

Michel Dobrijevic et Françoise Billebaud

Introduction à la théorie des systèmes

Applications au système Terre

DUNOD

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du

Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 2023

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-085406-6

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^o et 3^o a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

85406 - (I) - OSB 80 - LUM - CMU

Dépôt légal : juillet 2023

Imprimé en France par la Nouvelle Imprimerie Laballery

58500 Clamecy

Table des matières

1	Les systèmes simples	1
1.1	Qu'est-ce qu'un système ?	1
1.1.1	Définitions	1
1.1.2	Exemples de systèmes	5
1.1.3	Représentation schématique d'un système	5
1.1.4	Du réel au modèle	6
1.1.5	Mise en équations	9
1.1.6	Résolution mathématique	11
1.2	Exercices	14
1.2.1	Équation différentielle du premier ordre à coefficients constants	14
1.2.2	Systèmes simples à flux constants	15
1.2.3	Le système simple à une entrée et une sortie	17
1.2.4	Système simple à flux variables	21
1.3	Certains points importants à retenir...	26
2	Les boucles de rétroaction	27
2.1	Définitions	27
2.2	La boucle de rétroaction de stabilisation	28
2.2.1	Définition	28
2.2.2	Exemples	28
2.2.3	Mise en équations	29
2.2.4	Terminologie	31
2.3	La boucle de rétroaction de renforcement	31
2.3.1	Définition	31
2.3.2	Exemples	31
2.3.3	Mise en équations	32
2.4	Exercices	33
2.4.1	La température d'un verre d'eau	33
2.4.2	La température d'un système thermostaté	35

2.4.3	Croissance exponentielle	37
2.4.4	La dynamique d'une population	40
2.5	Certains points importants à retenir...	43
3	Les systèmes couplés	45
3.1	Exemples de systèmes couplés	45
3.1.1	Exemple 1 : vidange et remplissage	45
3.1.2	Exemple 2 : flux dépendants des réservoirs	48
3.2	Exemple d'application : les épidémies	49
3.2.1	Représentation par des systèmes	49
3.2.2	Mise en équation	51
3.3	Systèmes ouverts et systèmes fermés	52
3.3.1	Système fermé	52
3.3.2	Système ouvert	54
3.4	Exercices	55
3.4.1	Système couplé simple	55
3.4.2	Exemple de modélisation des épidémies	56
3.4.3	Système ouvert	58
3.5	Certains points importants à retenir...	59
4	Les systèmes avec délais	61
4.1	De l'ubiquité des délais	61
4.2	Un système simple avec délai	62
4.3	Vers un système plus réaliste	64
4.4	Système à deux réservoirs	67
4.5	Instantanéité	69
4.6	Exercices	71
4.6.1	Fluctuation des flux	71
4.6.2	La gestion du stock d'un vendeur	76
4.7	Certains points importants à retenir...	83
5	La limite à la croissance	85
5.1	Une BRR avec un réservoir non renouvelable	85
5.1.1	La croissance est limitée	87
5.1.2	Un effondrement rapide	87
5.2	Une BRR avec un réservoir renouvelable	89
5.2.1	Un système qui se stabilise...	90
5.2.2	...après un effondrement violent	91
5.3	Une BRR avec un réservoir de capacité limitée	92
5.4	Le modèle prédateur-proie	93

5.5	Exercices	96
5.5.1	Les équations de Lotka-Volterra	96
5.5.2	Un système à trois réservoirs	98
5.6	Certains points importants à retenir...	101
6	Sources et exutoires	103
6.1	Le système Terre	103
6.1.1	Les sources	105
6.1.2	Les exutoires	108
6.2	Le sous-système économique	109
6.2.1	Couplage avec le système Terre	109
6.2.2	L'exploitation des ressources naturelles	109
6.2.3	Un système économique de base	110
6.2.4	Un système économique contraint par un réservoir non renouvelable	112
6.2.5	Un point de vocabulaire	113
6.3	Exercices	114
6.3.1	Le cycle du carbone	114
6.3.2	Exemple d'un système économique lié à l'extraction minière	117
6.4	Certains points importants à retenir...	122
7	Dynamique des populations	125
7.1	Rappel sur la dynamique d'une population	125
7.1.1	Une dynamique contrainte par l'environnement	126
7.1.2	L'équation logistique	127
7.1.3	Exemple	128
7.2	Gestion durable d'une exploitation forestière	130
7.2.1	Le système	130
7.2.2	Durabilité de l'exploitation	132
7.3	Dynamique de populations insulaires	133
7.3.1	Le modèle	133
7.3.2	Les équations différentielles	134
7.3.3	Le point fixe	134
7.3.4	Gestion raisonnée et seuil de durabilité	135
7.4	Exercices	138
7.4.1	Système et équation logistique	138
7.4.2	Une activité de pêche durable	140
7.4.3	Pyramide des âges	142
7.4.4	Impacts anthropiques sur un écosystème	146
7.5	Certains points importants à retenir...	154

8 Homéostasie et hystérésis	155
8.1 Le système thermostaté	156
8.2 Le monde des marguerites	156
8.2.1 Homéostasie planétaire	156
8.2.2 Présentation du modèle	157
8.2.3 Mise en équations du modèle	159
8.2.4 La température d'équilibre	160
8.2.5 Résolution du système d'équations	163
8.2.6 Les principaux résultats du monde des marguerites	163
8.3 Exercice	164
8.3.1 Un modèle proche de celui de Watson et Lovelock	164
8.4 Certains points importants à retenir...	174
9 Résilience et point de basculement	177
9.1 Un écosystème avec seuil	177
9.1.1 Seuil de régénération	177
9.1.2 Seuil de prélèvement	179
9.2 Application à des cas réels	182
9.3 Exercices	183
9.3.1 Pollution d'un lac	183
9.3.2 Circulation thermohaline dans les océans	197
9.4 Certains points importants à retenir...	206
10 Évolution ponctuée	209
10.1 Dynamique des populations	209
10.1.1 Capacité limite dépendant du temps	209
10.1.2 Système avec délai	210
10.2 Un modèle d'évolution ponctuée	211
10.3 Exercices	213
10.3.1 La capacité limite dépend du temps	213
10.3.2 Système avec délai	214
10.3.3 Augmentation de la capacité limite	217
10.3.4 Augmentation de la capacité limite jusqu'à un maximum	220
10.3.5 Diminution de la capacité limite	221
10.4 Discussion	223
10.5 Certains points importants à retenir...	224

11	Systèmes chaotiques	225
11.1	Convection dans les fluides terrestres	225
11.2	Le modèle météorologique de Lorenz	226
11.3	Sensibilité aux conditions initiales	229
11.4	L'effet papillon	229
11.5	Exercices	230
11.5.1	Les équations de Lorenz	230
11.5.2	Stabilisation d'un système chaotique	233
11.6	Certains points importants à retenir...	237
12	Épilogue	239
A	Bestiaire des systèmes élémentaires	247
A.1	Les systèmes fermés	247
A.2	Les systèmes ouverts à coefficients constants	248
A.2.1	Le système I.1	248
A.2.2	Le système I.2	249
A.2.3	Le système I.3	250
A.2.4	Le système I.4	250
A.3	Les systèmes ouverts à flux adaptatifs	251
A.3.1	Le système II.1	252
A.3.2	Le système II.2	253
A.3.3	Le système II.3	254
A.3.4	Le système II.4	254
A.3.5	Suppression des singularités	254
A.4	Les systèmes ouverts à flux adaptatifs et double rétroaction	256
A.4.1	Le système III.1	257
A.4.2	Le système III.2	257
A.4.3	Le système III.3	257
A.4.4	Le système III.4	257
A.5	Les systèmes ouverts à coefficients non constants	258
A.6	Application aux systèmes réels	258

Avant-propos

Les systèmes sont partout autour de nous : les micro-organismes, les plantes, les humains, les organisations politiques, les villes, le réseau internet et les planètes sont des systèmes. Nous pouvons même nous demander si tout est système, des particules élémentaires jusqu'à l'Univers dans son ensemble. Tous les systèmes, composés d'éléments en interaction, sont différents les uns des autres mais ils partagent des propriétés et des caractéristiques communes qui peuvent être appréhendées par des modèles simples.

Le principal objectif de ce cours est de donner les bases de la théorie des systèmes afin de les utiliser pour modéliser certaines parties du monde qui nous entoure. Des exemples variés sont présentés et traités sous forme d'exercices. Cela concerne par exemple le système Terre, la propagation de virus, la dynamique des populations, la convection dans les fluides et notre système socio-économique. En particulier, certaines propriétés remarquables des systèmes permettent de mieux comprendre comment une société peut être durable (et donc pourquoi elle peut éventuellement ne pas l'être et disparaître).

À l'école, et même à l'université (notamment dans la filière Physique), l'apprentissage des sciences est basé sur l'analyse **réductionniste** des systèmes. On nous apprend à en reconnaître et à en étudier les éléments et à chercher les liens directs qui les relie. Ainsi, on pense souvent que l'évolution d'un système dans son ensemble est provoquée par des causes extérieures alors que son comportement est souvent dicté principalement par sa dynamique propre. Nous verrons par exemple que dans un écosystème, les oscillations de population sont inhérentes au système et non causées par des facteurs extérieurs (qui peuvent aussi jouer un rôle évidemment). Nous présenterons, dans ce cours, de nombreux systèmes et leur dynamique propre pour illustrer cet aspect.

L'étude **holistique** des systèmes (l'étude de l'ensemble plutôt que des parties) ne remplace pas l'étude **réductionniste** (l'étude des parties et de leurs interactions directes). Ces deux approches sont complémentaires et offrent une description plus complète du système étudié.

Pour dissiper tout éventuel malentendu, insistons sur ce que ce cours n'est pas. Bien qu'il sera question, dans certains chapitres, de résilience et de durabilité des sociétés, il ne s'agit pas ici de faire la liste (même partielle) des atteintes au système Terre et donc de détailler l'état de la planète et de notre société. L'objectif de ce cours est d'acquérir les outils généraux et fondamentaux pour étudier ces systèmes. Ce livre n'est pas non plus un cours de Sciences de la Vie et de la Terre, ni un cours d'économie, etc. Les exemples que nous avons choisis ne sont pas aussi détaillés qu'ils le seraient dans un cours spécifique. Ce n'est pas non plus un ouvrage complet sur **la théorie des systèmes** et sur les **systèmes dynamiques**.

Notre approche est plus pratique que théorique. Elle consiste à traiter des exemples de systèmes pris dans différentes disciplines. La principale originalité de ce cours est de transformer chacun des systèmes réels étudiés en un schéma simple composé de **réservoirs** et de **variateurs de flux**. Puis, à partir de ce schéma, nous montrons comment écrire simplement le système d'équations différentielles correspondant. La diversité des exemples traités permet de mieux comprendre le caractère universel de notre méthodologie. Pour chaque système, il s'agit ensuite de résoudre un système d'équations différentielles non-linéaires et couplées qui dépendent du temps. Cette résolution s'effectue algébriquement (quand cela est possible) pour rechercher les états d'équilibre et étudier leur stabilité et numériquement en écrivant un programme informatique qui résout ces équations. Nous avons restreint notre cours aux problèmes qui peuvent se résoudre simplement avec un petit programme. Un exemple de programme écrit en *Python* est d'ailleurs fourni pour aider le lecteur à résoudre les exercices proposés.

Les notions sont présentées de manière graduelle au fur et à mesure de l'avancement des chapitres. Le niveau de difficulté est globalement croissant et certaines notions sont vues plusieurs fois car on les aborde avec de plus en plus de détails. Nous invitons donc le lecteur qui découvre totalement le sujet, à suivre l'ordre des chapitres. Les termes importants sont en gras et indexés à la fin de l'ouvrage, où le lecteur trouvera aussi un glossaire qui rappelle les définitions de certains de ces termes.

Nous pensons que la représentation des éléments des systèmes et de leurs interactions sous la forme de schémas, composés de réservoirs et de flux d'entrée et de sortie, est un outil pédagogique intéressant pour faire le lien entre les différents systèmes réels complexes que l'on rencontre dans toutes les disciplines. Ces schémas aident aussi à écrire les équations différentielles qui régissent le comportement de chaque système (et qui peuvent rebuter certains étudiants).

La théorie des systèmes a un aspect pluridisciplinaire mais surtout fédérateur. Elle montre que les systèmes, qui sont très diversifiés et que l'on peut être amené à étudier dans différentes disciplines, ont des particularités communes. Maîtriser un

système dans un domaine ouvre une porte vers la compréhension de ce même type de système dans des domaines totalement différents.

Ce cours et les exercices associés s'inspirent des très intéressants ouvrages de Donella Meadows et de ses collègues et notamment des livres : *Les limites à la croissance (dans un monde fini)*, D. H. Meadows, D. L. Meadows (son mari) et J. Randers (2004, 2012)¹ et *Thinking in Systems* de D. H. Meadows (2008)². Nous invitons le lecteur à approfondir ce cours en lisant ces deux ouvrages. Certains exemples proviennent du récent « rapport Dasgupta » publié en 2021 : *The Economics of Biodiversity : the Dasgupta Review*.

Avertissements : les modèles très simples présentés dans cet ouvrage simulent des phénomènes réels. Cependant, la plupart du temps, l'objectif est principalement pédagogique. Ainsi, les coefficients utilisés dans les équations n'ont pas forcément des valeurs proches de celles qu'ils devraient avoir pour simuler les phénomènes avec une certaine vraisemblance. La recherche des coefficients les plus appropriés demande des connaissances spécifiques du phénomène étudié. Ce serait l'objet de présentations longues et techniques qui dépassent le cadre de cet ouvrage.

Nous souhaitons également attirer l'attention du lecteur sur l'aspect suivant. Les outils de modélisation et concepts associés présentés ici permettent d'explorer certaines caractéristiques et propriétés des systèmes naturels et donc de comprendre certains de leurs comportements parfois contre-intuitifs ou étonnants. Ces outils nous informent aussi en partie sur les conséquences que peuvent engendrer certaines décisions dites « de gestion ». Cependant, ce cours n'est pas pour autant un encouragement à réduire les systèmes naturels à de simples modélisations mathématiques avec une finalité utilitaire. Les systèmes naturels sont bien plus que cela et aucune modélisation, quelle qu'elle soit, ne peut nous dispenser de nous interroger sur notre relation à notre biosphère et les enjeux éthiques et moraux qui lui sont liés.

Enfin, bien que le séparateur décimal soit la virgule en français, le langage de programmation *Python* utilise la convention anglaise dans laquelle le séparateur décimal est le point. Nous avons décidé, dans cet ouvrage, dans le but de garder une cohérence entre les figures écrites en *Python* et le texte, d'adopter la convention anglaise, c'est-à-dire le point.

1. D. H. Meadows, D. L. Meadows, J. Randers. *Les limites à la croissance (dans un monde fini)*. Édition Rue de l'échiquier. 2012.

2. D. H. Meadows. *Thinking in Systems. A Primer*. Sustainability institute. Chelsea Green Publishing. 2008.

Chapitre 1

Les systèmes simples

Nous allons définir dans ce chapitre les premiers systèmes simples sur lesquels repose toute l'étude des systèmes.

1.1 Qu'est-ce qu'un système ?

1.1.1 Définitions

Un **système** est un ensemble d'éléments (les différentes parties du système) qui sont en interaction les uns avec les autres. La **limite du système** permet de le distinguer des autres systèmes de son environnement (voir la Figure 1.1). Cette **limite spatiale** est arbitraire et n'est pas nécessairement physique, elle dépend du problème que l'on se pose à propos du système. Il existe aussi une **limite temporelle** (on étudie généralement un système dans un intervalle de temps défini). Le nombre et le type des éléments à l'intérieur de la limite physique ainsi que les interactions entre ces éléments peuvent varier dans le temps.

Les **éléments** d'un système peuvent être de différents types selon la nature du système : des entités matérielles que l'on peut voir, mesurer, compter ; ou des choses plus abstraites que l'on peut ressentir, conceptualiser, etc. Ces éléments interagissent entre eux en échangeant au cours du temps de la matière, de l'énergie et/ou de l'information.

Il y a de nombreux types d'**interaction** entre les éléments. On peut citer la dépendance d'un élément envers un autre élément du système (les êtres vivants ont besoin de se nourrir), la **compétition** (différents éléments d'un système convoitent les mêmes ressources, par exemple), les relations sociales au sein d'une communauté, etc. Les interactions sont caractérisées par des **flux** (nombre d'entités qui entrent et qui sortent des éléments par unité de temps).

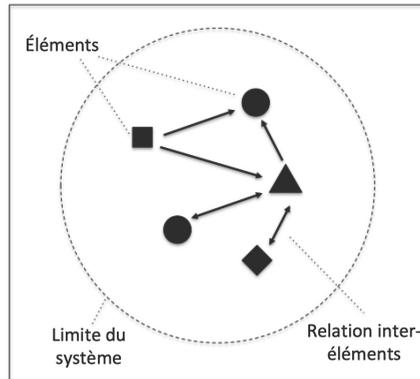


FIGURE 1.1 – Schéma général d'un système constitué de divers éléments (représentés par des formes géométriques différentes) en interaction (représentées par des flèches). La limite du système est en pointillés.

Ainsi, pour identifier un système, il ne faut pas seulement répertorier les éléments qui le constituent mais aussi les interactions entre ces éléments. Dans de nombreux systèmes réels, il est difficile de trouver toutes les interactions entre les différentes parties du système ; elles ne sont d'ailleurs pas toujours connues ou nous ne connaissons pas toujours leurs rôles.

Système élémentaire

Le plus simple des systèmes non vides est celui qui est constitué d'un réservoir, d'un flux entrant et d'un flux sortant. On peut l'appeler le **système élémentaire**.

Un **réservoir** est caractérisé par son contenu représenté par un nombre qui évolue dans le temps et qui dépend du flux d'entrée et du flux de sortie. Le système élémentaire est représenté sur la Figure 1.2.

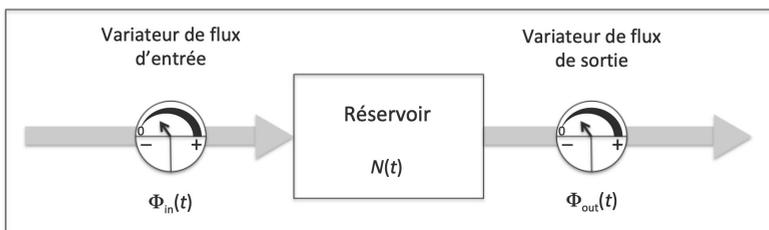


FIGURE 1.2 – Représentation schématique d'un système élémentaire composé d'un réservoir avec son flux entrant et son flux sortant. Le contenu du réservoir est caractérisé par une quantité mathématique notée $N(t)$ qui évolue dans le temps. Les flux $\Phi_{in}(t)$ et $\Phi_{out}(t)$ sont ajustés par des variateurs de flux qui dépendent aussi du temps.

Système à plusieurs éléments

Chaque élément d'un système est *a priori* un **sous-système**. Dans sa configuration la plus simple, un sous-système est un système élémentaire avec un réservoir et des flux propres. Un système peut aussi être un élément d'un **métasystème** et interagir avec d'autres systèmes. La Figure 1.3 montre des éléments qui interagissent entre eux dans un espace délimité et qui s'associent pour former des systèmes. Ces systèmes sont à leur tour des éléments qui peuvent interagir et s'associer entre eux dans un espace délimité pour former un nouveau système plus complexe. Il est important de garder en mémoire que ces éléments ne sont pas forcément des objets physiques, ils peuvent être des concepts, des idées, etc.

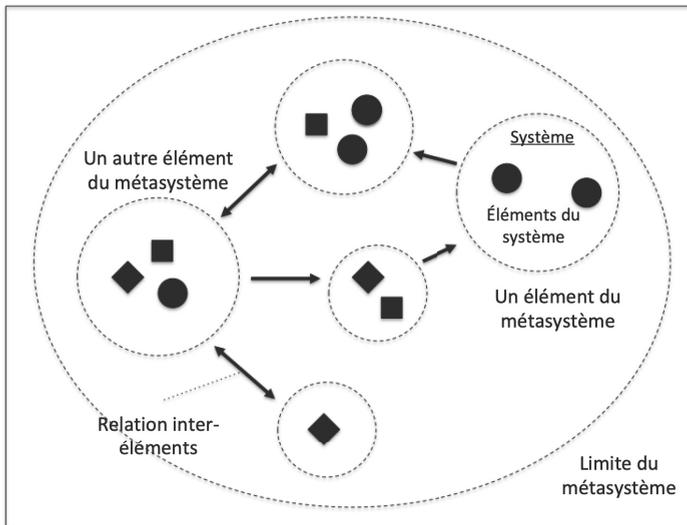


FIGURE 1.3 – Exemple d'un métasystème constitué de divers éléments en interaction. Chacun des éléments du métasystème est un système constitué d'éléments qui interagissent entre eux à l'intérieur du système. Les limites de chaque système et du métasystème sont en pointillés.

Fonction d'un système

Il est généralement plus facile d'identifier les éléments d'un système (par exemple : les organes du corps humain et les planètes du Système solaire) que de comprendre comment ils interagissent (par échange biochimique ou par interaction gravitationnelle). Il est bien plus difficile de comprendre quel est leur rôle au sein du système qui les englobe. Les systèmes ont une **fonction**. Cette fonction peut éventuellement être déterminée en observant l'évolution du système (on connaît la fonction du cœur : distribuer le sang dans l'ensemble de l'organisme). Bien évidemment,

la fonction première de tout système est de conserver son intégrité (protection, alimentation, etc.) et de pérenniser son existence (copie, reproduction), sinon il disparaît rapidement. Cependant, les systèmes ont d'autres fonctions dont le métasystème qui les englobe peut bénéficier. Un sous-système n'a pas obligatoirement besoin d'être conscient de son rôle dans un métasystème. En retour, le métasystème, grâce aux interactions entre les différents sous-systèmes, peut faciliter leur pérennisation. On appelle cet emboîtement de système la **hiérarchisation** des systèmes.

L'ensemble des parties et de leurs interactions forme *un tout cohérent qui est plus que la somme de ses parties*. Ainsi, les systèmes ont la capacité d'évoluer, de s'auto-organiser et de s'adapter aux changements extérieurs pour conserver leur intégrité. Nous verrons plusieurs exemples dans ce cours. En particulier, l'**auto-organisation** est la capacité d'un système à se structurer et à se complexifier en agrégeant des sous-systèmes et en les faisant interagir. La notion de **complexité** est subjective. Il n'est pas aisé de déterminer entre deux systèmes lequel est le plus complexe. La simple énumération de leurs éléments n'est pas suffisante. L'évaluation de la complexité nécessiterait de se donner un cadre avec des définitions claires. Par exemple, on peut dire que les systèmes deviennent plus complexes lorsque le système accroît sa capacité de **résilience**, ou lorsque de nouvelles structures émergent, ou encore lorsque que de nouvelles fonctions deviennent possibles.

Échelle des systèmes

Le schéma de la Figure 1.3 peut donner l'impression qu'il existe des **éléments** de base à partir desquels tout commence. Pour l'instant, la Physique n'a pas identifié ces éléments et n'a pas encore prouvé qu'ils existent (quelle pourrait être la nature d'un élément indivisible en parties?). Dans la *théorie des cordes* par exemple, les composantes de la matière les plus fondamentales de notre univers sont de minuscules cordes vibrantes unidimensionnelles d'une taille de 10^{-35} m. De la même manière, on peut s'interroger sur la plus grande structure de l'univers, le plus grand système, ou le système le plus complexe (en supposant que l'on puisse définir ce que cela signifie). Existe-t-il un **système ultime** ?

Remarque : les sous-systèmes d'un système hiérarchisé peuvent évoluer et certains peuvent être alors en conflit avec la fonction du système. Si ces sous-systèmes continuent à se développer, cela peut mettre en danger le système (c'est l'exemple du cancer) où le faire changer de fonction.

1.1.2 Exemples de systèmes

- Un arbre est un système avec des éléments identifiables (tronc, branches, feuilles, racines) et des interactions entre ses éléments (qui sont indispensables à son métabolisme : flux de fluides et d'éléments chimiques) et avec l'extérieur (échanges avec l'atmosphère et le sol). L'une de ses fonctions est de produire des graines qui donneront d'autres arbres.
- Une ville est un élément d'un système caractérisé par exemple par sa population. La population de la ville est alors le réservoir de cette ville. Le réservoir évolue au cours du temps selon, par exemple, les emménagements et les déménagements, les naissances et les décès, etc. Un pays est un système constitué d'un ensemble de villes (les éléments du système) qui échangent des habitants. Les flux sont caractérisés par un nombre d'habitants qui emménagent et déménagent de chaque ville. De même, la population mondiale est un réservoir caractérisé par un taux de naissance (flux entrant) et un taux de mortalité (flux sortant). Dans ces systèmes, les éléments changent sans cesse mais globalement le système perdure.
- La quantité de gaz carbonique (CO_2) dans l'atmosphère est le réservoir de CO_2 du système atmosphère. Ce réservoir évolue en fonction de la production de CO_2 (notamment d'origine anthropique, c'est-à-dire causée par les activités humaines) et les processus de perte (stockage par les plantes, les océans, etc.). Le CO_2 atmosphérique réchauffe l'atmosphère, ce qui a un impact sur la biosphère.
- Une université est un système constitué de nombreux éléments : les étudiants, les enseignants, les chercheurs, le personnel administratif, les laboratoires, etc. Les fonctions premières d'une université sont d'acquérir, de diffuser et de conserver de la connaissance. Normalement, tous ces éléments interagissent dans ce but.

Avec l'habitude, on voit des systèmes à toutes les échelles de taille. L'Univers lui-même serait un système dont les éléments sont des sous-systèmes, eux-mêmes composés de sous-systèmes, etc. Déterminer leur(s) fonction(s) est une autre histoire...

1.1.3 Représentation schématique d'un système

Dans ce cours, un **réservoir** sera représenté par une boîte et les **flux** de ce réservoir par des conduits qui entrent et qui sortent de cette boîte. Les conduits possèdent des variateurs de flux qui régulent les flux. Plusieurs variateurs de flux peuvent être connectés à un seul réservoir (voir par exemple la Figure 1.4). Ainsi, le contenu du

réservoir, représenté par la variable $N(t)$, change au cours du temps sous l'action des flux entrants $\Phi_{in}(t)$ et des flux sortants $\Phi_{out}(t)$ qui peuvent aussi varier dans le temps. Ces flux peuvent être coupés : plus rien ne rentre et/ou plus rien ne sort alors du réservoir.

Pour un réservoir unique, les quantités qui affluent par les conduits proviennent de l'extérieur et/ou se déversent à l'extérieur du système sans que l'on ne s'intéresse à leur origine ni à leur devenir. Les conduits peuvent être connectés à d'autres réservoirs, dans ce cas, les flux proviennent de, et/ou se propagent dans, ces réservoirs. Nous verrons des exemples plus loin dans le cours avec les systèmes couplés.

Dans ce chapitre, nous découvrons trois **systèmes simples** : le système à une entrée et une sortie (le système élémentaire, voir la Figure 1.2) et des cas particuliers de systèmes élémentaires : le système à une entrée et le système à une sortie (voir la Figure 1.7).

1.1.4 Du réel au modèle

L'objectif de l'utilisation des systèmes est de développer des modèles (souvent très simplifiés) d'une partie du monde réel. Les difficultés sont nombreuses mais elles ne sont pas insurmontables.

Détermination des éléments d'un système

Il faut évidemment commencer par définir le système. Il s'agit de déterminer quels sont les réservoirs pertinents à considérer dans le système pour répondre à une problématique associée à la partie du monde réel que l'on souhaite étudier. Il faut ensuite identifier les interconnexions entre tous les réservoirs. Certaines connexions peuvent être jugées inutiles *a priori* et s'avérer indispensables au final (et réciproquement).

Comme dans tout modèle physique, il n'est pas possible de prendre en compte toutes les variables connues (et de nombreuses variables restent souvent à découvrir dans les systèmes les plus complexes). Il faut donc faire des choix. C'est la comparaison entre les résultats du modèle et les observations du monde réel qui valide ou non le modèle.

Par exemple, pour étudier la variation du niveau d'eau dans un lac de montagne, on peut considérer un système avec plusieurs flux en entrée et en sortie, comme cela est représenté sur la Figure 1.4. D'autres processus de perte et d'apport peuvent être envisagés (par exemple, le lac sert d'abreuvoir à de nombreuses espèces d'animaux et de source d'eau à des espèces végétales). La comparaison de ce modèle (et de ses résultats) avec la réalité du terrain (et des mesures faites *in situ*) pourrait par exemple donner des informations sur d'éventuelles sources souterraines inconnues.

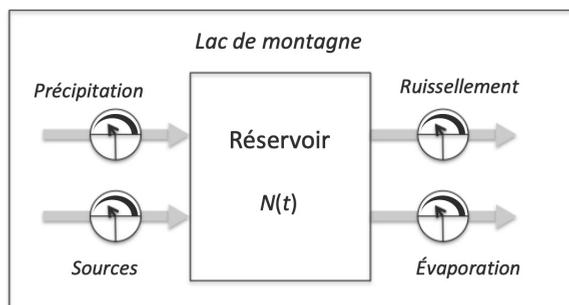


FIGURE 1.4 – Exemple de système possédant un réservoir unique et plusieurs entrées et sorties pour modéliser l'évolution de la quantité d'eau dans un lac de montagne.

Si on s'intéresse au niveau d'eau dans un lac artificiel maintenu par un barrage, comme sur la Figure 1.5, il peut être intéressant d'étudier plusieurs éléments couplés. Le lac artificiel est peut-être alimenté par plusieurs lacs naturels et d'autres sources naturelles. Dans ce cas, les précipitations n'ont peut-être qu'un rôle mineur de manière directe sur le lac artificiel mais peuvent jouer un rôle majeur en cas d'averses à cause de sa connexion avec plusieurs lacs naturels.

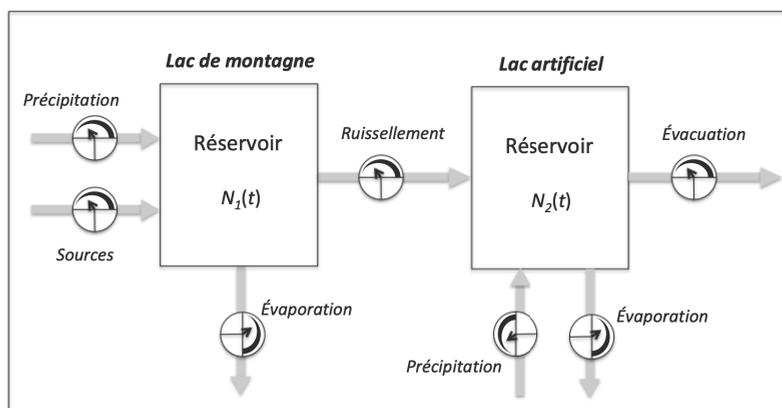


FIGURE 1.5 – Exemple de système à plusieurs réservoirs (plusieurs éléments) et plusieurs entrées et sorties pour chaque réservoir (élément du système). L'idée ici est de modéliser l'évolution de la quantité d'eau dans un lac artificiel alimenté par un lac de montagne.

On imagine facilement, avec cet exemple pourtant simple, que la modélisation du réel devient vite très complexe dès que l'on s'intéresse à différents éléments (ou sous-systèmes) et leurs interconnexions.

L'échelle de temps

La notion d'**échelle de temps** et/ou d'intervalle de temps est primordiale dans l'étude des systèmes. Les systèmes sont en effet limités dans l'espace et aussi dans le temps. Tous les systèmes ont un temps de vie fini. Sur un court intervalle de temps, un réservoir peut être considéré comme constant alors qu'il évolue par l'action de flux entrants et sortants sur un grand intervalle de temps (voir la Figure 1.6). Par exemple, à l'échelle humaine, le volume atmosphérique terrestre global est constant, mais ce n'est pas vrai sur plusieurs milliards d'années.

À l'inverse, un réservoir peut montrer de fortes oscillations sur des intervalles de temps très courts autour d'une valeur moyenne qui est constante sur de grands intervalles de temps.

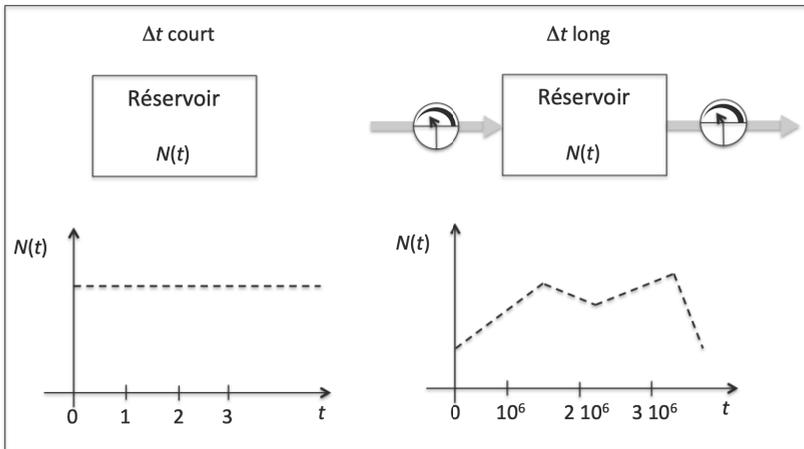


FIGURE 1.6 – Sur un court intervalle de temps Δt (à gauche), la quantité $N(t)$ qui définit le réservoir peut paraître constante en fonction du temps t (en unités arbitraires). Sur un intervalle de temps bien plus long (à droite), les flux négligeables sur un court intervalle de temps deviennent importants et participent à l'évolution temporelle de $N(t)$.

Systèmes ouverts, fermés et isolés

Un **système ouvert** est un système qui est en interaction avec son environnement. Il échange de la matière et de l'énergie avec lui (ou de l'information). Comme nous le verrons dans le chapitre 6, il puise cette énergie et/ou cette matière dans des **sources** et rejette ses déchets dans des **exutoires**. Pour cette raison, ces systèmes sont aussi nommés **systèmes à flux**. Ce sont ces systèmes que l'on va étudier tout au long de cet ouvrage. Les systèmes réels sont ouverts (il y a toujours une interaction avec

l'environnement) mais il peut être pratique, voire indispensable, de simplifier ces systèmes en considérant qu'ils sont fermés ou isolés.

Les systèmes ouverts s'opposent aux **systèmes isolés** qui n'échangent aucune quantité avec leur environnement. Quant on traite un exercice de mécanique du point par exemple, on le considère généralement comme isolé ; cela facilite son étude. On néglige ainsi des interactions faibles et souvent inutiles pour la compréhension du système étudié. Dans les systèmes isolés, il y a par définition une conservation de la masse et de l'énergie que l'on ne retrouve évidemment pas dans les systèmes ouverts.

Lorsque le système échange de l'énergie mais pas de la matière, on parle de **systèmes fermés**. La Terre est, en première approximation, un système fermé qui échange de l'énergie avec son environnement interplanétaire. En entrée, il y a le flux solaire. En retour, la Terre émet de l'énergie sous forme de rayonnement infrarouge. Elle n'échange que très peu de matière avec l'espace interplanétaire (apports météorologiques et échappement atmosphérique). La Terre est aussi en interaction gravitationnelle avec le Soleil (au premier ordre), ce qui là maintient en orbite.

1.1.5 Mise en équations

Une fois le système défini, il faut le mettre en équations. Dans des cas simples, la résolution ne pose pas de problème et peut se faire « à la main » (avec une simple calculatrice). Dans la majorité des cas, il s'agit de résoudre un système d'équations différentielles avec de nombreuses conditions qui modifient les interactions au cours du temps. Il faut donc dans ce cas écrire un programme informatique dans un langage de programmation structuré compilé (comme *C* ou *Fortran*) ou interprété (comme *Python*).

Système avec une entrée ou une sortie

Pour les systèmes les plus simples, la mise en équation est relativement facile. Considérons le système de la Figure 1.7 avec seulement une entrée. On cherche à déterminer comment la variable $N(t)$ varie avec le temps, compte tenu du flux $\Phi_{in}(t)$. À l'instant $t + \Delta t$, il est entré une quantité égale à $\Phi_{in}(t) \times \Delta t$ dans le réservoir. On a donc :

$$N(t + \Delta t) = N(t) + \Phi_{in}(t) \times \Delta t \quad (1.1)$$

qui peut s'écrire aussi :

$$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \Phi_{in}(t) \quad (1.2)$$

Le terme $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ est ce qu'on appelle un **taux de variation moyen**.

Si on choisit Δt aussi petit que l'on veut, on retrouve dans le terme de gauche la dérivée temporelle de $N(t)$ et on obtient donc :

$$\frac{dN(t)}{dt} = \Phi_{in}(t) \quad (1.3)$$

Le terme $\frac{dN(t)}{dt}$ est ce qu'on appelle un **taux de variation instantané** à l'instant t . Le flux $\Phi_{in}(t)$ étant une quantité positive (car un flux en entrée), la quantité $N(t)$ ne peut que croître avec le temps.



FIGURE 1.7 – Représentation de deux systèmes simples à un réservoir ne comportant qu'une entrée (à gauche) et qu'une sortie (à droite).

Dans le cas d'un système avec seulement une sortie (voir la Figure 1.7), on obtient à partir du même raisonnement :

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\Phi_{out}(t) \quad (1.4)$$

Le flux $\Phi_{out}(t)$ est une quantité positive. Ainsi, la quantité $N(t)$ ne peut que décroître avec le temps.

Limitations d'un réservoir

Dans le monde réel, les réservoirs n'ont pas une capacité infinie (le volume du réservoir est fini). Cela signifie que la quantité $N(t)$ ne peut pas dépasser une valeur limite N_{max} . Dans la plupart des cas, cette quantité limite est une constante. On peut cependant imaginer que, dans certains cas, elle évolue dans le temps.

Ainsi, il sera indispensable d'ajouter une **condition limite** à la résolution de l'équation (1.3) qui provoquera l'arrêt du calcul si une condition particulière est atteinte. Par exemple :

- Si $N(t) \geq N_{max}$, alors STOP.

Ou l'exécution d'une autre action qui tient compte du fait que ce réservoir ne fonctionne plus :

- Si $N(t) \geq N_{max}$, alors ACTION.