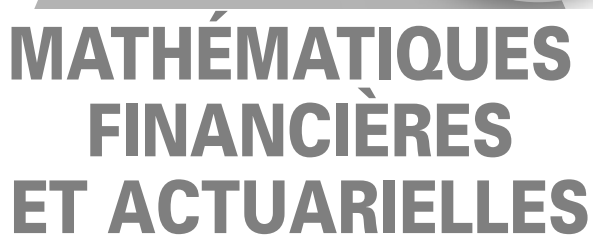


Gérard Neuberg



TD



**MATHÉMATIQUES
FINANCIÈRES
ET ACTUARIELLES**



70%
APPLICATIONS



30%
COURS

DUNOD

Tout le catalogue sur
www.dunod.com



Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Paris, 2012
ISBN 978-2-10-057467-4

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^o et 3^o a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

TD Sommaire



Avant-propos	V
TD ❶ Prérequis	1
L'essentiel	1
Voir aussi	10
QCM	11
Réflexion	15
Entraînement	16
TD ❷ Taux de variation	20
L'essentiel	20
Voir aussi	28
QCM	29
Réflexion	31
Entraînement	33
TD ❸ Indices boursiers	38
L'essentiel	38
Voir aussi	47
QCM	48
Réflexion	52
Entraînement	54
TD ❹ Intérêts simples	58
L'essentiel	58
Voir aussi	67
QCM	68
Réflexion	71
Entraînement	72
TD ❺ Intérêts composés	74
L'essentiel	74
Voir aussi	83
QCM	84
Réflexion	87
Entraînement	88

TD 6	Actualisation	91
	L'essentiel	91
	Voir aussi	99
	QCM	100
	Réflexion	105
	Entraînement	107
TD 7	Rentes constantes	112
	L'essentiel	112
	Voir aussi	123
	QCM	124
	Réflexion	128
	Entraînement	129
TD 8	Rentes et modèles financiers en temps continu	132
	L'essentiel	132
	Voir aussi	145
	QCM	146
	Réflexion	150
	Entraînement	152
TD 9	Calcul actuariel obligataire	153
	L'essentiel	153
	Voir aussi	164
	QCM	165
	Réflexion	169
	Entraînement	173
TD 10	Amortissement des emprunts indivis	176
	L'essentiel	176
	Voir aussi	182
	QCM	183
	Réflexion	186
	Entraînement	187
	Sujets d'annales	191
	Annexe 1 : fonction intégrale de la loi normale	225
	Annexe 2 : sigles et abréviations	226
	Annexe 3 : notations	230
	Glossaire des termes français	233
	Glossaire des termes anglais	240
	Index	247

Avant-propos

« Il faut être fou ou économiste pour croire qu'une croissance exponentielle puisse se maintenir indéfiniment dans un monde fini ¹. » (Kenneth Ewart Boulding, 1910-1993, économiste).

Dans un contrat de prêt, les sommes à rembourser sont rarement explicites, en euros sonnants et trébuchants. La plupart du temps, elles résultent d'un calcul faisant intervenir un *taux d'intérêt*, une grandeur qui semble familière. Mais ce n'est qu'une impression... puisqu'en 1966 notre législateur a jugé nécessaire d'en préciser l'usage par la loi ! Il faut dire que les organismes de crédit abusaient de la crédulité des consommateurs.

Quand la France a modifié sa réglementation, en 2002, pour la rendre conforme aux normes européennes, les lecteurs du Journal Officiel de la République Française ont dû être bien surpris d'y découvrir plusieurs pages de mathématiques relatives au calcul des taux d'intérêt, avec exercices corrigés, agrémentés de résolutions d'équations par itérations successives.

On peut rêver et penser qu'avant de signer les décrets, notre premier ministre de l'époque, Jean-Pierre Raffarin, a ressorti ses cours de math fi de l'ESCP pour tout vérifier.



¹ « Anyone who believes exponential growth can go on forever in a finite world is either a madman or an economist »

Mathématiques financières et actuarielles

La méthode comptable est conçue pour résumer une activité économique *passée* en regroupant puis additionnant des dépenses et des recettes enregistrées, donc *certaines*, pendant une durée raisonnable. Elle révèle ses limites quand on souhaite l'étendre à des périodes trop longues et/ou à une activité économique *future*, donc *incertaine*. Les mathématiques financières et actuarielles proposent d'adapter la méthode pour tenir compte du prix du temps et du prix du risque.

Mêmes connues avec certitude, les recettes et les dépenses ressemblent en effet de plus en plus à des « *torchons et des serviettes* » qu'on ne doit pas mélanger quand elles sont relatives à des dates trop différentes. Ainsi, les banquiers qui s'obstinent à comparer les *coûts* des diverses propositions de crédit qu'ils proposent à leurs clients et dont les remboursements s'étalent parfois sur des dizaines d'années, feraient bien de consulter, de toute urgence, les décrets n°2002-927 et 2002-928 du 10 juin 2002 dont il a été question précédemment puis de *méditer...* la Loi.

Par ailleurs, l'addition de recettes et de dépenses prévisionnelles est encore bien plus délicate à interpréter car les montants, les dates de versement et même le prix du temps, sont autant de paramètres *aléatoires*.

Les maths fi des banquiers

L'appellation *Mathématiques financières* est devenue ambiguë en ce début de troisième millénaire.

Les traders spécialistes du quantitatif du front office, surnommés « Quants », utilisent en effet des *mathématiques de la finance* qui n'ont pas grand-chose à voir avec les calculs *financiers* traditionnels dont se servent quotidiennement les professionnels de la gestion d'actifs « back et middle offices », c'est-à-dire ceux qui assurent le suivi des opérations financières. Ainsi, les « Grecques » et les équations différentielles stochastiques (EDS) dont parlent les premiers paraîtront sans doute ésotériques aux seconds...

Cet ouvrage présente des calculs qui concernent vraiment Monsieur et Madame Tout-le-Monde. Des taux effectifs globaux (TEG) sont par exemple mentionnés dans les publicités qui inondent leurs magazines, leurs journaux et la télévision ; ils en trouvent même sur les affiches du métro parisien ou en devanture des agences des banques.

Les candidats à une licence pro ou à un master pro « assurance, banque, finance », doivent bien entendu maîtriser le fonctionnement de ces mathématiques financières là ainsi qu'un *jargon*, objet de réglementations quasiment identiques, depuis peu, dans tous les États membres de la Communauté Européenne. Certains paragraphes et exercices, signalés par un renvoi en bas

de page sont du niveau master. Ils peuvent donc être ignorés par les candidats à la licence.

En tentant de résoudre les nombreux QCM², exercices et problèmes d'examens dont les « solutions » sont disponibles sur le site des éditions Dunod, un futur professionnel aura intérêt à se constituer un aide-mémoire dont le contenu dépendra de sa formation antérieure. Sitôt diplômé, ce dernier sera aidé par de fabuleux micro-ordinateurs qui ne font jamais d'erreurs... humaines et qui permettent aujourd'hui de se jouer de calculs souvent complexes, réservés autrefois à des spécialistes. Mais comprendre les questions posées demeure encore une étape préalable indispensable pour espérer pouvoir y répondre ou trouver une aide efficace auprès de collègues, spécialistes ou non.

Enfin, tout change maintenant tellement vite dans la finance d'aujourd'hui qu'un futur banquier doit savoir qu'il devra compléter sa formation en actualisant continuellement ses connaissances.

Ce dernier constatera en parcourant les sites internet concernant sa profession que l'anglais est la langue de référence de la finance d'aujourd'hui. On peut d'ailleurs lire dans le Rapport 2007 au Parlement de la Délégation Générale à la Langue Française (DGLF) qu'« *À la Banque centrale européenne (BCE) et à la Banque européenne d'investissement (BEI), l'anglais est largement majoritaire* ». La situation n'étant pas près de changer, une partie du jargon anglo-américain est présent dans ce livre, en particulier à la première apparition d'un terme financier³.

Qu'on le déplore ou non, l'université française devra un jour ou l'autre dispenser ses enseignements de finance également en anglais...

Sandrine Lardic, Hélène Raymond, Laurence Scialom, Yamina Taddjedine, Michel Boutillier, Patrice Bertail, Jean-Bernard Chatelain et Didier Folus ont eu bien du courage d'accepter d'ouvrir des formations professionnalisantes (licences et masters) à l'UFR de Sciences économiques, gestion, mathématiques et informatique (SEGMI) de l'Université de Paris Ouest Nanterre La Défense. Ils m'ont confié le soin de concevoir un contenu pour les maths fi de futurs banquiers et financiers. J'ai donc imaginé ce que des clients vraiment exigeants devraient souhaiter qu'ils sachent à l'aube du 3^e millénaire pour prétendre être à même de leur prodiguer quelques conseils. Certains de ces derniers seront peut-être intéressés...

Je remercie particulièrement Sandrine Lardic qui a accepté la très importante mais fastidieuse tâche de relire mon manuscrit. Selon l'expression consacrée, je demeure seul responsable des erreurs qui subsistent.



² Un QCM de révision (*Review Quiz*) supplémentaire et sa correction, disponibles sur www.dunod.com, sont proposés aux étudiants curieux et courageux qui souhaitent s'évaluer à l'aune des exigences professionnelles anglo-saxonnes.

³ Des caractères gras indiquent la première occurrence d'un terme financier en français et des caractères italiques, en anglais.

à Jérémie

TD1 Prérequis



L'ESSENTIEL

Ce TD préliminaire a pour objet de vérifier que l'étudiant possède bien le jargon financier et économique de base indispensable. Jusqu'au Master compris, les mathématiques vraiment utiles pour suivre un parcours universitaire de finance sont celles exigées au baccalauréat général des séries S et ES.

1 ● Le temps et la finance

1.1 ● Court terme, long terme

Les financiers et les comptables repèrent le plus souvent les **flux de trésorerie** – *cash flow* – en **temps discret** – *discrete time* –, à des **dates de valeur** – *value dates* – (des jours) en utilisant le calendrier civil.

Le Code monétaire et financier encadre la pratique bancaire des dates de valeur dans les opérations de crédit et de débit (*cf.* L131-1-1 pour les chèques et L133-14 pour les virements). Comptabiliser les crédits avec retard sur les comptes bancaires et les dates de débit en avance, n'est autorisée en France que pour l'encaissement des chèques.

Les mathématiques financières – *mathematics of interest rates* – et la *comptabilité* ne distinguent que les échéances inférieures et supérieures à un an, appelées respectivement **court terme** – *short term* – et **long terme** – *long term* –. Il en est ainsi par exemple des dettes à court terme – *current liabilities* – et des dettes à long terme – *long term liabilities* – dans le **bilan comptable** – *balance sheet* – d'une entreprise.

Les premières désignent celles à rembourser avant la clôture de l'**exercice comptable** – *accounting period* – en cours et les secondes celles à rembourser plus tard (lors d'un exercice ultérieur).

Sur les **marchés financiers** – *capital markets* –, les expressions court, moyen et long terme désignent des horizons temporels, variables selon les pays, qui résultent d'habitudes prises et de textes réglementaires.

1.2 ● Chroniques financières

L'observation d'une **chronique de stocks** – *level* ou *stock time series* – est envisageable à tout **instant** – *point in time* –.

Il en est ainsi, par exemple, de la base de l'ISF (Impôt de Solidarité sur la Fortune) qui doit être évaluée au 1^{er} janvier de l'année, du cours d'une action à un instant donné, ou encore d'un montant inscrit dans le bilan comptable (établi à la date de clôture d'un **exercice fiscal** – *fiscal year* –).

L'observation d'une **chronique de flux** – *flow time series* – dépend du *choix arbitraire* des **intervalles de temps** – *span of time* – pendant lesquels l'homme de l'art a décidé de cumuler la grandeur élémentaire qui le *génère*.

Il en est ainsi, par exemple, de la base annuelle de l'IR (Impôt sur le Revenu), de dividendes versés pendant l'année, d'un chiffre d'affaires mensuel ou encore d'un montant inscrit dans un **compte de résultat** – *Profit and Loss (P & L) account* – (relatif à un exercice fiscal).

Les *unités statistiques observées* sont donc *de nature différente* selon que la grandeur dont on suit l'évolution est un stock ou un flux. Dans le premier cas ce sont des instants et dans le second, des intervalles de temps.

1.3 ● Juste valeur

Un **actif** – *asset* – est ce qui a une valeur marchande : liquidités, instruments financiers, stocks, immobilier, brevets, marques, etc.

La valeur attribuée à un actif est *a priori* différente d'un individu à l'autre ; il ne faut la confondre ni avec un prix ni avec un coût. Pour lever toute ambiguïté, la finance désigne par **juste valeur** – *fair value* –, son **évaluation aux prix de marché** – *Mark-To-Market (MTM) value* – obtenue à une **date donnée** – *appaisal date* – en utilisant les cours et taux de change les plus récents possibles. Cette méthode conforme aux **normes internationales d'information financière** – *International Financial Reporting Standards (IFRS)* – s'oppose à la valorisation comptable aux coûts historiques. On notera que ces estimations négligent toutes sortes de frais, taxes et impôts.

On dira qu'un **actif** est **liquide** – *liquid asset* – s'il est facilement négociable, c'est-à-dire transformable en moyens de paiement. Dans le cas contraire, l'estimation de sa juste valeur n'est pas clairement déterminée : elle repose sur un cours du passé ou sur un dire d'expert, c'est-à-dire sur une donnée arbitraire.

En acquérant un actif, un investisseur s'attend non seulement à pouvoir le revendre plus ou moins facilement mais souvent également à ce que son compte soit affecté par des flux de trésorerie futurs plus ou moins certains, des rémunérations mais aussi des frais et des taxes : **coupons** – *coupon* – (obligations), **dividendes** – *dividends* – (actions), **droits de garde** – *custody fees* –, **frais de gestion** – *management expenses* –, **loyers** – *rental income* – et **charges foncières** – *property charges* – (biens immobiliers).

2 ● Variations

2.1 ● Indice élémentaire

Le rapport $I_{y/x}(c) = \frac{c_y}{c_x}$ compare les valeurs c_x et c_y prises par une même grandeur positive unidimensionnelle c dans les situations x et y . Quand on connaît ce nombre, appelé **indice élémentaire** – *elementary index* –, et la valeur c_x placée au dénominateur, appelée **valeur de référence** – *benchmark* –, on en déduit l'autre à l'aide d'une *multiplication* : $c_y = c_x \times I_{y/x}(c)$

On présente traditionnellement un indice *avec un chiffre après la virgule* après l'avoir préalablement multiplié par une constante appelée **valeur de la base** – *base value* –. Les opérations sur les indices seront présentées dans cet ouvrage sans ce coefficient multiplicateur qui complique inutilement la lecture des résultats théoriques.

L'indice d'une grandeur est une mesure de sa *variation* entre les deux situations comparées. En effet, selon qu'il est supérieur ou inférieur à 1, la grandeur croît ou décroît entre la situation de référence et l'autre. Dans le 1^{er} cas, il est également appelé **facteur de croissance** – *growth factor* – et dans le 2nd, **facteur de réduction** – *discount factor* –.

Quand la grandeur est observée dans le temps, on compare habituellement une *valeur courante* à une valeur plus ancienne prise pour référence. Il est alors pratique de numérotter les situations en commençant par 0 : c_0 est alors appelé *valeur initiale* et c_1 , *valeur finale*.

2.2 ● Propriétés des indices élémentaires

Un indice élémentaire étant une fraction, il en possède les propriétés. En particulier, si un indice est un facteur de croissance, celui obtenu en intervertissant les deux situations à comparer est un facteur de réduction. Par ailleurs, quand on connaît 2 des 3 indices élémentaires qui comparent deux à deux une même grandeur simple dans trois situations, on en déduit le 3^e, soit par une multiplication soit par une division des deux autres.

Dans le cas d'une chronique $\{A_k; k = 0, 1, \dots, j\}$, cette dernière propriété se généralise de la manière suivante. L'indice *global* $I_{j/0}(A) = \frac{A_j}{A_0}$ se *factorise* en un produit de j indices élémentaires partiels $I_{k/k-1}(A) = \frac{A_k}{A_{k-1}}$ ($k = 1, 2, \dots, j$) :

$$I_{j/0}(A) = \frac{A_j}{A_0} = \frac{A_1}{A_0} \times \frac{A_2}{A_1} \times \dots \times \frac{A_j}{A_{j-1}} = \prod_{k=1}^j I_{k/k-1}(A) \quad [1.1]$$

2.3 ● Indice de rentabilité

Un support bancaire, appelé **compte titres** – *securities account* –, adossé à un **compte bancaire ordinaire** – *ordinary bank account* – est obligatoire en France pour détenir des instruments financiers.

Aux **titres financiers à revenus fixes** (obligations classiques) – *fixed income securities* –, dont les dates de versement et les montants des rémunérations sont fixés à l'avance, s'opposent les **titres financiers à revenus variables** – *variable income securities* – (actions) dont les dates et flux de trésorerie futurs sont plus ou moins inconnus.

Les **instruments financiers dérivés** – *derivative instruments* – (contrats à terme ou optionnels, similaires à des assurances), permettent aux agents économiques soit de réduire les risques liés à leurs activités soit de spéculer.

On désigne ci-après par :

- A_0 , la juste valeur d'un compte titres prise pour référence à la date 0.
- $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots, A_{j-1}$, les justes valeurs de ce compte aux dates numérotées : $k = 1, 2, \dots, j-1$; elles forment une chronique de stocks (*cf.* § 1.2).
- $d_1, d_2, \dots, d_k, \dots, d_{j-1}$, les éventuelles rémunérations (nettes de frais et de taxes) liées à la détention du portefeuille et déposées sur le compte de gestion entre les dates n° $k-1$ et n° k ($k = 1, 2, \dots, j-1$) ; elles forment une chronique de flux (*cf.* § 1.2).

Si une rémunération d_k est versée sur le compte de gestion à la date n° k , la valeur du portefeuille \mathcal{P} (compte titres et solde du compte bancaire associé) passe de A_{k-1} à $A_k + d_k$.

L'indice de cette valeur est appelé **indice de rentabilité** – *Return Index (RI)* – du portefeuille \mathcal{P} à la date n° k , base 1 en $k-1$:

$$RI_{k/k-1} = \frac{A_k + d_k}{A_{k-1}} \quad [1.2]$$

L'indice de la valeur du compte titres *seul* (i.e. hors rémunérations) qui passe de A_{k-1} à A_k est appelé **indice de plus ou moins-value** ou **indice nu** – *Price Index (PI)* – du portefeuille \mathcal{P} à la date n° k , base 1 en $k-1$:

$$PI_{k/k-1} = \frac{A_k}{A_{k-1}} \quad [1.3]$$

Quand on connaît l'indice nu $PI_{k/k-1}$ et les rapports $\frac{d_k}{A_{k-1}}$ et $\frac{d_k}{A_k}$, appelés **taux de rendement** – *yield rates* –, on en déduit celui de rentabilité :

$$\text{– soit à l'aide d'une addition : } RI_{k/k-1} = PI_{k/k-1} + \frac{d_k}{A_{k-1}} \quad [1.4]$$

$$\text{– soit à l'aide d'une multiplication : } RI_{k/k-1} = PI_{k/k-1} \left(1 + \frac{d_k}{A_k} \right) \quad [1.5]$$

Ces deux taux de rendement, rapportant la même rémunération d_k respectivement à la valeur initiale et finale du compte titres portent deux noms différents en anglais : *income yield* ou *Yield On Cost (YOC)* pour le premier et *running yield* ou *current yield* pour le second.

Si une rémunération est versée à la date n° k , l'indice de rentabilité $RI_{k/k-1}$ est plus élevé que celui de plus ou moins-value $PI_{k/k-1}$. Dans le cas contraire ($d_k = 0$), ces deux indices sont identiques.

Les bases de données financières permettent de reconstituer facilement les indices de rentabilité. Il en est ainsi de *Datastream* maintenue par Thomson Reuters. Les différents cours corrigés successifs \tilde{c}_k d'une action, par exemple, sont établis en supposant que les dividendes sont réinvestis immédiatement pour acquérir des parts supplémentaires du même titre.

La chronique corrigée $\{\tilde{c}_k; k = 1, \dots, j-1\}$ est construite par récurrence à partir d'un cours \tilde{c}_0 pris pour référence ($\tilde{c}_0 = A_0$) de la façon suivante :

$\tilde{c}_k = \tilde{c}_{k-1} \times RI_{k/k-1}$ ($k = 1, \dots, j-1$). On en déduit : $I_{k/k-1}(\tilde{c}) = RI_{k/k-1}$.

L'indice de rentabilité de l'action à la date n° k (base 1 en $k-1$) s'obtient ainsi en calculant l'indice élémentaire de son cours corrigé.

Autrement dit, on pose : $\tilde{c}_k = \tilde{c}_{k-1} \times \frac{A_k + d_k}{A_{k-1}}$ si une rémunération nette de frais d_k est versée en date valeur du jour k , et $\tilde{c}_k = \tilde{c}_{k-1} \times \frac{A_k}{A_{k-1}}$ sinon.

Un indice de rentabilité est qualifié de *net* ou de *brut* selon qu'il est calculé après ou avant d'avoir tenu compte d'un éventuel prélèvement fiscal.

2.4 ● Indice de performance

Les **Organismes de Placement Collectif (OPC)** – *collective investment funds (CIF)* – sont des intermédiaires financiers qui donnent aux investisseurs (actionnaires ou porteurs de parts) la possibilité d'investir sur des marchés auxquels ils n'auraient que difficilement accès autrement (marchés monétaires et financiers étrangers, actions non cotées, murs de magasins, immobilier d'entreprise, etc.). Ces structures (fonds communs ou sociétés à capital variable) réduisent les inconvénients des placements en direct (très faible liquidité des actifs immobiliers, par exemple). Une réglementation s'applique aux Organismes de Placement Collectif en Valeurs Mobilières (OPCVM) et aux Organismes de Placement Collectif en Immobilier (OPCI).

En dehors des réallocations d'actifs décidées par l'équipe de gestion, la composition d'un portefeuille détenu par un OPC est affectée au cours du temps par divers flux de trésorerie (recettes et dépenses). La réglementation française impose aux organismes de placement collectif de publier la **Valeur Liquidative Unitaire (VLU)** – *Net Asset Value per share (NAVPS)* – de leurs parts ou de leurs actions au moins deux fois par mois.

On désigne par **indice de performance** – *performance index* – d'un portefeuille d'actifs gérés pendant une période donnée, le facteur global de croissance (ou de réduction) de sa valeur liquidative. Il s'obtient en enchaînant les indices de rentabilité partiels relatifs aux sous périodes pendant lesquelles la trésorerie de l'OPC n'a pas été affectée par une recette ou une dépense. Calculer l'indice de performance d'un organisme de placement collectif pendant une période donnée, suppose de connaître non seulement l'encours initial VL_0 et final VL_1 du portefeuille géré mais aussi le détail des différents flux de trésorerie CF_{t_k} enregistrés sur le compte de gestion aux dates t_k ($k = 1, 2, \dots, n$) pendant la période $[0, 1]$.

La valeur liquidative totale de l'OPC évolue au cours du temps au gré des cours observés et/ou de l'estimation des actifs immobiliers.

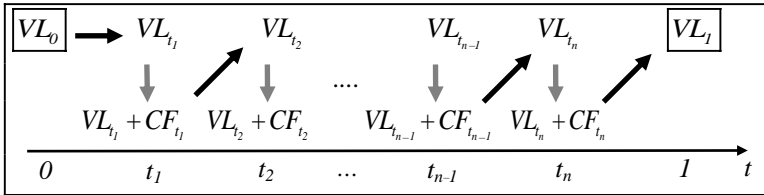


Diagramme 1.1

L'indice de performance sur la période s'écrit (*cf.* diagramme 1.1) :

$$I_{1/0} = \frac{VL_{t_1}}{VL_0} \times \frac{VL_{t_2}}{VL_{t_1} + CF_{t_1}} \times \dots \times \frac{VL_{t_n}}{VL_{t_{n-1}} + CF_{t_{n-1}}} \times \frac{VL_1}{VL_{t_n} + CF_{t_n}} \quad [1.6]$$

expression dans laquelle VL_{t_k} et $VL_{t_k} + CF_{t_k}$ désignent respectivement l'encours total net du portefeuille, juste avant et juste après la prise en compte du $k^{\text{ème}}$ flux de trésorerie CF_{t_k} à la date t_k .

La plupart des OPCVM comparent leurs performances à un indice de référence. On appelle **indicateur de déviation** – *tracking error* – un résumé statistique des écarts constatés entre les deux, pendant une période récente plus ou moins longue. Plus cet indicateur est faible et plus la valeur liquidative unitaire du fonds évolue comme l'indicateur de référence.

Un **fonds alternatif** – *hedge fund* – est un fonds de placement particulier non soumis aux contraintes légales des OPC. Les opérations d'achat et de vente avec effet de levier (*cf.* question 28 du TD 2) augmentent considérablement les risques pris par les investisseurs.

Les prix d'achat et de vente d'une part (ou d'une action) d'un OPC dépendent de sa valeur liquidative unitaire et des éventuels frais d'entrée et/ou de sortie. Il est donc primordial que l'évaluation des parts d'un fonds soit certifiée par un acteur indépendant des gérants...

2.5 ● Variations absolues

On appelle **variation absolue** d'une grandeur simple c , qui passe de c_x à c_y entre les situations x et y , la différence $c_y - c_x$.

Cette nouvelle appellation peut sembler superfétatoire à un mathématicien. Elle est utile aux financiers pour lever toute ambiguïté avec d'autres variations dites « relatives » (cf. TD 2). La première s'énonce dans l'unité retenue pour mesurer la grandeur c , les secondes s'écrivent : $|c_y - c_x| \div c_x$, $|c_y - c_x| \div c_y$ ou $|\ln(c_y \div c_x)|$ et n'ont pas d'unité ; \ln se lit logarithme népérien du nombre (positif) situé à sa droite. Cette dernière est également appelée variation logarithmique pour la distinguer des deux premières, dites arithmétiques, qui rapportent l'**écart** – *deviation* –, c'est-à-dire la valeur absolue de la différence, à l'une d'entre elles (c_x ou c_y).

On notera que la variation absolue d'une grandeur est l'opposé de celle calculée en permutant les deux situations comparées.

Quand les deux situations à comparer sont ordonnées, la différence $\Delta c = c_1 - c_0$, positive ou négative, est appelée **accroissement absolu** – *net change* – de la grandeur quand on passe de la situation initiale à la situation finale.

Quand il porte sur deux cours d'une action en bourse, l'accroissement absolu d'une séance à l'autre n'est interprétable qu'après avoir procédé à une correction des **Opérations Sur Titres (OST)** – *corporate action* – : paiement de dividendes, démembrements ou regroupements d'actions, etc.

3 ● Comptes titres

3.1 ● Notations

On repèrera dorénavant deux jours de bourse successifs par deux entiers consécutifs $k-1$ et k ($k = 1, 2, \dots, j-1$) et on désignera par :

- H_{j-1} , l'échantillon des entreprises sélectionnées à la clôture de la $j-1$ ^{ème} séance boursière, la dernière connue.
- Q_t^h , $h \in H_{j-1}$ le nombre de titres de la société h détenus à l'instant t de la j ^{ème} séance. Quand un compte titres n'est révisé qu'à la **clôture** – *close* – des différentes séances (17 h 35 à la Bourse de Paris pour les actions cotées en continu), on notera que l'invariance des nombres de titres du portefeuille pendant la j ^{ème} séance s'écrit : $Q_t^h = Q_{j-1}^h, \forall h \in H_{j-1}$.
- c_t^h , $h \in H_{j-1}$, le cours du titre h à l'instant t de la j ^{ème} séance dans la devise de référence (supposée être ici l'euro) dans laquelle souhaite raisonner l'investisseur.
- c_0^h , $h \in H_0$, le cours du titre h à la date 0, choisie pour référence.

Un **portefeuille** est **autofinancé** – *self-financing portfolio* – lorsque les modifications de sa composition sont réalisées sans apports ni retraits d'espèces.

L'usage est d'abrégier l'écriture $A_t = \sum_{h \in H_{j-1}} c_t^h Q_t^h$ donnant la juste valeur du compte titres à l'instant t de la $j^{\text{ème}}$ séance boursière, nette de frais et hors dividende, en la notant $A_t = \sum c_t \times Q_t$. Dans cette expression, le petit repère supérieur h utile pour distinguer les différents titres présents dans \mathcal{P} est donc sous-entendu.

On notera p_t^h le cours du titre h quand il est observé dans une devise différente (le dollar pour fixer les idées) de celle dans laquelle raisonne l'investisseur (supposé être ici l'euro). Pour convertir des dollars en euros, ce dernier peut utiliser indifféremment deux taux de change équivalents, inverses l'un de l'autre, selon qu'il choisit l'une ou l'autre des deux monnaies comme unité de quantité de la transaction. Il revient, par exemple, en effet au même d'énoncer à un instant donné que le taux de change vaut $\pi_t = 0,80 \text{ €/}\$$ (prix du dollar) ou qu'il est égal à $\pi_t' = 1 \div \pi_t = 1,25 \text{ \$/}\text{€}$ (prix de l'euro).

Dans le premier cas, ce qui varie dans le temps est le nombre d'euros et de centimes échangés par dollar ; l'euro est alors appelé devise « *secondaire* » ou de « *contrepartie* » et le dollar devise « cotée » ou « principale ». Dans le second cas, ce qui varie dans le temps est le nombre de dollars et de cents échangés par euro.

L'investisseur obtient la juste valeur c_t^h en euros du titre h à l'aide :

- d'une *multiplication* : $c_t^h = p_t^h \times \pi_t^h$ s'il utilise π_t^h (juste valeur d'un dollar en euros et centimes) appelé **cotation à l'incertain** – *direct quote* – de l'euro vis-à-vis du dollar ;
- d'une *division* : $c_t^h = p_t^h \div \pi_t^{th}$ s'il utilise π_t^{th} (juste valeur d'un euro en dollars et cents) appelé **cotation au certain** – *indirect quote* – de l'euro vis-à-vis du dollar.

3.2 ● Indice de la capitalisation boursière

La juste valeur d'un compte titres étant une grandeur unidimensionnelle, son indice est élémentaire et possède les propriétés de réversibilité et de transitivité des fractions mentionnées au § 2.2.

On appelle **capitalisation boursière (CB)** – *capital market value* – d'une société h , l'estimation au cours du marché de la totalité Q_t^h de ses actions enregistrées en bourse à l'instant t de la séance n° j .

Quand on utilise le dernier cours connu c_t^h , cette capitalisation vaut : $CB_t^h = c_t^h \times Q_t^h$. L'invariance des nombres d'actions Q_t^h des différentes sociétés retenues pendant la $j^{\text{ème}}$ séance ($Q_t^h = Q_{j-1}^h, \forall h \in H_{j-1}$), conduit à écrire la capitalisation boursière de l'échantillon H_{j-1} à l'instant t de cette séance de la manière suivante : $CB_t = \sum c_t \times Q_t = \sum c_t \times Q_{j-1}$.

L'indice élémentaire $I_{t/j-1}(CB)$ de la juste valeur d'un compte titres qui serait composé de toutes les actions d'un sous ensemble d'entreprises sélec-

tionnées par l'homme de l'art (i.e. évaluées aux cours prévalant sur le marché), est appelé **indice de la capitalisation** – *capitalization-weighted index (CWI)* – de ce groupe à l'instant t (base 1 à la clôture de la séance précédente) : $I_{t/j-1}(CB) = \frac{CB_t}{CB_{j-1}} = \frac{\sum c_t Q_t}{\sum c_{j-1} Q_{j-1}}$.

Un indice de capitalisation est celui de la juste valeur de l'ensemble des entreprises retenues. Cette valeur est théorique puisque la totalité des actions ne peuvent être achetées aux cours relevés en bourse comme le révèle les **Offres Publiques d'Achat (OPA)** – *Takeover bid* – par exemple. Une telle opération ne peut en effet être réalisée en pratique que si la proposition de prix de rachat des actions de la société cible est faite à un cours plus élevé que celui constaté en bourse.

La plupart des indices de capitalisation utilisent en fait de nos jours des valeurs corrigées dites *flottantes* et *plafonnées* (cf. TD 3 § 3.3). En pratique, ce perfectionnement ne change pas grand-chose... quand il s'agit de chiffrer l'évolution des cours boursiers entre deux dates proches.

3.3 ● Vocabulaire des marchés

En finance, coter, c'est fixer un prix qui peut être d'achat, de vente, de *référence* ou même plus ou moins conventionnel.

Sur un marché organisé, le **prix acheteur** – *bid price* – s^- est le prix le plus élevé auquel l'un des opérateurs souhaite acheter immédiatement une certaine quantité (*bid size*) d'un titre. Le **prix vendeur** – *ask price* – s^+ (ou offert) est le prix le plus faible auquel l'un des opérateurs accepte de vendre immédiatement une certaine quantité (*ask size*) d'un titre. On appelle **échelon de cotation** – *tick size* – le plus petit écart possible séparant deux prix successifs (d'achat ou de vente). Le **carnet d'ordres** – *order book* – d'un titre recense à tout instant l'état des meilleures propositions d'achat et de vente.

La différence : $s^+ - s^-$, appelée **écart de cotation** – *bid/ask spread* – du titre, est un indicateur essentiel pour apprécier sa **liquidité** – *liquidity* –. L'intervalle $[s^-, s^+]$ est appelé fourchette de cotation et son centre **prix milieu de la fourchette** – *mid price* ou *mid-rate* –. Un **teneur du marché** – *market maker* – est un intermédiaire à la fois acheteur (au prix s^-) et vendeur d'un même titre (au prix s^+) ; il contribue ainsi à sa liquidité.

Les cambistes choisissent l'une des deux monnaies à échanger pour énoncer le prix de l'autre (la devise cotée) retenue comme unité de quantité dans les transactions. L'échelon de cotation, appelé « *pip* » sur le **marché des changes** – *foreign exchange market (forex)* – (ouvert 24 heures sur 24 et cinq jours sur sept), est presque toujours égal au dix millième de l'unité de la devise secondaire ; une exception notable concerne le yen pour lequel il n'est que le centième. Ce marché est très liquide : l'écart de cotation « EUR/USD » (dans laquelle l'euro est la devise principale et le dollar la devise secondaire) peut être très faible, 2 pips par exemple, soit 0,0002\$/€.

Chaque jour ouvrable, la Banque centrale européenne (BCE) diffuse des taux de change (c'est-à-dire des prix) de *référence* de l'euro contre de nombreuses devises. La liste publiée sur son site internet comporte 34 devises depuis le 3 janvier 2011. Ces références sont basées sur une procédure de concertation quotidienne entre banques qui a normalement lieu à 14 h 15 (heure de Francfort). Pour chaque devise suivie, le taux de référence choisi est le prix milieu de la fourchette de cotation de l'euro au certain.

La position prise par un investisseur est son exposition aux risques de fluctuations des cours sur les marchés qui dépendent de la loi de l'offre et de la demande.

Un investisseur peut acheter ou vendre des actions *au comptant* mais aussi *à terme* pour certaines (les plus traitées à Paris) en utilisant le **Service à Règlement Différé (SRD)** – *Deffered settlement service* – qui permet de différer le dénouement d'un achat ou d'une vente. Il suffit pour cela de disposer d'une garantie sous la forme d'un **compte de marge** – *margin account* – suffisamment créditeur en espèces et/ou obligations et/ou actions.

Un opérateur est **haussier** – *bullish* – pour un titre, s'il pense que son cours augmentera dans le futur. Il réalisera un profit s'il peut l'acheter pour le revendre plus cher plus tard et une perte dans le cas contraire. Après l'achat, on dit que sa **position** est **longue** – *long position* – ; pour la solder, il devra revendre ce titre.

Un opérateur est **baissier** – *bearish* – pour un titre, s'il pense que son cours baissera dans le futur. Il réalisera un profit s'il peut le vendre pour le racheter moins cher plus tard et une perte dans le cas contraire. Une **vente à découvert** – *short-selling* – consiste à vendre des titres qu'on n'a pas, ce qui est possible en utilisant le SRD. Les titres sont empruntés puis vendus et enfin restitués au moment choisi par l'opérateur. Après la vente, on dit que sa **position** est **courte** – *short position* – ; pour la solder, il devra racheter ce titre.



- TD 2 Taux de variation
- TD 3 Indices boursiers



1. Si 125 € représente 4 % d'un investissement, ce dernier est égal à :
 a) 2 000 € b) 2 500 € c) 3 125 € d) 4 000 €
2. Un conglomérat est composé de 3 entreprises : ABC réalise quatre fois le profit de BCD et CDE trois fois celui de BCD. Dans le total du profit du conglomérat, CDE représente donc :
 a) 12,5 % b) 20 % c) 37,5 % d) 40 %
3. Jérémie et Déborah détiennent respectivement 80 % et 20 % d'une société. Si David rentre à hauteur de 20 % dans le capital, la part de Déborah passe à :
 a) 15 % b) 16 % c) 18 % d) 20 %
4. En juillet 2004, un Big Mac valait 3,00 € à Paris et l'indice de son prix était égal à 120,0 (base 100 à Athènes). Pour l'acheter lors des jeux olympiques de juillet 2004 à Athènes, il fallait donc payer :
 a) 2,00 € b) 2,50 € c) 2,75 € d) 3,00 €
5. En avril 2001, le prix d'un Big Mac à Madrid était égal à 2,37 € et le facteur de croissance qui faisait passer à son prix à Francfort valait 1,105. Par ailleurs, le facteur de réduction qui faisait passer de son prix à Paris à celui à Francfort valait 0,929. Le prix d'un Big Mac à Paris était donc égal à :
 a) 2,62 € b) 2,72 € c) 2,82 € d) 2,92 €
6. Quelle est la valeur ajoutée d'un commerçant s'il vend (en avril 2012) au prix de 39,95 € TTC une calculatrice TI BAILL Plus achetée 24,58 € HT à son fournisseur ?
 a) 14,92 € b) 10,55 € c) 8,82 € d) 7,83 €

Pour vous aider. En avril 2012, on utilisait en France un facteur de croissance égal à 1,196 pour passer du prix HT au prix TTC.

7. Le 1^{er} décembre 1987, le coefficient utilisé pour passer du prix hors taxes d'un disque en vinyle au prix TTC a été ramené de 1,333 à 1,186. Si cette baisse de la TVA avait été parfaitement répercutée par les professionnels de l'industrie du disque au bénéfice des consommateurs, les commerçants auraient dû multiplier les anciens prix de vente affichés par un coefficient égal à environ :
 a) 0,920 b) 0,890 c) 0,843 d) 0,750

8. Si la cotation du franc suisse est : « EUR/CHF = 1,1250-1,1255 », un exportateur français qui vend CHF150 000 reçoit :

- a) 168 825,00 € ○ b) 168 750,00 €
 ○ c) 133 333,33 € ○ d) 133 274,10 €

Pour vous aider. Dans une cotation, un cambiste indique d'abord la devise principale puis la devise secondaire en utilisant la norme ISO 4217. EUR, CHF, USD, GBP sont ainsi respectivement les abréviations de l'euro, du franc suisse, du dollar américain et de la livre anglaise. Les prix s'énoncent dans la devise secondaire ; le premier est le prix offert (*bid price*, celui auquel le cambiste achète une unité de la devise principale) et le second est le prix demandé (*ask price*, celui auquel il la vend).

9. Si les cotations du dollar sont : EUR/USD = 1,3255-1,3260 et GBP/USD = 1,5575-1,5580, on en déduit que la cotation EUR/GBP (**cours croisé** – *cross rate* –) est :

- a) 0,8508-0,8511 ○ b) 0,8508-0,8514
 ○ c) 1,1746-1,1754 ○ d) 1,1750-1,1754

10. La valeur nominale des OAT est :

- a) égale à 1 € ○ b) égale à 100 €
 ○ c) égale à 1 000 € ○ d) variable

11. Un FCP composé de 17 millions de parts détient un portefeuille de titres valorisé 350 millions d'euros. Si ses dettes s'élèvent à 10 millions d'euros, la valeur liquidative unitaire de ses parts est égale à :

- a) 20,00 € ○ b) 20,59 € ○ c) 21,18 € ○ d) 22,00 €

12. La valeur liquidative des actions d'une SICAV est de 13,40 €. Si les droits d'entrée perçus lors de la souscription sont de 4 %, le prix demandé (*ask price*) des actions de cette OPCVM est égal à :

- a) 12,86 € ○ b) 13,40 € ○ c) 13,94 € ○ d) 13,96 €

13. Pour vendre à découvert dix actions XYZ qui cotaient 50 € le 1^{er} janvier 2012, Jérémie a déposé 1 000 € sur son compte de marge. Le 31 décembre 2012, un dividende de 2 € a été distribué par la société XYZ et 10 € ont été versés sur son compte de marge au titre des intérêts. À quel prix a-t-il racheté ces dix actions pour solder sa position le 1^{er} janvier 2013 si après cette opération son compte est créditeur de 1 040 € ?

- a) 32 € ○ b) 45 € ○ c) 50 € ○ d) 53 €

Les questions 14 et 15 utilisent les données suivantes :

Le cours de l'action Apple est passé de 236 \$ à 600 \$ entre le début du mois d'avril 2010 et celui d'avril 2012 et le nombre d'actions inscrites en bourse de 900 à 930 millions.

14. En avril 2012, l'indice (base 100 en avril 2010) de la plus-value d'un portefeuille composé d'actions Apple valait :

- a) 103,3 b) 155,0 c) 254,2 d) 262,7

15. En avril 2012, l'indice (base 100 en avril 2010) de la capitalisation d'Apple était égal à :

- a) 103,3 b) 155,0 c) 254,2 d) 262,7

16. Une SICAV est constituée de 5 millions d'actions et a une dette de 10 millions d'euros. Ses actifs sont composés d'un million d'actions XYZ et de deux millions d'actions ABC qui cotent respectivement 20 € et 50 €. Quelle est la valeur liquidative unitaire des actions de cette SICAV ?

- a) 22 € b) 10 € c) 35 € d) 14 €

17. Pour un investisseur, le meilleur OPCVM est celui :

- a) dont la politique d'investissement est celle qu'il recherche
 b) dont la performance a été la meilleure pendant au moins 4 années
 c) qui est classé 1er dans le palmarès publié par son journal financier
 d) dont les frais de gestion sont les plus faibles en pourcentage

18. Si les frais de gestion appliqués par un OPCVM sont importants, on peut en déduire :

- a) que sa performance sera très bonne à condition d'investir sur le long terme
 b) que sa performance sera très bonne à condition d'investir sur le court terme
 c) que l'équipe de gestion est très performante
 d) aucune des réponses a, b et c

19. Quel est le résultat, hors frais, d'une vente à découvert (réalisée en utilisant le SRD) de 100 actions XYZ au prix de 35 € si l'investisseur dénoue sa position au prix de 60 € :

- a) +250 € b) - 3 000 € c) +2 500 € d) - 2 500 €

20. Quel est le résultat, hors frais, d'un achat de 100 actions XYZ au prix de 35 € si l'investisseur dénoue sa position au prix de 60 € par action :

- a) +250 € b) - 3 000 € c) +2 500 € d) - 2 500 €

21. Dans le jargon financier, on désigne par pip :

- a) la devise secondaire utilisée pour coter un taux de change
 b) une variation de un pour cent mille d'un taux de change
 c) le plus petit écart possible entre deux cours d'un taux de change
 d) la devise principale utilisée pour coter un taux de change