MATHS
PCSI ▪ PTSI

Jean-Marie MONIER | Guillaume HABERER | Cécile LARDON

MATHS PCSI • PTSI

MÉTHODES ET EXERCICES

5e édition

DUNOD

Conception et création de couverture : Hokus Pokus Créations

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com

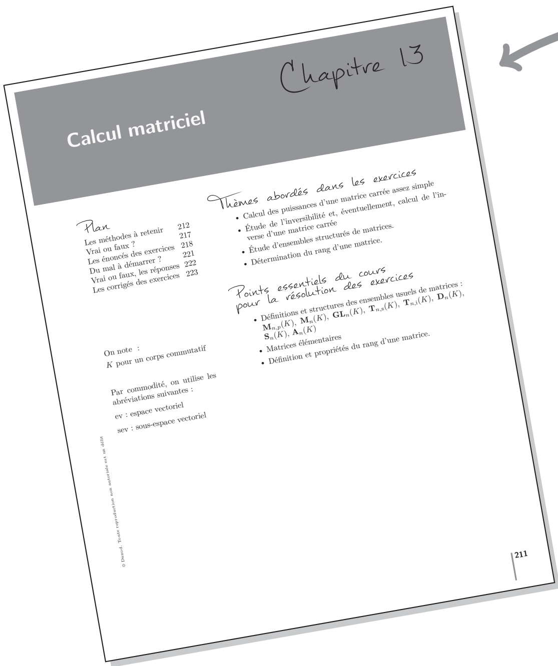
ISBN 978-2-10-081185-4

Table des matières

Compléments en ligne

Des compléments en ligne, disponibles sur la page de présentation de l'ouvrage du site de Dunod (`https://dunod.com/EAN/9782100811854`), vous donnent accès à des exercices de colles entièrement corrigés.

Pour bien utiliser cet ouvrage



Chapitre 13

Calcul matriciel

Plan

Thèmes abordés dans les exercices

- Calcul des puissances d'une matrice carrée assez simple
- Étude de l'inversibilité et, éventuellement, calcul de l'inverse d'une matrice carrée
- Étude d'ensembles structurés de matrices.
- Détermination du rang d'une matrice.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définitions et structures des ensembles usuels de matrices : $\mathbf{M}_{n,p}(K)$, $\mathbf{M}_n(K)$, $\mathbf{GL}_n(K)$, $\mathbf{T}_{n,s}(K)$, $\mathbf{T}_{n,i}(K)$, $\mathbf{D}_n(K)$, $\mathbf{S}_n(K)$, $\mathbf{A}_n(K)$
- Matrices élémentaires
- Définition et propriétés du rang d'une matrice.

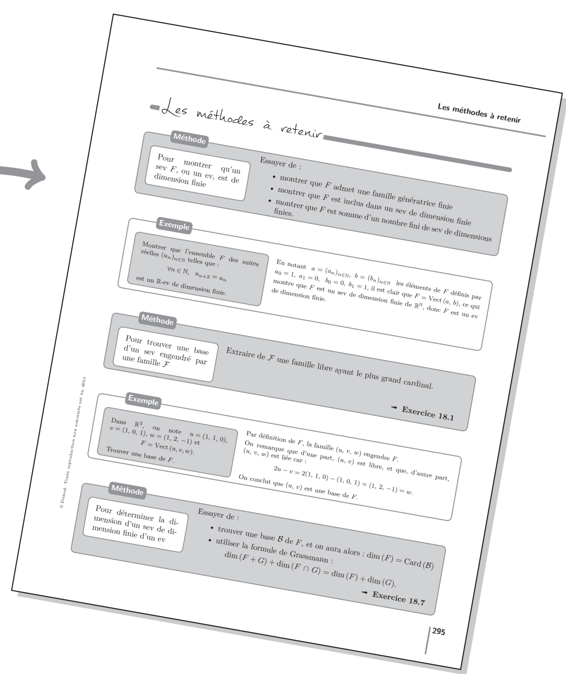
On note :
K pour un corps commutatif

Par commodité, on utilise les abréviations suivantes :
ev : espace vectoriel
sev : sous-espace vectoriel

211

La page d'entrée de chapitre

Elle propose un plan du chapitre, les thèmes abordés dans les exercices, ainsi qu'un rappel des points essentiels du cours pour la résolution des exercices.



Les méthodes à retenir

Les méthodes à retenir

Méthode

Pour montrer qu'un sev F, ou un ev, est de dimension finie

Essayer de :
- montrer que F admet une famille génératrice finie
- montrer que F est inclus dans un sev de dimension finie
- montrer que F est somme d'un nombre fini de sev de dimensions finies.

Exemple

Montrer que l'ensemble F des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_n$ est un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie.

En notant $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les éléments de F définis par $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $b_0 = 0$, $b_1 = 1$, il est clair que $F = \mathrm{Vect}(a, b)$, ce qui montre que F est un sev de dimension finie de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, donc F est un ev de dimension finie.

Méthode

Pour trouver une base d'un sev engendré par une famille $\mathcal{F}$

Extraire de $\mathcal{F}$ une famille libre ayant le plus grand cardinal.

➥ Exercice 18.1

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$, on note $u = (1, 1, 0)$, $v = (1, 0, 1)$, $w = (1, 2, -1)$ et $F = \mathrm{Vect}(u, v, w)$. Trouver une base de F.

Par définition de F, la famille (u, v, w) engendre F. On remarque que d'une part, (u, v) est libre, et que, d'autre part, (u, v, w) est liée car :
$$2u - v = 2(1, 1, 0) - (1, 0, 1) = (1, 2, -1) = w.$$
On conclut que (u, v) est une base de F.

Méthode

Pour déterminer la dimension d'un sev de dimension finie d'un ev

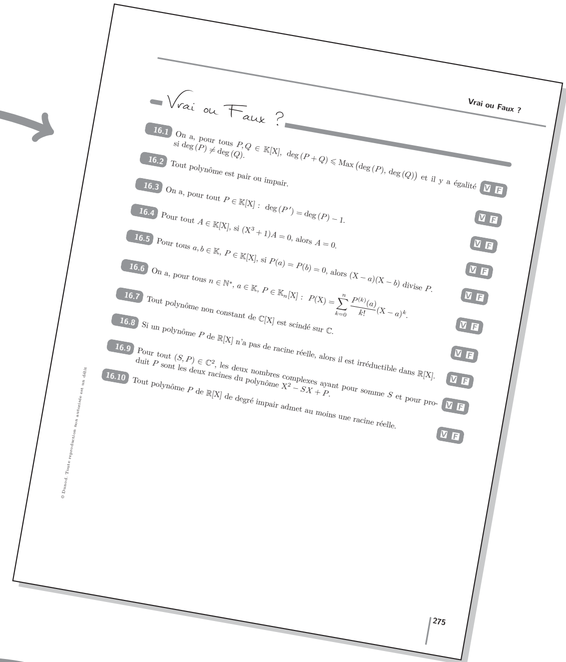
Essayer de :
- trouver une base $\mathcal{B}$ de F, et on aura alors : $\dim(F) = \mathrm{Card}(\mathcal{B})$
- utiliser la formule de Grassmann : $\dim(F + G) + \dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G)$.

➥ Exercice 18.7

295

Les méthodes à retenir

Cette rubrique constitue une synthèse des principales méthodes à connaître, détaillées étape par étape, et indique les exercices auxquels elles se rapportent.
Chaque méthode est illustrée par un ou deux exemples qui la suivent.



Vrai ou Faux ?

16.1 On a, pour tous $P,Q \in \mathbb{K}[X]$, $\deg(P+Q) \leqslant \operatorname{Max}(\deg(P), \deg(Q))$ et il y a égalité si $\deg(P) \neq \deg(Q)$. V F

16.2 Tout polynôme est pair ou impair. V F

16.3 On a, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$: $\deg(P') = \deg(P) - 1$. V F

16.4 Pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$, si $(X^3+1)A = 0$, alors $A = 0$. V F

16.5 Pour tous $a,b \in \mathbb{K}$, $P \in \mathbb{K}[X]$, si $P(a) = P(b) = 0$, alors $(X-a)(X-b)$ divise P. V F

16.6 On a, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{K}$, $P \in \mathbb{K}_n[X]$: $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$. V F

16.7 Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$. V F

16.8 Si un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ n'a pas de racine réelle, alors il est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. V F

16.9 Pour tout $(S,P) \in \mathbb{C}^2$, les deux nombres complexes ayant pour somme S et pour produit P sont les deux racines du polynôme $X^2 - SX + P$. V F

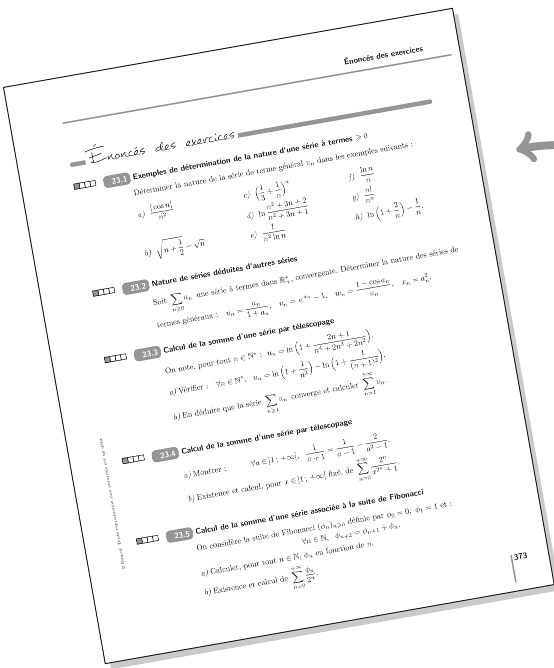
16.10 Tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair admet au moins une racine réelle. V F

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

275

Vrai ou Faux ?

Dix questions pour vérifier la bonne compréhension du cours.



Énoncés des exercices

23.1 **Exemples de détermination de la nature d'une série à termes $\geqslant 0$**

Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les exemples suivants :

a) $\dfrac{|\cos n|}{n^2}$ b) $\sqrt{n+\frac{1}{2}} - \sqrt{n}$ c) $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right)^n$ d) $\ln \dfrac{n^2+3n+2}{n^2+3n+1}$ e) $\dfrac{1}{n^2 \ln n}$ f) $\dfrac{\ln n}{n}$ g) $\dfrac{n!}{n^n}$ h) $\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) - \frac{1}{n}$.

23.2 **Nature de séries déduites d'autres séries**

Soit $\sum_{n \geqslant 0} a_n$ une série à termes dans $\mathbb{R}_+^*$, convergente. Déterminer la nature des séries de termes généraux : $u_n = \dfrac{a_n}{1+a_n}$, $v_n = e^{a_n} - 1$, $w_n = \dfrac{1-\cos a_n}{a_n}$, $x_n = a_n^2$.

23.3 **Calcul de la somme d'une série par télescopage**

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{2n+1}{n^4+2n^3+2n^2}\right)$.

a) Vérifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right)$.

b) En déduire que la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge et calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

23.4 **Calcul de la somme d'une série par télescopage**

a) Montrer : $\forall a \in]1\,;+\infty[, \quad \dfrac{1}{a+1} = \dfrac{1}{a-1} - \dfrac{2}{a^2-1}$.

b) Existence et calcul, pour $x \in]1\,;+\infty[$ fixé, de $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{2^n}{x^{2^n}+1}$.

23.5 **Calcul de la somme d'une série associée à la suite de Fibonacci**

On considère la suite de Fibonacci $(\phi_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $\phi_0 = 0$, $\phi_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n$.

a) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, ϕ_n en fonction de n.

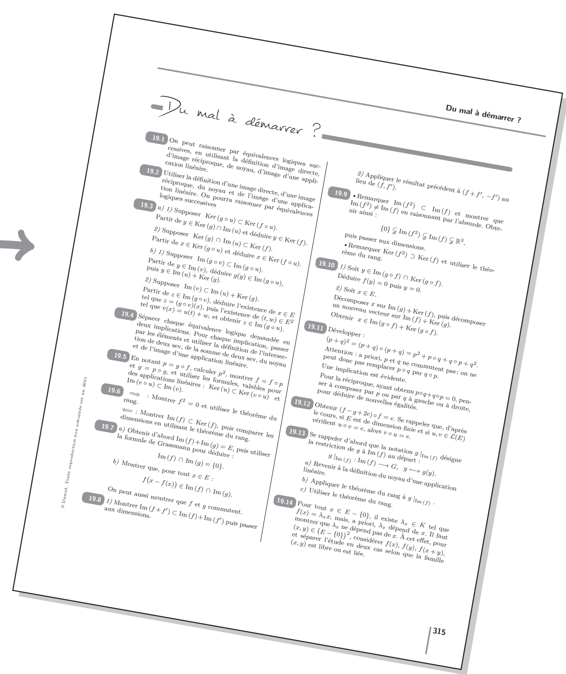
b) Existence et calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\phi_n}{2^n}$.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

373

Énoncés des exercices

De nombreux exercices de difficulté croissante sont proposés pour s'entraîner. La difficulté de chaque exercice est indiquée sur une échelle de 1 à 4.



Du mal à démarrer ?

19.1 On peut raisonner par équivalences logiques successives, en utilisant la définition d'image directe, d'image réciproque, de noyau, d'image d'une application linéaire.

19.2 Utiliser la définition d'une image directe, d'une image réciproque, du noyau et de l'image d'une application linéaire. On pourra raisonner par équivalences logiques successives

19.3 a) 1) Supposer $\operatorname{Ker}(g \circ u) \subset \operatorname{Ker}(f \circ u)$. Partir de $y \in \operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(u)$ et déduire $y \in \operatorname{Ker}(f)$.

2) Supposer $\operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(u) \subset \operatorname{Ker}(f)$. Partir de $x \in \operatorname{Ker}(g \circ u)$ et déduire $x \in \operatorname{Ker}(f \circ u)$.

b) 1) Supposer $\operatorname{Im}(g \circ v) \subset \operatorname{Im}(g \circ u)$. Partir de $y \in \operatorname{Im}(v)$, déduire $g(y) \in \operatorname{Im}(g \circ u)$, puis $y \in \operatorname{Im}(u) + \operatorname{Ker}(g)$.

2) Supposer $\operatorname{Im}(v) \subset \operatorname{Im}(u) + \operatorname{Ker}(g)$. Partir de $z \in \operatorname{Im}(g \circ v)$, déduire l'existence de $x \in E$ tel que $z = (g \circ v)(x)$, puis l'existence de $(t,w) \in E^2$ tel que $v(x) = u(t) + w$, et obtenir $z \in \operatorname{Im}(g \circ u)$.

19.4 Séparer chaque équivalence logique demandée en deux implications. Pour chaque implication, passer par les éléments et utiliser la définition de l'intersection de deux sev, de la somme de deux sev, du noyau et de l'image d'une application linéaire.

19.5 En notant $p = g \circ f$, calculer p^2, montrer $f = f \circ p$ et $g = p \circ g$, et utiliser les formules, valables pour des applications linéaires : $\operatorname{Ker}(u) \subset \operatorname{Ker}(v \circ u)$ et $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im}(v)$.

19.6 $\Longrightarrow$: Montrer $f^2 = 0$ et utiliser le théorème du rang.

$\Longleftarrow$: Montrer $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker}(f)$, puis comparer les dimensions en utilisant le théorème du rang.

19.7 a) Obtenir d'abord $\operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g) = E$, puis utiliser la formule de Grassmann pour déduire :

$$\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Im}(g) = \{0\}.$$

b) Montrer que, pour tout $x \in E$:

$$f\big(x - f(x)\big) \in \operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Im}(g).$$

On peut aussi montrer que f et g commutent.

19.8 1) Montrer $\operatorname{Im}(f+f') \subset \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(f')$ puis passer aux dimensions.

2) Appliquer le résultat précédent à $(f+f', -f')$ au lieu de (f, f').

19.9 • Remarquer $\operatorname{Im}(f^2) \subset \operatorname{Im}(f)$ et montrer que $\operatorname{Im}(f^2) \neq \operatorname{Im}(f)$ en raisonnant par l'absurde. Obtenir ainsi :

$$\{0\} \subsetneqq \operatorname{Im}(f^2) \subsetneqq \operatorname{Im}(f) \subsetneqq \mathbb{R}^3,$$

puis passer aux dimensions.

• Remarquer $\operatorname{Ker}(f^2) \supset \operatorname{Ker}(f)$ et utiliser le théorème du rang.

19.10 1) Soit $y \in \operatorname{Im}(g \circ f) \cap \operatorname{Ker}(g \circ f)$. Déduire $f(y) = 0$ puis $y = 0$.

2) Soit $x \in E$. Décomposer x sur $\operatorname{Im}(g) + \operatorname{Ker}(f)$, puis décomposer un nouveau vecteur sur $\operatorname{Im}(f) + \operatorname{Ker}(g)$. Obtenir $x \in \operatorname{Im}(g \circ f) + \operatorname{Ker}(g \circ f)$.

19.11 Développer :

$$(p+q)^2 = (p+q) \circ (p+q) = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2.$$

Attention : a priori, p et q ne commutent pas ; on ne peut donc pas remplacer $p \circ q$ par $q \circ p$.

Une implication est évidente.

Pour la réciproque, ayant obtenu $p \circ q + q \circ p = 0$, penser à composer par p ou par q à gauche ou à droite, pour déduire de nouvelles égalités.

19.12 Obtenir $(f - g + 2e) \circ f = e$. Se rappeler que, d'après le cours, si E est de dimension finie et si $u, v \in \mathcal{L}(E)$ vérifient $u \circ v = e$, alors $v \circ u = e$.

19.13 Se rappeler d'abord que la notation $g\,|_{\operatorname{Im}(f)}$ désigne la restriction de g à $\operatorname{Im}(f)$ au départ :

$$g\,|_{\operatorname{Im}(f)} : \operatorname{Im}(f) \longrightarrow G, \quad y \longmapsto g(y).$$

a) Revenir à la définition du noyau d'une application linéaire.

b) Appliquer le théorème du rang à $g\,|_{\operatorname{Im}(f)}$.

c) Utiliser le théorème du rang.

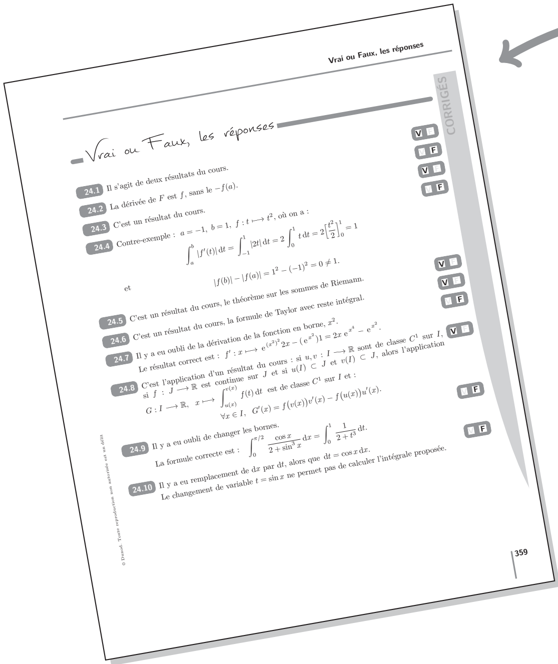
19.14 Pour tout $x \in E - \{0\}$, il existe $\lambda_x \in K$ tel que $f(x) = \lambda_x x$, mais, a priori, λ_x dépend de x. Il faut montrer que λ_x ne dépend pas de x. À cet effet, pour $(x,y) \in \big(E - \{0\}\big)^2$, considérer $f(x)$, $f(y)$, $f(x+y)$, et séparer l'étude en deux cas selon que la famille (x,y) est libre ou est liée.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

315

Du mal à démarrer ?

Des conseils méthodologiques sont proposés pour bien aborder la résolution des exercices.



Vrai ou Faux, les réponses

CORRIGÉS

Vrai ou Faux, les réponses

24.1 Il s'agit de deux résultats du cours. V

24.2 La dérivée de F est f, sans le $-f(a)$. F

24.3 C'est un résultat du cours. V

24.4 Contre-exemple : $a = -1$, $b = 1$, $f : t \longmapsto t^2$, où on a :

$$\int_a^b |f'(t)|\,dt = \int_{-1}^1 |2t|\,dt = 2\int_0^1 t\,dt = 2\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 1$$

et $$|f(b)| - |f(a)| = 1^2 - (-1)^2 = 0 \neq 1.$$ F

24.5 C'est un résultat du cours, le théorème sur les sommes de Riemann. V

24.6 C'est un résultat du cours, la formule de Taylor avec reste intégral. V

24.7 Il y a eu oubli de la dérivation de la fonction en borne, x^2. Le résultat correct est : $f' : x \longmapsto e^{(x^2)^2}2x - (e^{x^2})1 = 2x\,e^{x^4} - e^{x^2}$. F

24.8 C'est l'application d'un résultat du cours : si $u, v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^1 sur I, si $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur J et si $u(I) \subset J$ et $v(I) \subset J$, alors l'application $G : I \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$ est de classe C^1 sur I et : $\forall x \in I,\ G'(x) = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x)$. V

24.9 Il y a eu oubli de changer les bornes. La formule correcte est : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{2+\sin^2 x}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2+t^2}\,dt$. F

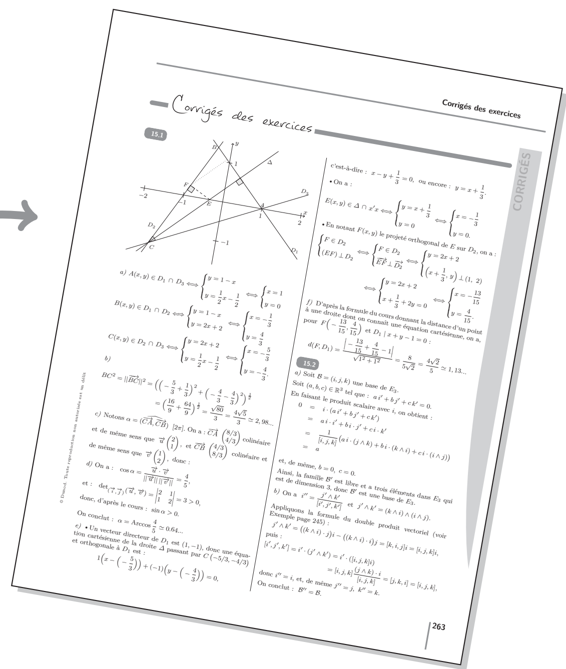
24.10 Il y a eu remplacement de dx par dt, alors que $dt = \cos x\,dx$. Le changement de variable $t = \sin x$ ne permet pas de calculer l'intégrale proposée. F

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit

359

Vrai ou Faux, les réponses

Chaque affirmation vraie est justifiée par une référence au cours ou une courte démonstration, et chaque affirmation fausse est réfutée par la production d'un contre-exemple explicite.



Corrigés des exercices

Corrigés des exercices

CORRIGÉS

15.1

15.2

263

Corrigés des exercices

Tous les exercices sont corrigés de façon détaillée.

Remerciements

Nous tenons ici à exprimer notre gratitude aux nombreux collègues qui ont accepté de réviser des parties du manuscrit :

> Marc Albrecht, Bruno Arsac, Jean-Philippe Berne, Jacques Blanc, Gérard Bourgin, Sophie Cohéléach, Carine Courant, Sylvain Delpech, Hermin Durand, Jean Feyler, Viviane Gaggioli, Marguerite Gauthier, Daniel Genoud, André Laffont, Hadrien Larôme, Ibrahim Rihaoui, René Roy, Philippe Saadé, Marie-Dominique Siéfert, Marie-Pascale Thon, Audrey Verdier.

Chapitre 1

Raisonnement, vocabulaire ensembliste

Plan

Thèmes abordés dans les exercices

- Mise en œuvre, sur des exemples simples, des différents types de raisonnement
- Égalités et inclusions d'ensembles obtenus par opérations sur des parties d'un ensemble
- Injectivité, surjectivité, bijectivité
- Image directe, image réciproque d'une partie par une application.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition et propriétés des opérations entre ensembles, $\cap$, $\cup$, $\complement_E$, $\setminus$
- Définition de la fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble
- Définition du produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles
- Définition et propriétés de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité pour les applications
- Définition de l'image directe, de l'image réciproque d'une partie par une application
- Relations d'équivalence.

Les méthodes à retenir

Méthode

Pour travailler de manière générale sur des ensembles

Essayer de passer par les éléments des ensembles, ou de calculer globalement sur les ensembles. La deuxième voie est en général plus courte et plus claire (si elle est praticable).

➟ **Exercices 1.1, 1.2, 1.7, 1.8, 1.14 à 1.16**

Exemple

Soient E un ensemble, $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$.
Montrer : $(A \backslash C) \backslash (B \backslash C) = A \backslash (B \cup C)$.

On a :

$$\begin{aligned}
(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) &= (A \cap \overline{C}) \setminus (B \cap \overline{C}) \\
&= (A \cap \overline{C}) \cap \overline{B \cap \overline{C}} \\
&= (A \cap \overline{C}) \cap (\overline{B} \cup C) \\
&= (A \cap \overline{C} \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C} \cap C) \\
&= A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \\
&= A \cap (\overline{B \cup C}) \\
&= A \setminus (B \cup C).
\end{aligned}$$

Méthode

Pour établir une égalité d'ensembles

Essayer de :

- soit montrer directement l'égalité
- soit montrer deux inclusions : $A \subset B$ et $B \subset A$
- soit utiliser les fonctions indicatrices des parties d'un ensemble

➟ **Exercices 1.2, 1.7, 1.8, 1.11, 1.16**

Dans chacune des deux premières options, on essaie de passer par les éléments ou de calculer globalement sur les ensembles.

Exemple

Soient E un ensemble, $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Montrer :
$(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$.

On a :

$$\begin{aligned}
(A \setminus B) \cup (A \setminus C) &= (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) \\
&= A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) \\
&= A \cap \overline{B \cap C} \\
&= A \setminus (B \cap C).
\end{aligned}$$

Exemple

Montrer :

$$\{y \in \mathbb{R}\,;\ \exists x \in [-1\,;\,2],\ \ y = x^2\} = [0\,;\,4].$$

- Soit $y \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $x \in [-1\,;\,2]$ tel que $y = x^2$.

Si $x \in [-1\,;\,0]$, alors $y \in [0\,;\,1]$.
Si $x \in [0\,;\,2]$, alors $y \in [0\,;\,4]$.
On déduit $y \in [0\,;\,4]$.

Ceci montre que le premier ensemble est inclus dans le second.

- Réciproquement, soit $y \in [0\,;\,4]$.

En notant $x = \sqrt{y}$, on a $x \in [0\,;\,2] \subset [-1\,;\,2]$ et $y = x^2$.

Ceci montre que le second ensemble est inclus dans le premier.

On conclut à l'égalité demandée.

Méthode

Pour montrer, par récurrence (faible), qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n tel que $n \geqslant n_0$

Montrer que :

- $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie (*initialisation*)
- pour tout entier n fixé tel que $n \geqslant n_0$, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie (*hérédité*).

➟ **Exercice 1.5**

Exemple

On considère la suite de Fibonacci $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\phi_0 = 0$, $\phi_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n.$$

Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \phi_{n+1}^2 - \phi_{n+2}\phi_n = (-1)^n.$$

Initialisation :
Pour $n = 0$, on a : $\phi_1^2 - \phi_2\phi_0 = 1^2 - 1 \cdot 0 = 1 = (-1)^0$,
donc la formule est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Supposons que la formule soit vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.
On a alors :

$$\begin{aligned}
\phi_{n+2}^2 - \phi_{n+3}\phi_{n+1} &= \phi_{n+2}^2 - (\phi_{n+2} + \phi_{n+1})\phi_{n+1}\\
&= (\phi_{n+2}^2 - \phi_{n+2}\phi_{n+1}) - \phi_{n+1}^2\\
&= \phi_{n+2}(\phi_{n+2} - \phi_{n+1}) - \phi_{n+1}^2\\
&= \phi_{n+2}\phi_n - \phi_{n+1}^2\\
&= -(\phi_{n+1}^2 - \phi_{n+2}\phi_n)\\
&= -(-1)^n \ = \ (-1)^{n+1},
\end{aligned}$$

donc la formule est vraie pour $n + 1$.

Ceci montre, par récurrence, que la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Méthode

Pour montrer, par récurrence à deux pas, qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n tel que $n \geqslant n_0$

Montrer que :

- $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ sont vraies (*initialisation*)
- pour tout entier n fixé tel que $n \geqslant n_0$, si $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies, alors $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie (*hérédité*).

➟ **Exercice 1.9**

Exemple

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2}.$$

Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n > 0.$$

Initialisation : Pour $n = 1$, on a $u_1 = 1 > 0$, et, pour $n = 2$, on a $u_2 = \dfrac{u_1 + u_0}{2} = \dfrac{1}{2} > 0$ donc la propriété est vraie pour $n = 1$ et pour $n = 2$.

Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie pour n et $n+1$, où $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé. On a donc $u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$, d'où $\dfrac{u_{n+1} + u_n}{2} > 0$, donc la propriété est vraie pour $n+2$.

Ceci montre, par récurrence à deux pas, que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Méthode

Pour montrer, par récurrence forte, qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n tel que $n \geqslant n_0$

Montrer que :

- $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie (*initialisation*)
- pour tout entier n fixé tel que $n \geqslant n_0$, si $\mathcal{P}(n_0), ..., \mathcal{P}(n)$ sont vraies, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie (*hérédité*).

➟ **Exercice 1.10**

Exemple

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \frac{u_1 + u_2^2 + \cdots + u_n^n}{n^n}.$$

Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < u_n \leqslant 1$.

Initialisation : Pour $n = 1$, on a bien $0 < u_1 \leqslant 1$ car $u_1 = 1$.

Hérédité : Supposons, pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, que l'on ait :

$$\forall k \in \{1, ..., n\}, \quad 0 < u_k \leqslant 1.$$

On a alors : $u_{n+1} = \dfrac{u_1 + u_2^2 + \cdots + u_n^n}{n^n} > \dfrac{0 + \cdots + 0}{n^n} = 0$

et $u_{n+1} = \dfrac{u_1 + u_2^2 + \cdots + u_n^n}{n^n} \leqslant \dfrac{1 + \cdots + 1}{n^n} = \dfrac{n}{n^n} = \dfrac{1}{n^{n-1}} \leqslant 1.$

Ceci montre, par récurrence forte : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < u_n \leqslant 1$.

Méthode

Pour résoudre une question portant sur injectivité, surjectivité, bijectivité, d'applications dans un cadre général

Essayer de :

- utiliser les définitions et les propositions du cours sur la composée de deux applications injectives (resp. surjectives)
- utiliser le résultat de l'exercice classique 1.12 (en le redémontrant).

➟ **Exercices 1.3, 1.12, 1.13**

Exemple

Soient E un ensemble, $f : E \longrightarrow E$ une application telle que $f \circ f = \mathrm{Id}_E$.

Montrer que f est bijective et que :

$$f^{-1} = f.$$

⋆ • *Injectivité :* Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$.

On a alors :

$$x_1 = (f \circ f)(x_1) = f\big(f(x_1)\big) = f\big(f(x_2)\big) = (f \circ f)(x_2) = x_2.$$

Ceci montre que f est injective.

• *Surjectivité :* Soit $y \in E$.

On a : $y = (f \circ f)(y) = f\big(f(y)\big)$, donc il existe $x \in E$ (on peut prendre $x = f(y)$) tel que $y = f(x)$. Ceci montre que f est surjective.

On conclut que f est bijective.

⋆ Puisque f est bijective, on peut utiliser f^{-1} et on a :

$$f^{-1} = f^{-1} \circ \mathrm{Id}_E = f^{-1} \circ (f \circ f) = (f^{-1} \circ f) \circ f = \mathrm{Id}_E \circ f = f.$$

Méthode

Pour manipuler, dans un cadre général, des images directes, des images réciproques de parties par des applications

Appliquer les définitions.

Pour $f : E \longrightarrow F,\ A \in \mathcal{P}(E),\ A' \in \mathcal{P}(F)$, on a :

$$f(A) = \big\{y \in F\,;\, \exists\, a \in A,\quad y = f(x)\big\},$$
$$f^{-1}(A') = \big\{x \in E\,;\ f(x) \in A'\big\}.$$

Autrement dit :

pour tout $y \in F$: $\quad y \in f(A) \iff \big(\exists\, a \in A,\quad y = f(a)\big)$

et, pour tout $x \in E$: $\quad x \in f^{-1}(A') \iff f(x) \in A'$.

➟ **Exercices 1.14, 1.15**

Exemple

Soient E, F deux ensembles, une application $f : E \longrightarrow F$ et $A' \in \mathcal{P}(F)$.

Montrer :

$$f^{-1}\Big(\complement_F(A')\Big) = \complement_E\big(f^{-1}(A')\big).$$

On a, pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\Big(\complement_F(A')\Big) &\iff f(x) \in \complement_F(A') \\ &\iff f(x) \notin A' \\ &\iff \text{Non } \big(f(x) \in A'\big) \\ &\iff \text{Non } \big(x \in f^{-1}(A')\big) \\ &\iff x \in \complement_E\big(f^{-1}(A')\big), \end{aligned}$$

d'où l'égalité voulue.

Méthode

Pour montrer qu'une relation $\mathcal{R}$, dans un ensemble E, est une relation d'équivalence

Revenir à la définition, c'est-à-dire montrer que :

- $\mathcal{R}$ est réflexive : $\quad \forall x \in E,\quad x\,\mathcal{R}\,x$
- $\mathcal{R}$ est symétrique : $\quad \forall (x, y) \in E^2,\quad \big(x\,\mathcal{R}\,y \implies y\,\mathcal{R}\,x\big)$
- $\mathcal{R}$ est transitive : $\quad \forall (x, y, z) \in E^3,\quad \begin{cases} x\,\mathcal{R}\,y \\ y\,\mathcal{R}\,z \end{cases} \implies x\,\mathcal{R}\,z.$

➟ **Exercice 1.6**

Exemple

On note $\mathcal{R}$ la relation définie dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \big(x \,\mathcal{R}\, y \iff |x| = |y|\big).$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{R}$ et déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la classe de x modulo $\mathcal{R}$.

⋆
- On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| = |x|$, d'où $x \,\mathcal{R}\, x$, donc $\mathcal{R}$ est réflexive.
- On a, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$x \,\mathcal{R}\, y \iff |x| = |y| \iff |y| = |x| \iff y \,\mathcal{R}\, x,$$

donc $\mathcal{R}$ est symétrique.

- On a, pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x \,\mathcal{R}\, y \\ y \,\mathcal{R}\, z \end{cases} \iff \begin{cases} |x| = |y| \\ |y| = |z| \end{cases} \implies |x| = |z| \iff x \,\mathcal{R}\, z,$$

donc $\mathcal{R}$ est transitive.

On conclut que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{R}$.

⋆ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la classe de x modulo $\mathcal{R}$ est :

$$\widehat{x} = \{y \in \mathbb{R}\,;\ x \,\mathcal{R}\, y\} = \{y \in \mathbb{R}\,;\ |x| = |y|\} = \begin{cases} \{x, -x\} & \text{si } x \neq 0 \\ \{0\} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Vrai ou Faux ?

1.1 Pour toutes parties A, B d'un ensemble E, on a : $A \cap B = \varnothing \iff B \subset \complement_E(A)$. V F

1.2 Pour toutes parties A, B d'un ensemble E, on a : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. V F

1.3 $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\quad x \leqslant y$. V F

1.4 $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\quad x \leqslant y$. V F

1.5 Si les applications $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ sont injectives, alors l'application $g \circ f$ est injective. V F

1.6 Si l'application composée $g \circ f$ est injective, alors f et g sont injectives. V F

1.7 Si une application $f : E \longrightarrow E$ vérifie $f \circ f = \mathrm{Id}_E$, alors f est bijective et $f^{-1} = f$. V F

1.8 Si une application $f : E \longrightarrow E$ vérifie $f \circ f = f$, alors $f = \mathrm{Id}_E$. V F

1.9 Soient E, F des ensembles, $f : E \longrightarrow F$ une application, A, B des parties de E. On a alors :

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

V F

1.10 Soient E, F des ensembles, $f : E \longrightarrow F$ une application, A, B des parties de E. On a alors :

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

V F

Énoncés des exercices

1.1 Exemple de calcul ensembliste : inclusion

Soient E un ensemble, A, B, $C \in \mathcal{P}(E)$.

a) Montrer : $(A \cup B) \cap C \ \subset \ A \cup (B \cap C)$.

b) Établir qu'il y a égalité dans l'inclusion précédente si et seulement si : $A \subset C$.

1.2 Exemple de calcul ensembliste : équivalence entre deux égalités

Soient E un ensemble, $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer :

$$A \cup B = A \cup C \iff A \cup \overline{B} = A \cup \overline{C}.$$

1.3 Exemple d'une restriction bijective

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par : $f(x) = \dfrac{3x-1}{x-2}$.

a) Montrer qu'il existe un réel et un seul, noté a, n'ayant pas d'image par f.

b) Montrer qu'il existe un réel et un seul, noté b, n'ayant pas d'antécédent par f.

c) Montrer que la restriction g de f à $\mathbb{R}\setminus\{a\}$ au départ et à $\mathbb{R}\setminus\{b\}$ à l'arrivée est bijective, et préciser l'application réciproque g^{-1} de g.

1.4 Exemple de calcul de composée de deux applications

On note $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ les applications définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = 1 + x, \qquad g(x) = x^2.$$

Préciser $f \circ g$ et $g \circ f$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

1.5 Exemple de raisonnement par récurrence (faible)

On considère la suite de Lucas $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_{n+2} = L_{n+1} + L_n.$$

Montrer, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

a) $L_{n+1}^2 - L_n L_{n+2} = 5(-1)^{n+1}$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} L_k^2 = L_n L_{n+1} + 2$

c) $L_{2n} = L_n^2 - 2(-1)^n \quad$ et $\quad L_{2n+1} = L_n L_{n+1} - (-1)^n$.

1.6 Exemple de relation d'équivalence dans $\mathbb{R}$

On note $\mathcal{R}$ la relation définie dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \big(x \,\mathcal{R}\, y \iff x^2 - 2x = y^2 - 2y\big).$$

a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{R}$.

b) Déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la classe d'équivalence de x modulo $\mathcal{R}$.

1.7 Réunion ou intersection de produits cartésiens

Soient E, F deux ensembles, A_1, A_2 des parties de E, B_1, B_2 des parties de F.

a) Montrer : $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$.

b) 1) Montrer : $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_1) = (A_1 \cup A_2) \times B_1$.

2) A-t-on nécessairement : $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) = (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$?

1.8 Équivalence entre trois assertions faisant intervenir des différences ensemblistes

Soient E un ensemble, $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$.

Montrer que les trois assertions suivantes sont deux à deux équivalentes :

1) $A \setminus B \subset C$, 2) $A \setminus C \subset B$, 3) $A \subset B \cup C$.

1.9 Applications : composition, injectivité, surjectivité

Soient E, F des ensembles, $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ des applications.

a) Montrer que, si $f \circ g \circ f = f$ et si f est injective, alors g est surjective.

b) Montrer que, si $g \circ f \circ g = g$ et si g est surjective, alors f est injective.

1.10 Exemple de raisonnement par récurrence forte

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{k!(n-k)!}.$$

Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \mathbb{Q}_+^*$.

1.11 Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble

Soit E un ensemble.

On rappelle que, pour toute $A \in \mathcal{P}(E)$, la fonction indicatrice de A est l'application

$$\mathbf{1}_A : E \longmapsto \{0,1\}, \quad x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A. \end{cases}$$

On note 1 l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\{0,1\}$ constante égale à 1.

a) Montrer, pour toutes $A, B \in \mathcal{P}(E)$:

$$A = B \iff \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B, \qquad \mathbf{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbf{1}_A,$$
$$\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B, \qquad \mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B, \qquad \mathbf{1}_{A \setminus B} = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B.$$

b) En déduire, pour toutes $A, B \in \mathcal{P}(E)$: $A \cap (A \cup B) = A$ et $A \cup (A \cap B) = A$.

1.12 Composée injective, composée surjective

Soient E, F, G des ensembles, $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ des applications. Montrer :

a) si $g \circ f$ est injective, alors f est injective

b) si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective

c) si $g \circ f$ est bijective, alors f est injective et g est surjective.

1.13 Conséquences de la bijectivité d'une certaine composée

Soient E, F des ensembles, $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow E$ des applications.

On suppose que $g \circ f \circ g$ est bijective. Montrer que f et g sont bijectives.

On pourra utiliser le résultat de l'exercice 1.12

1.14 Images directes de parties par une application

Soient E, E' deux ensembles, $f : E \longrightarrow E'$ une application. Montrer, pour toutes parties A, B de E :

a) $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$

b) $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$

c) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

d) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

1.15 Images réciproques de parties par une application

Soient E, E' deux ensembles, $f : E \longrightarrow E'$ une application. Montrer, pour toutes parties A', B' de E :

a) $A' \subset B' \implies f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$

b) $f\big(f^{-1}(A')\big) \subset A'$

c) $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$

d) $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$.

1.16 Différence symétrique, associativité

Soit E un ensemble. On note, pour toutes parties A, B de E :

$$A \,\triangle\, B = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)},$$

appelée *différence symétrique* de A et B.

a) Deux exemples : Déterminer $A \,\triangle\, B$ dans les deux exemples suivants :

1) $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$

2) $E = \mathbb{R}$, $A =]-\infty\,; 2]$, $B = [1\,; +\infty[$.

b) Établir : $\forall (A, B) \in \big(\mathcal{P}(E)\big)^2, \ A \,\triangle\, B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$.

c) Montrer, pour tout $(A, B) \in \big(\mathcal{P}(E)\big)^2$: $\mathbf{1}_{A \triangle B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2 \cdot \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.

d) En déduire que la loi $\triangle$ est associative dans $\mathcal{P}(E)$, c'est-à-dire :

$$\forall (A, B, C) \in \big(\mathcal{P}(E)\big)^3, \ (A \,\triangle\, B) \,\triangle\, C = A \,\triangle\, (B \,\triangle\, C).$$