac{P_0}{\mu_0}$ soit $\frac{RT(z)}{M} = \frac{RT_0}{M}$ donc $T(z) = T_0$, correspondant à une atmosphère isotherme. $\alpha = \gamma$ correspond à $P(z)\mu^{-\gamma}(z) = P_0\mu_0^{-\gamma}$ soit $P(z)V^\gamma = P_0V_0^\gamma$, loi de Laplace correspondant à une atmosphère isentropique.

b) C'est le cas du cours, atmosphère isotherme :

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{PMg}{RT_0} \text{ donc } P(z) = P_0 e^{-\frac{Mgz}{RT_0}}$$

c) La loi polytropique donne

$$\mu(z) = \mu_0 \frac{P^{\frac{1}{\alpha}}}{P_0^{\frac{1}{\alpha}}}$$

La loi de la statique des fluides donne donc une équation à variables séparables :

$$\frac{dP}{dz} = -\mu_0 g \frac{P^{\frac{1}{\alpha}}}{P_0^{\frac{1}{\alpha}}} \Rightarrow P^{-\frac{1}{\alpha}} dP = -\mu_0 g P_0^{-\frac{1}{\alpha}} dz$$

qu'on intègre membre à membre entre $(z = 0, P = P_0)$ et $(z, P(z))$:

$$\frac{P^{-\frac{1}{\alpha}+1} - P_0^{-\frac{1}{\alpha}+1}}{-\frac{1}{\alpha}+1} = -\mu_0 g P_0^{-\frac{1}{\alpha}} [z-0]$$

On tire $P(z)$ de cette relation

$$P(z) = P_0 \left[1 - \frac{(\alpha-1)\mu_0 g z}{\alpha P_0} \right]^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

$$= P_0 \left[1 - \frac{(\alpha-1)}{\alpha} \cdot \frac{Mgz}{RT_0} \right]^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

d) On distingue clairement que pour $z > 200$ km, T est constante et l'atmosphère est isotherme. La loi établie à la question (b) donne alors

$$\ln P(z) = \ln P_0 - \frac{Mgz}{RT}$$

ce qui est confirmé sur le graphe où l'échelle logarithmique en pression à gauche correspond à l'échelle linéaire en altitude. Voici le tableau de correspondance

P (Pa)	10^2	10^1	10^0	10^{-1}
ln P	4,605	2,303	0	-2,303
z ($\cdot 10^3$ m)	200	290	380	470

La régression linéaire donne $R = 0,99999$ ce qui confirme la validité de l'hypothèse d'atmosphère isotherme. Le coefficient directeur vaut

$$-\frac{Mg}{RT} = -2,558 \cdot 10^{-5}$$

En prenant $T = 190$ K, on en déduit $M = 25 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. La masse molaire moyenne d'un gaz constitué de 95% de diazote et de 5% de méthane est

$$M = 0,95 \cdot 28 + 0,05 \cdot 16 = 27,4 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

L'accord est donc acceptable. Pour des altitudes inférieures, la loi de l'atmosphère polytropique combinée à la loi des gaz parfaits donne une relation

$$P^{1-\alpha} T^\alpha = P_0^{1-\alpha} T_0^\alpha$$

$$\text{soit } P = P_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

$$\text{donc } \ln P = \ln P_0 + \frac{\alpha}{\alpha-1} \frac{T}{T_0}$$

La courbe de température est sensiblement affine, de pente positive en fonction de P en échelle logarithmique pour $z < 50$ km, ce qui valide le modèle. La pente vaut

$$\frac{\alpha}{\alpha-1} = \frac{\ln 10^4 - \ln 10^5}{75 - 88} = 0,177$$

En prenant $T_0 = 90$ K, on identifie

$$\frac{\alpha}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{T_0} = 0,177 \text{ donc } \alpha = 1,07$$

Cette valeur est comparable à γ , mais l'écart est assez important. Pour valider ou non le modèle, on doit vérifier la conformité de l'évolution avec l'altitude, même si l'échelle n'est pas régulière aux basses altitudes. La loi théorique obtenue pour $P(z)$ donne une pression nulle quand

$$z = \frac{\alpha RT_0}{(\alpha-1)Mg} = 58 \text{ km}$$

ce qui n'est pas conforme au graphe. Le modèle isentropique pour les basses altitudes est donc faux : il est en fait difficile d'imaginer une évolution adiabatique pour une lune soumise au rayonnement du Soleil et de Saturne.

1.11

La loi de la statique des fluides pour un gaz parfait s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dP}{dz} = -\mu g \\ PM = \mu RT \end{array} \right. \quad \text{donc} \quad \frac{dP}{dz} = -\frac{Mg}{RT} P$$

donc $P(z) = P_0 e^{-\frac{Mgz}{RT}}$ en supposant g uniforme. On en déduit la masse volumique $\mu(z) = \frac{P_0 M}{RT} e^{-\frac{Mgz}{RT}}$. On peut écrire l'exponentielle sous la forme $e^{-\frac{z}{\delta}}$ avec $\delta = \frac{RT}{Mg} = 8\,300$ m. L'épaisseur de l'atmosphère est donc de l'ordre de $5\delta \approx 40$ km $\ll R_T$. À cette altitude, g a très peu varié. De plus, on peut donc assimiler l'atmosphère à un cylindre de base $S = 4\pi R_T^2$. On intègre $\mu(z)$ entre 0 et l'infini :

$$m_a = S \cdot \int_{z=0}^{+\infty} \mu(z) dz$$

$$m_a = \frac{SP_0 M}{RT} \left[-\frac{RT}{Mg} e^{-\frac{Mgz}{RT}} \right]_0^{+\infty} = \frac{SP_0}{g}$$

Ce résultat est très naturel : avec les différentes approximations faites, P_0 est le rapport entre le poids total $m_a g$ de l'atmosphère et la surface $S = 4\pi R_T^2$ sur laquelle il s'exerce. soit $m_a \approx 5 \cdot 10^{18}$ kg.

1.12

- a) Par application de la loi de l'hydrostatique, $P(z) = P_0 - \rho g z$.
- b) Le plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie pour la répartition du fluide, donc la force résultante est dans le plan (\vec{u}_x, \vec{u}_z) . En tout point de la paroi du barrage, l'élément de surface a pour vecteur unitaire normal \vec{u}_r qui est horizontal, donc la résultante de ces forces est horizontale. Le vecteur \vec{F} est donc selon l'intersection du plan (\vec{u}_x, \vec{u}_z) avec un plan horizontal, donc il est selon \vec{u}_x . Il est dirigé de l'eau vers le barrage, donc $\vec{F} = -F \vec{u}_x$.
- c) On décompose le vecteur unitaire : $\vec{u}_r = \cos\theta \vec{u}_x + \sin\theta \vec{u}_y$. On en déduit, en utilisant l'expression de l'élément de surface de la paroi latérale d'un cylindre donnée dans le cours :

$$dF_x = -P(z) dS \cos\theta = -[P_0 - \rho g z] \cos\theta \cdot R d\theta dz$$

- d) On calcule l'intégrale double des forces élémentaires de pression :

$$F = \int_{z=h}^0 [P_0 - \rho g z] dz \int_{\theta=-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} R \cos\theta d\theta$$

$$F = \left[P_0 z - \rho g \frac{z^2}{2} \right]_{-h}^0 \left[R \sin\theta \right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$F = \left[P_0 h + \rho g \frac{h^2}{2} \right] \cdot \left[R \frac{\sqrt{3}}{2} - R \frac{-\sqrt{3}}{2} \right] = P_0 h R \sqrt{3} \left[1 + \frac{\rho g h}{2P_0} \right]$$

- e) La force exercée par l'air est exactement opposée en sens à celle exercée par l'eau et il suffit de prendre $\rho = 0$; elle vaut donc $\vec{F}' = -P_0 h R \sqrt{3} \vec{u}_x$. La somme des forces vaut donc

$$\vec{F} + \vec{F}' = \frac{\rho g h^2 R \sqrt{3}}{2} \vec{u}_x$$

donc sa valeur est 6,5 GN.

1.13

- a) **Méthode intégrale.**

i) La loi de l'hydrostatique donne $P(z) = P_0 + \mu g(H - z)$.

ii) θ est l'angle entre la verticale et le vecteur \vec{OM} donc $z = a \cos\theta$ et $P(\theta) = P_0 + \mu g(H - a \cos\theta)$. Du côté de la poche d'air, la pression vaut P_0 . La résultante des forces de pression vaut donc

$$d\vec{f} = +P_0 d\vec{S} - P(\theta) d\vec{S}$$

$$d\vec{f} = -\mu g(H - a \cos\theta) a^2 \sin\theta d\theta d\varphi \vec{u}_r$$

iii) Le problème est symétrique par rapport à tout plan passant par l'axe vertical de révolution de l'hémisphère. La force de pression est donc selon \vec{u}_z et

$$df_z = -df \cos\theta = -\mu g a^2 \sin\theta \cos\theta (H - a \cos\theta) d\theta d\varphi$$

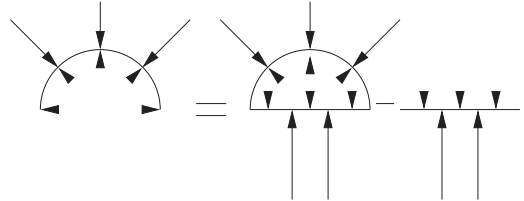
iv) On en déduit la force

$$f = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} df_z$$

$$f = -\mu g a^2 \left[H \frac{\sin^2\theta}{2} + a \frac{\cos^3\theta}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} [\varphi] d\varphi$$

$$f = -\mu \left[\pi a^2 H - \frac{2}{3} \pi a^3 \right] g$$

- b) **Superposition.** Le schéma explicatif est le suivant :



Sur le schéma du milieu (dôme couverte), les forces intérieures de pression s'annulent (surface fermée soumise à une pression uniforme) et la résultante des forces extérieures est égale à la poussée d'Archimède, soit $\mu \cdot \frac{2}{3} \pi a^3 g \vec{u}_z$. Sur le schéma de droite (couverture seule), la résultante des forces de pression est la somme de celles de l'air, soit $-P_0 \pi a^2 g \vec{u}_z$ et de celles de l'eau, soit $(P_0 + \mu g H) \pi a^2 g \vec{u}_z$. La résultante cherchée est donc

$$\vec{f} = \mu \frac{2}{3} \pi a^3 g \vec{u}_z -$$

$$\left[-P_0 \pi a^2 g \vec{u}_z + (P_0 + \mu g H) \pi a^2 g \vec{u}_z \right]$$

$$\vec{f} = \mu g \pi a^2 \left[\frac{2a}{3} - H \right] \vec{u}_z$$

On retrouve donc bien le résultat précédent.