

PASS TOUT EN QCM

BIOSTATISTIQUES, MATHÉMATIQUES, PROBABILITÉS

PARCOURS
SANTÉ
& L.A.S

Nicolas Meyer

Professeur des universités et praticien hospitalier au CHU de Strasbourg, il enseigne à la faculté de médecine de Strasbourg

Daniel Fredon

Maître de conférences de mathématiques appliquées

Myriam Maumy-Bertrand

Maître de conférences, HDR, spécialité Statistique, Université de technologie de Troyes

Frédéric Bertrand

Professeur des universités, spécialité Statistique, Université de technologie de Troyes

EDISCIENCE

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du

Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 2018
11, rue Paul Bert 92240 Malakoff
ISBN 978-2-10-082900-2
www.dunod.com

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^o et 3^o a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Outils mathématiques

Fiche cours	1	Grandeurs physiques	2
Fiche cours	2	Mesure des grandeurs	4
Fiche cours	3	Fonctions logarithmes, exponentielles et puissances	6
Fiche cours	4	Calcul de primitives.....	8
Fiche cours	5	Équations différentielles du premier ordre	10
Fiche cours	6	Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants	12
Fiche cours	7	Fonctions de plusieurs variables	14
Fiche QCM	8	Entraînement sur les outils mathématiques	16

Statistique descriptive

Fiche cours	9	Série statistique à une dimension	30
Fiche cours	10	Caractéristiques d'un caractère quantitatif	32
Fiche cours	11	Série statistique à deux dimensions.....	35
Fiche cours	12	Ajustement affine	38
Fiche QCM	13	Entraînement sur la statistique descriptive.....	41

Probabilités

Fiche cours	14	Dénombrement.....	52
Fiche méthode	15	Savoir dénombrer.....	54
Fiche cours	16	Langage des événements	55
Fiche cours	17	Probabilités	57
Fiche cours	18	Probabilités conditionnelles	59
Fiche cours	19	Variables aléatoires discrètes (cas fini)	62
Fiche cours	20	Lois discrètes usuelles (cas fini).....	66
Fiche cours	21	Variables aléatoires discrètes (cas infini)	68
Fiche cours	22	Variables aléatoires continues.....	70
Fiche cours	23	Lois continues usuelles.....	72
Fiche méthode	24	Utiliser la loi normale.....	75
Fiche cours	25	Lois continues déduites de la loi normale	78
Fiche QCM	26	Entraînement sur les probabilités.....	80

Statistique inférentielle

Fiche cours	27	Méthode d'échantillonnage et échantillon	94
Fiche cours	28	Estimation ponctuelle	96
Fiche cours	29	Intervalles de fluctuation et de confiance pour une proportion.....	99
Fiche cours	30	Intervalle de confiance d'une moyenne et d'une variance	101
Fiche cours	31	Introduction aux tests statistiques	104
Fiche méthode	32	Schéma général de l'utilisation d'un test.....	106
Fiche cours	33	Comparaison d'une proportion à une norme.....	110
Fiche cours	34	Comparaison d'une moyenne à une moyenne de référence	112
Fiche cours	35	Adéquation à une loi (test du χ^2)	114
Fiche cours	36	Comparaison de deux proportions.....	117
Fiche cours	37	Comparaison de deux moyennes (populations indépendantes).....	121
Fiche cours	38	Comparaison de deux moyennes (populations appariées)	124
Fiche cours	39	Comparaison de deux variances (populations indépendantes).....	126
Fiche cours	40	Liaison entre deux caractères qualitatifs (test du χ^2).....	128
Fiche cours	41	Liaison entre deux caractères quantitatifs	130
Fiche cours	42	Tests non paramétriques	131
Fiche QCM	43	Entraînement sur la Statistique inférentielle	134

Applications aux sciences de la vie

Fiche cours	44	Évaluation d'un test diagnostique	158
Fiche cours	45	Facteurs de risque d'une maladie et probabilités post-test	161
Fiche cours	46	Essais thérapeutiques	164
Fiche cours	47	Analyse de survie	167
Fiche cours	48	Nombre de sujets nécessaires	171
Fiche cours	49	Éléments d'épidémiologie	173
Fiche QCM	50	Entraînement aux applications aux sciences de la vie	176
		Tables	207
		Index	216

Avant-propos

Pourquoi un livre par fiches courtes ?

Pour votre concours, il existe un programme national, mais celui-ci peut faire l'objet d'interprétations variées. De nombreuses fiches courtes permettent une utilisation adaptée à votre programme personnel, même si tous les choix locaux ne sont pas couverts.

Par ailleurs, l'accès rapide à chaque notion de ce livre est facilité par un index détaillé.

Les fiches sont de plusieurs types :

- *Cours* : l'essentiel de ce que vous devez savoir.
- *Méthodes* : des savoirs faire incontournables.
- *Entraînement* : des QCM en vue du concours, avec corrections détaillées.

Qui sommes-nous ?

Une équipe qui regroupe des compétences variées, mais toutes au service de l'enseignement des biostatistiques.

Quels choix de notations ?

Les notations varient beaucoup suivant les auteurs. Nous avons respecté la règle suivante : des lettres grecques pour une population (μ , σ^2 , π), des lettres latines pour un échantillon (\bar{x} , s^2 , p).

Nous savons bien que, dans un cours spécialisé, il faut être précis.

Mais pour vous, nous avons choisi la simplicité. Par exemple, une variable aléatoire qui suit une loi de Student devrait se noter T_ν (où ν est le degré de liberté). Mais nous avons choisi, T dans la mesure où le plus souvent il n'y a aucune ambiguïté.

Et vous ?

Nous ne pouvons pas travailler à votre place. Et même placé sous votre oreiller, le contenu de ce livre ne rentrera pas sans effort.

Alors bon courage!

Toutes vos remarques, vos commentaires, vos critiques, et même vos encouragements, seront accueillis avec plaisir :

nmeyer@unistra.fr ; daniel.fredon@laposte.net

mmaumy@unistra.fr ; fbertran@unistra.fr

[Outils mathématiques]



1. Généralités

a. Grandeur physique

On appelle **grandeur physique** toute propriété de la nature qui peut être quantifiée par la mesure ou par le calcul, et dont les différentes valeurs possibles s'expriment à l'aide d'un nombre accompagné d'une unité de mesure.

Exemples

Un temps, une longueur, une masse.

b. Étalons

Un **étalon** est un modèle de poids ou de mesure qui sert de point de référence. Aujourd'hui, les étalons fondamentaux donnent des définitions très précises des unités de base.

c. Système International d'unités (SI)

Le SI fixe des règles pour les préfixes, les unités dérivées... Le SI est fondé sur un choix de 7 unités de base bien définies et considérées comme indépendantes du point de vue dimensionnel.

grandeurs de base	unités	symboles
masse	kilogramme	kg
longueur	mètre	m
temps	seconde	s
intensité du courant électrique	ampère	A
température	kelvin	K
quantité de matière	mole	mol
intensité lumineuse	candela	cd

d. Préfixes

facteurs	noms	symboles	facteurs	noms	symboles
10^3	kilo	k	10^{-3}	milli	m
10^6	méga	M	10^{-6}	micro	μ
10^9	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	téra	T	10^{-12}	pico	p

e. Constantes fondamentales

Les **constantes fondamentales** régissent les théories de la physique les plus générales, comme :

- c la vitesse de la lumière ;
- G la constante gravitationnelle.

Certaines de ces constantes sont fixées (comme c) et donc de valeur exacte, d'autres sont mesurées (comme G) et donc de valeur approchée.

2. Analyse dimensionnelle

a. Dimension d'une grandeur physique

Les grandeurs fondamentales du SI vont être désignées par des lettres majuscules :

masse M ; longueur L ; temps T ; intensité du courant électrique I ; température Θ ; quantité de matière N ; intensité lumineuse J .

On attribue à toutes les grandeurs dérivées, une dimension qui s'exprime par un produit (avec des puissances entières positives, négatives ou nulles) des dimensions des grandeurs fondamentales.

Exemples

- Dans le cas d'un mouvement rectiligne, l'**accélération** s'écrit

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \text{ où } x \text{ est une longueur et } t \text{ un temps. On lui attribue la dimension : } [a] = \frac{[x]}{[t]^2} = \frac{L}{T^2} = LT^{-2}.$$

Notez bien la différence entre minuscule et majuscule.

- Une **force** F est le produit d'une masse et d'une accélération.

On lui attribue la dimension : $[F] = [m] \times [a] = MLT^{-2}$.

b. Équation aux dimensions

L'analyse dimensionnelle consiste à déterminer les dimensions attribuées aux expressions reliant des grandeurs physiques. Cela permet de contrôler la cohérence de formules ou d'égalités.

En effet, pour additionner, ou évaluer, deux expressions reliant des grandeurs physiques, il est nécessaire (mais pas suffisant) qu'elles aient la même dimension.

1. Généralités

a. Vocabulaire

La **mesure** est l'ensemble des opérations ayant pour but de déterminer une valeur numérique d'une grandeur physique (voir Fiche 1).

Le **mesurande** est définie comme « la grandeur soumise à mesurage ».

b. Mesurage

L'objectif d'un **mesurage** est d'obtenir la valeur x d'un mesurande X .

Mais divers types d'erreurs apparaissent :

- des **erreurs systématiques** dues à la technique de mesure, à l'appareil, à l'opérateur ;
- des **erreurs aléatoires**.

Ces erreurs entraînent un écart entre le résultat du mesurage et la valeur vraie (inaccessible) du mesurande.

c. Présentation d'un résultat

- Après avoir réduit les erreurs, il reste toujours une **incertitude** $\pm I$. L'affichage $x \pm I$ signifie que la valeur vraie du mesurande appartient à l'intervalle $[x - I ; x + I]$ avec une forte probabilité.

L'incertitude I dépend de la probabilité choisie.

- Si les erreurs restantes sont surtout aléatoires, on peut penser que les mesures correspondent à une loi normale (voir Fiche 23). Dans ce cas, on choisit souvent $I = 2\sigma$ (où la notation σ représente l'écart-type), qui correspond à une probabilité de plus de 95 % que la vraie valeur du mesurande soit dans l'intervalle calculé.
- Dans l'affichage du résultat, pensez aussi à ne conserver qu'un nombre de chiffres après la virgule qui ait du sens.

Exemple

Ne concluez pas avec $128,589\ 657 \pm 3,259$, mais plutôt avec $128,6 \pm 3,3$.

Arrondissez la mesure au plus près, et l'incertitude par augmentation.

2. Utilisation d'un grand nombre de mesures

Supposons que les erreurs systématiques aient été réduites autant que possible et qu'il ne reste que les erreurs aléatoires. Ces erreurs sont alors indépendantes et les diverses variances s'additionnent, ce qui n'est pas le cas des écarts type (voir Fiche 10 pour une définition).

Quand on répète n fois une mesure et qu'on calcule la moyenne des résultats, l'incertitude mesurée par des écarts type est alors réduite : elle est multipliée par $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

[IMPORTANT]

Pour comprendre ce phénomène, il suffit de penser que les différences (avec la vraie valeur) positives et négatives se compensent en partie.

3. Incertitude en métrologie

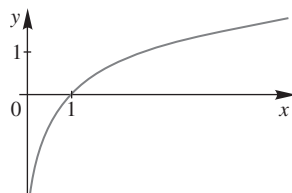
En métrologie (science de la mesure) l'incertitude désigne d'après Vold¹ la marge d'« imprécision », sur la valeur de la mesure d'une grandeur physique ou, d'après le VIM (Vocabulaire International de Métrologie), la dispersion des valeurs qui pourraient raisonnablement être attribuées à une grandeur.

1. Vold (2005) Expressions of uncertainty in scientific research articles, *Akademisk Prosa*, 3, 113-127.

1. Fonctions logarithmes et exponentielles**a. Fonction logarithme népérien**

Elle est définie pour $x > 0$ par :

$$\begin{cases} \ln 1 = 0 ; \\ \forall x > 0 \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}. \end{cases}$$



Elle est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

L'unique solution de l'équation $\ln x = 1$ est notée e ($e \approx 2,718$).

Propriétés algébriques

$$\forall a > 0 \quad \forall b > 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \ln(a \times b) &= \ln a + \ln b & ; & \quad \ln(a^\alpha) = \alpha \ln a ; \\ \ln\left(\frac{1}{a}\right) &= -\ln a & ; & \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b. \end{aligned}$$

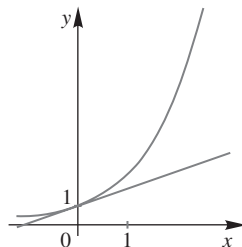
b. Fonction exponentielle

C'est la fonction réciproque de la fonction \ln .

Elle est notée $\exp(x)$ ou e^x .

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad (e^x)' &= e^x ; \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x &= 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty. \end{aligned}$$

Elle est définie sur \mathbb{R} , à valeurs dans $]0; +\infty[$, strictement croissante sur \mathbb{R} .

**Propriétés algébriques**

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad \forall r \in \mathbb{Q}$$

$$e^{a+b} = e^a \times e^b ; \quad e^{ra} = (e^a)^r ; \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a} ; \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}.$$

c. Fonction logarithme de base a

La fonction logarithme de base a ($a > 0$; $a \neq 1$) est la fonction définie par :

$$\forall x > 0 \quad \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

$$\forall x > 0 \quad (\log_a x)' = \frac{1}{\ln a} \times \frac{1}{x}.$$

Ses propriétés algébriques sont les mêmes que celles de la fonction \ln . Si $a = 10$, \log_a est le logarithme décimal. Il est noté \log .

d. Fonction exponentielle de base a

La fonction exponentielle de base a ($a > 0$) est la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp_a(x) = a^x = e^{x \ln a}.$$

Pour $a \neq 1$, c'est la fonction réciproque de la fonction \log_a .

$$(y > 0 \text{ et } a > 0) \quad y = a^x \Leftrightarrow \ln y = x \ln a \Leftrightarrow x = \log_a(y).$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (a^x)' = \ln a \times a^x. \quad (a > 0)$$

[IMPORTANT]

Remarquez bien qu'ici, la variable x est en exposant.

Ses propriétés algébriques sont les mêmes que celles de la fonction \exp .

2. Fonctions puissances

La fonction $x \mapsto x^r$, pour $x > 0$ et $r \in \mathbb{Q}$, est déjà connue. On la généralise, pour $x > 0$ et $a \in \mathbb{R}$, en posant :

$$x^a = e^{a \ln x}.$$

Les propriétés connues pour les exposants rationnels sont prolongées ; en particulier $(x^a)' = ax^{a-1}$.

[IMPORTANT]

Remarquez bien qu'ici l'exposant a est constant.

1. Primitive d'une fonction continue

a. Définition

f étant définie sur un intervalle I , une fonction F , définie sur I , est une primitive de f , si elle est dérivable sur I et si :

$$\forall t \in I \quad F'(t) = f(t).$$

b. Théorèmes

- Deux primitives de f diffèrent d'une constante, c'est-à-dire que, si F est une primitive de f sur un intervalle I , toutes les primitives de f sur I sont de la forme : $t \mapsto F(t) + C$ où C est une constante réelle quelconque.
- Pour toute primitive h de f sur I , on a :

$$\int_a^x f(t) dt = [h(t)]_a^x = h(x) - h(a).$$

Le calcul d'intégrales de fonctions continues se ramène donc à la recherche de primitives.

c. Primitives usuelles

$f(t)$	$F(t)$	$f(t)$	$F(t)$	$f(t)$	$F(t)$
t^n ($n \neq -1$)	$\frac{t^{n+1}}{n+1}$	$\frac{1}{t}$	$\ln t $	$e^{\lambda t}$ ($\lambda \in \mathbb{C}^*$)	$\frac{1}{\lambda} e^{\lambda t}$
$\cos t$	$\sin t$	$\sin t$	$-\cos t$	$\ln t$	$t \ln t - t$

2. Méthodes de calcul

a. Utilisation de la dérivée de u^n

Si u est une fonction de t , la dérivée de u^n par rapport à t est :

$$n u^{n-1}(t) u'(t).$$

Donc, si vous cherchez une primitive d'une fonction du type $u^k(t) u'(t)$ [ou $(at+b)^k$ car alors $u'(t) = a$ est une constante], introduisez $u^{k+1}(t)$ et dérivez cette expression pour ne pas vous tromper sur le coefficient à introduire.

b. Intégration par parties

• Théorème

Soit u et v deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 (c'est-à-dire dérivable et dont la dérivée est continue) sur un intervalle I , et a et b des réels de I .

On a :

$$\int_a^b u'(t) v(t) dt = [u(t) v(t)]_a^b - \int_a^b u(t) v'(t) dt,$$

ce qui s'écrit aussi, en terme de primitives :

$$\int u'(t) v(t) dt = u(t) v(t) - \int u(t) v'(t) dt.$$

• Cas classiques d'utilisation

Soit P une fonction polynomiale, α un réel non nul, β un réel, a et b deux réels de I tels que $a < b$.

➤ Pour calculer $I = \int_a^b P(t) \sin(\alpha t + \beta) dt$, posez $v(t) = P(t)$:

$$u'(t) = \sin(\alpha t + \beta) \quad ; \quad v(t) = P(t)$$

$$u(t) = -\frac{1}{\alpha} \cos(\alpha t + \beta) \quad ; \quad v'(t) = P'(t).$$

$$\text{Ainsi } I = \left[-\frac{1}{\alpha} \cos(\alpha t + \beta) P(t) \right]_a^b + \frac{1}{\alpha} \int_a^b P'(t) \cos(\alpha t + \beta) dt.$$

On recommence si nécessaire autant de fois que le degré de $P(t)$.

➤ Pour $\int_a^b P(t) \cos(\alpha t + \beta) dt$, posez $v(t) = P(t)$.

➤ Pour $\int_a^b P(t) e^{\alpha t + \beta} dt$, posez $v(t) = P(t)$.

➤ Pour $\int_a^b P(t) \ln t dt$, posez $v(t) = \ln t$.

c. Intégration par changement de variable

Soit u une fonction bijective de classe \mathcal{C}^1 de $[\alpha; \beta]$ sur $[a; b]$, et f une fonction continue sur $[a; b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t)) u'(t) dt.$$