

JEAN-PAUL BELLIER, CHRISTOPHE BOULOY, DANIEL GUÉANT

EXPÉRIENCES **DE PHYSIQUE**

**ELECTRICITÉ, ÉLECTROMAGNÉTISME,
ÉLECTRONIQUE, TRANSFERTS THERMIQUES**
CAPES/CAPLP/AGRÉGATION

DUNOD

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du

Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Paris 2020

11 Rue Paul Bert, 92240 Malakoff

ISBN 978-2-10-080963-9

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.



Table des matières

1	Mesure de grandeurs, unités, équations aux dimensions, incertitudes	1
1	Grandeur mesurable	1
2	Unités	2
3	Équations aux dimensions	9
4	Incertitudes	11
5	Présentation du résultat de la mesure	21
6	Étude expérimentale pour illustrer ces notions	23
7	Quelques exemples de calcul d'incertitude	25
2	Grandeurs électriques	27
1	Introduction	27
2	Grandeurs électriques en régime continu	29
3	Grandeurs électriques en régime variable	40
4	Redressement et lissage d'une tension alternative	46
3	Régimes transitoires en électricité	61
1	Rappels théoriques sur les régimes transitoires	61
2	La modélisation des énergies sous regressi	67
3	Charge et décharge d'un condensateur à travers une résistance non inductive	68
4	Décharge d'un condensateur à travers une résistance inductive	75
5	Oscillations libres de deux circuits couplés par un condensateur	78
4	Oscillations en électricité	95
1	Oscillations forcées	95
2	Oscillateurs entretenus	108
5	Électricité : production, distribution, sécurité et stockage inertiel	124
1	Production d'énergie électrique	124
2	Distribution du courant électrique	130

3	Les dangers du courant électrique	133
4	Sécurité électrique	134
5	Convertisseur électromécanique	142
6	Puissances et conversions de puissance	150
1	Mesure de puissances en régime sinusoïdal forcé	150
2	Conversion puissance électrique \Rightarrow puissance lumineuse	157
3	Conversion puissance thermique \Rightarrow puissance électrique	158
4	Conversion puissance électrique \Rightarrow puissance thermique	162
5	Conversion puissance électrique \Rightarrow puissance mécanique	165
6	Réalisation d'une alimentation continue réglable	168
7	Conversion « alternatif – continu »	171
7	Signal analogique et signal numérique	189
1	Rappels théoriques	189
2	Convertisseur Analogique-Numérique (CAN)	193
3	Visualisation d'un signal analogique numérisé	200
4	Convertisseur Numérique-Analogique (CNA)	202
5	Réalisation d'un CAN de principe	205
8	Amplification de tension	216
1	Préambule	216
2	Rappels théoriques sur les semi-conducteurs	216
3	La jonction PN	219
4	Le transistor à jonctions PN	220
5	L'amplificateur opérationnel	226
9	Analyse spectrale et Filtrage. Application à l'acoustique musicale	238
1	Analyse harmonique d'un signal périodique	238
2	Pourquoi la gamme musicale contient-elle 12 notes ?	241
3	Présentation pédagogique de la notion de transformée de Fourier	247
4	Mode opératoire pour réaliser l'analyse spectrale d'un signal sonore	249
5	Instruments de musique	250
6	Étude de quelques filtres	259

10	Capteurs	277
1	Rappels théoriques	277
2	La photorésistance (LDR)	281
3	La photodiode	284
4	Le capteur CCD	288
5	Étude d'une cellule photovoltaïque ou photopile	290
6	La thermistance (CTN)	292
7	Capteur de champ magnétique	298
11	Modulation d'amplitude et de fréquence	313
1	Rappels théoriques	313
2	Étude expérimentale de la modulation d'amplitude	325
3	Étude expérimentale de la modulation de fréquence	332
12	Distances et fréquences	349
1	Mesure de longueurs	349
2	Mesure de distances astronomiques	350
3	Mesures de fréquence	359
4	Optique physique et transformée de Fourier	365
13	Champ magnétique	378
1	Rappels théoriques	378
2	Expériences qualitatives avec des aimants	386
3	Champ magnétique créé par un courant permanent.	387
4	Mesure de la composante horizontale du champ magnétique terrestre B_H	391
5	Applications	392
14	Induction	405
1	Rappels théoriques	405
2	Matériel	408
3	Phénomènes d'induction	409
4	Auto-induction	417
5	Couplage magnétique	420
15	Transformateur monophasé	432
1	Rappels théoriques	432
2	Étude expérimentale	436

16	Transferts thermiques	452
1	Expérience préliminaire	452
2	Définitions	453
3	Matériel expérimental	457
4	Conductivité thermique : expériences qualitatives	458
5	Mesure de capacités thermiques massiques	458
6	Mesures de la résistance thermique et de la conductivité thermique d'un matériau	461
17	États et changements d'état de la matière	471
1	Rappels théoriques	471
2	Évolution de la température lors d'un changement d'état	477
3	Sublimation du diiode	477
4	Le phénomène de surfusion	478
5	Le phénomène de surébullition	480
6	Changement de variété allotropique du fer	480
7	Le regel de la glace : L'effet Tyndall	481
8	Mesure de la chaleur latente massique de fusion de la glace	482
9	Mesure de la chaleur latente de vaporisation de l'eau	483
10	Loi de Mariotte	484
18	Présentation des interfaces et logiciels	499
1	Carte Microcontrôleur Arduino Uno	499
2	Audacity	501
3	Interfaces Sysam	502
4	Regressi	502
5	Python	503

Avant-Propos

Cet ouvrage s'adresse principalement aux candidats des concours de recrutement de l'éducation nationale : CAPES, Agrégation et CAPLP et de l'enseignement privé : CAFEP, CAFEP-CAPLP. Les collègues en poste peuvent aussi l'utiliser, de nombreuses expériences pouvant être mises à profit lors de cours ou de TP. De même les étudiants des masters scientifiques et de classes préparatoires peuvent y trouver un intérêt certain. Cette édition a été profondément remaniée, pour tenir compte de l'évolution des programmes et des concours. Certains contenus ont été fortement modifiés, en particulier au niveau des propositions d'expériences. Conformément aux instructions officielles concernant les programmes de l'enseignement scientifique, de nombreuses expériences proposées font appel à l'utilisation d'outils numériques variés : logiciels de simulation, microcontrôleur, langage de programmation, logiciels tableurs, etc. Les programmes complets proposés dans cet ouvrage sont disponibles au téléchargement sur le site de l'éditeur.

Cet ouvrage regroupe les thèmes concernant l'électricité, l'électromagnétisme, l'électronique et les transferts thermiques.

Un second des mêmes auteurs est consacré à l'optique, la mécanique, les ondes et la mécanique des fluides.

Nous n'avons pas voulu suivre un programme précis de concours, ceux-ci évoluant avec le temps, mais avons choisi les principaux thèmes que tout étudiant devrait maîtriser pour se présenter aux concours.

Les nombreux rappels théoriques et exercices traités pour chacun des thèmes abordés devraient constituer une base de travail aussi bien pour la préparation des épreuves de physique des concours que dans le cadre des études. En effet, nous avons essayé de présenter, autour d'un thème expérimental, d'une part les notions indispensables à connaître et d'autre part des exercices s'y rapportant.

Chaque chapitre donne la priorité au domaine expérimental en vue d'aider le candidat à préparer la difficile épreuve orale des concours où intervient la présentation d'expériences. Les manipulations décrites dans cet ouvrage, avec un mode opératoire détaillé, font le plus souvent appel au matériel « standard » que l'on trouve dans les établissements d'enseignement secondaire.

Chaque thème de cet ouvrage répond très largement aux exigences de l'intitulé d'un sujet d'une épreuve orale. Ces intitulés étant généralement assez ouverts, diverses approches sont possibles pour aborder une expérience le jour de l'épreuve ; au candidat de faire des choix judicieux parmi celles proposées pour bâtir de façon cohérente son exposé tout en respectant le niveau de classe imposé par son sujet et en justifiant ses choix dans le cadre d'une pratique professionnelle. Attention, tout expérimentateur sait qu'une manipulation d'apparence simpliste peut révéler de mauvaises surprises lors de sa réalisation,

aussi toutes les expériences décrites dans cet ouvrage doivent être travaillées durant la préparation à l'épreuve du concours.

Il nous semble important de citer quelques phrases extraites du rapport du jury du CAPES Externe 2019 :

Le jury sait bien que, à la différence de leurs compétences scientifiques, en physique et en chimie, les compétences pédagogiques (devant élèves) des candidats sont en cours de construction. Il ne s'attend donc pas à ce qu'ils les maîtrisent comme un professeur chevronné, mais qu'ils soient conscients des exigences du métier de professeur dans ce domaine et démontrent leur maîtrise de ces compétences à un niveau modéré ainsi que leur aptitude à progresser. Toutefois, ceci n'est possible qu'à condition de posséder un socle suffisant en termes de maîtrise disciplinaire, or celui-ci est de plus en plus fragile, voire inacceptable, chez un nombre croissant de candidats. De plus, les constats effectués lors de la précédente session concernant l'épreuve de mise en situation professionnelle sont confirmés pour cette session. Le nombre de candidats montrant un manque patent de connaissances et de compétences en matière expérimentale continue d'augmenter.

Nous souhaitons que cet ouvrage puisse aider :

- les candidats dans la préparation aux concours à acquérir un socle suffisant en termes de maîtrise disciplinaire et des connaissances et des compétences en matière expérimentale ;
- les étudiants dans l'acquisition des savoirs disciplinaires indispensables au sortir d'un master ;
- les collègues dans leur pratique professionnelle quotidienne.

Les auteurs

Mesure de grandeurs, unités, équations aux dimensions, incertitudes

1 Grandeur mesurable

1.1 Définition

Lorsqu'on parle de mesurer une grandeur ou d'une grandeur mesurable, on associe intuitivement à cette grandeur un nombre. Par exemple, mesurer la longueur d'une table revient à associer à cette longueur un nombre qui la définira.

La mesure d'une grandeur est l'opération qui fait correspondre un nombre à cette grandeur.

Ci-dessous, deux citations d'un physicien anglais du XIX^e siècle, Sir William Thomson anobli (et plus connu) sous le nom de Lord Kelvin ; citations qui illustrent bien l'importance de la mesure :

« Si vous ne pouvez mesurer, vous ne pouvez améliorer. »

« En science physique, la première étape essentielle pour la connaissance de n'importe quel sujet est de trouver des procédés de mesure et des méthodes pratiques pour estimer leurs qualités. Je dis souvent que quand vous pouvez mesurer ce dont vous parlez et l'exprimer par un nombre, vous connaissez quelque chose à son sujet mais, quand vous ne pouvez pas le mesurer, quand vous ne pouvez pas l'exprimer par un nombre, votre connaissance est faible et non satisfaisante ; cela peut être le début de la compréhension mais vous avez peu avancé dans vos réflexions sur l'état de la Science, quelle que soit la question. (PLA, vol.1 « Unités électriques de mesure » 3 mai 1883)

1.2 Conditions pour qu'une grandeur soit mesurable

D'après la définition, il faut qu'un seul nombre suffise pour caractériser la grandeur, ainsi un vecteur, par exemple, n'est pas mesurable.

De plus, on doit pouvoir comparer les grandeurs de même espèce donc l'ensemble des grandeurs d'une même nature doit être ordonné et additif.

Ordonné : on doit pouvoir appliquer la relation « est plus grande que » à l'ensemble des grandeurs et cette relation doit posséder toutes les propriétés de l'opération mathématique correspondante, en particulier :

$$[A] > [B] \text{ et } [B] > [C] \text{ alors } [A] > [C]$$

Additif : on doit pouvoir appliquer une relation « somme » à l'ensemble des grandeurs et cette relation doit posséder toutes les propriétés de l'opération mathématique correspondante, en particulier :

$$[A] + [B] = [B] + [A] ; ([A] + [B]) + [C] = [A] + ([B] + [C])$$

a) Remarque : grandeur repérable

À certaines grandeurs, on ne peut appliquer une relation « somme », ainsi, si on ajoute à un litre d'eau à 20 °C, un litre d'eau à 30 °C, on obtient bien deux litres d'eau mais pas à 50 °C ! La température n'est pas une grandeur mesurable, c'est une grandeur repérable. On utilise pour classer (« mesurer ») ces grandeurs, une échelle (échelle de température dans ce cas) définie par une origine. Il en est de même, par exemple, pour la dureté (échelle de), la date (échelle de temps), l'énergie potentielle (échelle d'énergie)...

2 Unités

2.1 Mesure d'une grandeur

Si, arbitrairement, pour une espèce donnée, on définit une grandeur de référence appelée unité [u], la mesure de la grandeur [A] appartenant à l'espèce sera :

$$[A] = A [u]$$

où A représente la mesure de la grandeur [A] avec l'unité [u].

2.2 Choix de l'unité

On demande à l'unité d'être bien définie et d'être commode c'est-à-dire de se prêter à une expression aussi simple que possible des phénomènes.

Par exemple, comme unité de temps, on préfère prendre le temps séparant 2 battements consécutifs du balancier d'une horloge plutôt que le temps séparant 2 battements de cœur pour des raisons évidentes de commodités.

La définition d'une unité évolue au fur et à mesure que la précision des mesures se développe, ainsi pour le temps on est passé d'une définition « macroscopique » (temps des éphémérides) à une définition « microscopique » (temps atomique).

2.3 Changement de l'unité

Mesurons une même grandeur [A] avec deux unités différentes [u] et [u'], nous aurons :

$$[A] = A[u] \text{ et } [A] = A'[u'] \text{ soit } A[u] = A'[u'] \text{ ou } A/A' = [u']/[u]$$

Le rapport des mesures d'une même grandeur est égal à l'inverse du rapport des unités correspondantes.

Ceci est la base des calculs de changements d'unités.

2.4 Système d'unités

Les lois de la physique et en particulier celles de la mécanique se traduisent, le plus souvent, par des relations de proportionnalité.

Construire un système d'unités cohérent, c'est choisir un système dans lequel le plus grand nombre des coefficients de proportionnalité sera égal à l'unité.

Si on prend l'expression reliant force, masse et accélération, $F = k.m.a$, k étant une constante ; pour construire un système cohérent, dans lequel le maximum de constantes sera égal à 1, si on choisit arbitrairement les unités de force et de masse, l'unité d'accélération sera imposée.

Les unités choisies arbitrairement sont appelées unités de base ou unités indépendantes, les autres unités sont les unités dérivées.

En France le système d'unités utilisé est le système international (SI) basé sur sept grandeurs de base qui s'exprime dans une unité :

Grandeur	Unité	Symbole
Longueur	le mètre	m
Masse	le kilogramme	kg
Temps	la seconde	s
Intensité de courant électrique	l'ampère	A
Température thermodynamique	le kelvin	K
Quantité de matière	la mole	N
Intensité lumineuse	la candela	cd

Chacune de ces unités a une définition extrêmement précise, définie par la conférence générale des poids et mesures qui se réunit à Paris tous les 4 ans et gérée par le bureau international des poids et mesures. Lors de la 26^e réunion, la CGPM a révisé le système SI. À compter du 20 mai 2019, toutes les unités du SI sont définies à partir de sept constantes de la physique dont les valeurs ont été fixées et exprimées en unités SI

Le Bureau International des Poids et Mesures (BIPM) indique :

Le choix spécifique de ces sept constantes a été considéré le meilleur possible, en tenant compte de la précédente définition du SI - qui était fondée sur sept unités de base - et des progrès de la science.

Les définitions présentées ci-dessous précisent la valeur numérique exacte de chaque constante lorsque sa valeur est exprimée dans l'unité du SI correspondante. En fixant

la valeur numérique exacte, l'unité devient définie car le produit de la **valeur numérique** par l'**unité** doit être égal à la **valeur** de la constante qui, par hypothèse, est invariante. Les sept constantes définissant le SI ont été choisies de sorte que toute unité du SI puisse être exprimée à partir de l'une de ces sept constantes ou à partir de produits ou rapports de ces constantes.

Le Système international d'unités

Le SI, est le système d'unités selon lequel :

- la fréquence de la transition hyperfine de l'état fondamental de l'atome de césium 133 non perturbé, $\Delta\nu_{\text{Cs}}$, est égale à 9 192 631 770 Hz ;
- la vitesse de la lumière dans le vide, c , est égale à 299 792 458 m/s ;
- la constante de Planck, h , est égale à $6,626\ 070\ 15 \cdot 10^{-34}$ J s ;
- la charge élémentaire, e , est égale à $1,602\ 176\ 634 \cdot 10^{-19}$ C ;
- la constante de Boltzmann, k , est égale à $1,380\ 649 \cdot 10^{-23}$ J/K ;
- la constante d'Avogadro, N_A , est égale à $6,022\ 140\ 76 \cdot 10^{23}$ mol⁻¹ ;
- l'efficacité lumineuse d'un rayonnement monochromatique de fréquence $540 \cdot 10^{12}$ Hz, K_{cd} , est égale à 683 lm/W.

Il n'y a pas d'incertitude sur la valeur numérique définissant ces sept constantes.

Les définitions des sept unités de base, données ci-dessous, sont extraites de la brochure du BIPM.

a) La seconde

La seconde, symbole s, est l'unité de temps du SI. Elle est définie en prenant la valeur numérique fixée de la fréquence du césium, $\Delta\nu_{\text{Cs}}$, la fréquence de la transition hyperfine de l'état fondamental de l'atome de césium 133 non perturbé, égale à 9 192 631 770 lorsqu'elle est exprimée en Hz, unité égale à s⁻¹.

Cette définition implique la relation exacte $\Delta\nu_{\text{Cs}} = 9\ 192\ 631\ 770$ Hz. En inversant cette relation, la seconde est exprimée en fonction de la constante $\Delta\nu_{\text{Cs}}$:

$$1\ \text{Hz} = \frac{\Delta\nu_{\text{Cs}}}{9\ 192\ 631\ 770} \quad \text{ou} \quad 1\ \text{s} = \frac{9\ 192\ 631\ 770}{\Delta\nu_{\text{Cs}}}$$

Il résulte de cette définition que la seconde est égale à la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133 non perturbé.

b) Le mètre

Le mètre, symbole m, est l'unité de longueur du SI. Il est défini en prenant la valeur numérique fixée de la vitesse de la lumière dans le vide, c , égale à 299 792 458 lorsqu'elle est exprimée en m.s⁻¹, la seconde étant définie en fonction de $\Delta\nu_{\text{Cs}}$.

Cette définition implique la relation exacte $c = 299\,792\,458 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. En inversant cette relation, le mètre est exprimé en fonction des constantes c et $\Delta\nu_{\text{Cs}}$:

$$1 \text{ m} = \left(\frac{c}{299\,792\,458} \right) \text{s} = \frac{9\,192\,631\,770}{299\,792\,458} \frac{c}{\Delta\nu_{\text{Cs}}} \approx 30,663319 \frac{c}{\Delta\nu_{\text{Cs}}}$$

Il résulte de cette définition que le mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de $1/299\,792\,458$ de seconde.

c) Le kilogramme

Le kilogramme, symbole kg, est l'unité de masse du SI. Il est défini en prenant la valeur numérique fixée de la constante de Planck, h , égale à $6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34}$ lorsqu'elle est exprimée en J.s, unité égale à $\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$, le mètre et la seconde étant définis en fonction de c et $\Delta\nu_{\text{Cs}}$.

Cette définition implique la relation exacte $h = 6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34} \text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$. En inversant cette relation, le kilogramme est exprimé en fonction des trois constantes h , $\Delta\nu_{\text{Cs}}$ et c :

$$1 \text{ kg} = \left(\frac{h}{6,62607015 \cdot 10^{-34}} \right) \text{m}^{-2}\cdot\text{s}$$

Relation identique à

$$1 \text{ kg} = \frac{(299\,792\,458)^2}{(6,62607015 \cdot 10^{-34})(9\,192\,631\,770)} \frac{h\Delta\nu_{\text{Cs}}}{c^2} \approx 1,4755214 \cdot 10^{40} \frac{h\Delta\nu_{\text{Cs}}}{c^2}$$

Cette définition permet de définir l'unité $\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ (l'unité des grandeurs physiques « action » et « moment cinétique »). Ainsi associée aux définitions de la seconde et du mètre, l'unité de masse est exprimée en fonction de la constante de Planck h .

d) L'ampère

L'ampère, symbole A, est l'unité d'intensité de courant électrique du SI. Il est défini en prenant la valeur numérique fixée de la charge élémentaire, e , égale à $1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19}$ lorsqu'elle est exprimée en C, unité égale à A.s, la seconde étant définie en fonction de $\Delta\nu_{\text{Cs}}$.

Cette définition implique la relation exacte $e = 1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19} \text{ A}\cdot\text{s}$. En inversant cette relation, l'ampère est exprimé en fonction des constantes e et $\Delta\nu_{\text{Cs}}$:

$$1 \text{ A} = \left(\frac{e}{1,602176634 \cdot 10^{-19}} \right) \text{s}^{-1}$$

Relation identique à

$$\frac{1}{(9\,192\,631\,770)(1,602176634 \cdot 10^{-19})} \Delta\nu_{\text{Cs}} \cdot e \approx 6,789687 \cdot 10^8 \Delta\nu_{\text{Cs}} \cdot e.$$

Il résulte de cette définition qu'un ampère est l'intensité du courant électrique correspondant au flux de $1/(1,602\ 176\ 634 \cdot 10^{-19})$ charges élémentaires par seconde.

e) Le kelvin

Le kelvin, symbole K, est l'unité de température thermodynamique du SI. Il est défini en prenant la valeur numérique fixée de la constante de Boltzmann, k , égale à $1,380\ 649 \cdot 10^{-23}$ lorsqu'elle est exprimée en $\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$, unité égale à $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$, le kilogramme, le mètre et la seconde étant définis en fonction de h , c et Δv_{Cs} .

Cette définition implique la relation exacte $k = 1,380\ 649 \cdot 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$. En inversant cette relation, le kelvin est exprimé en fonction des constantes k , h et Δv_{Cs} :

$$1 \text{ K} = \left(\frac{1,380649 \cdot 10^{-23}}{k} \right) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$$

Relation identique à

$$1 \text{ K} = \frac{1,380649 \cdot 10^{-23}}{(6,62607015 \cdot 10^{-34})(9\ 192\ 631\ 770)} \frac{h \cdot \Delta v_{\text{Cs}}}{k} \approx 2,2666653 \frac{h \cdot \Delta v_{\text{Cs}}}{k}$$

Il résulte de cette définition qu'un kelvin est égal au changement de la température thermodynamique résultant d'un changement de l'énergie thermique kT de $1,380\ 649 \cdot 10^{-23} \text{ J}$.

f) La mole

La mole, symbole mol, est l'unité de quantité de matière du SI. Une mole contient exactement $6,022\ 140\ 76 \cdot 10^{23}$ entités élémentaires. Ce nombre, appelé « nombre d'Avogadro », correspond à la valeur numérique fixée de la constante d'Avogadro, N_A , lorsqu'elle est exprimée en mol^{-1} .

La quantité de matière, symbole n , d'un système est une représentation du nombre d'entités élémentaires spécifiées. Une entité élémentaire peut être un atome, une molécule, un ion, un électron, ou toute autre particule ou groupement spécifié de particules. Cette définition implique la relation exacte $N_A = 6,022\ 140\ 76 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$. En inversant cette relation, on obtient l'expression exacte de la mole en fonction de la constante N_A :

$$1 \text{ mol} = \frac{6,02214076 \cdot 10^{23}}{N_A}$$

Il résulte de cette définition que la mole est la quantité de matière d'un système qui contient $6,022\ 140\ 76 \cdot 10^{23}$ entités élémentaires spécifiées.

g) La candela

La candela, symbole cd, est l'unité du SI d'intensité lumineuse dans une direction donnée. Elle est définie en prenant la valeur numérique fixée de l'efficacité lumineuse d'un rayonnement monochromatique de fréquence $540 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$, K_{cd} , égale à 683 lorsqu'elle est exprimée en $\text{lm} \cdot \text{W}^{-1}$, unité égale à $\text{cd} \cdot \text{sr} \cdot \text{W}^{-1}$, ou $\text{cd} \cdot \text{sr} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^3$, le kilogramme, le mètre et la seconde étant définis en fonction de h , c et Δv_{Cs} .

Cette définition implique la relation exacte $K_{cd} = 683 \text{ cd}\cdot\text{sr}\cdot\text{k}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^3$ pour le rayonnement monochromatique de fréquence $\nu = 540\cdot 10^{12} \text{ Hz}$. En inversant cette relation, la candela est exprimée en fonction des constantes K_{cd} , h et $\Delta\nu_{Cs}$:

$$1 \text{ cd} = \frac{K_{cd}}{683} \text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-3}\cdot\text{sr}^{-1}$$

Relation identique à

$$1 \text{ cd} = \frac{1}{(6,62607015\cdot 10^{-34})(9\ 192\ 631\ 770)^2 \cdot 683} (\Delta\nu_{Cs})^2 \cdot h \cdot K_{cd}$$

$$\approx 2,614830\cdot 10^{10} (\Delta\nu_{Cs})^2 \cdot h \cdot K_{cd}$$

Il résulte de cette définition que la candela est l'intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence $540\cdot 10^{12} \text{ Hz}$ et dont l'intensité énergétique dans cette direction est $(1/683) \text{ W/sr}$.

Il est conseillé de consulter le site du Bureau International des Poids et Mesures, <https://www.bipm.org/fr/measurement-units/>, d'où sont tirées ces définitions.

2.5 Unités dérivées

Toutes les autres grandeurs sont des grandeurs dérivées et s'expriment à l'aide d'unités dérivées. Le tableau ci-dessous donne quelques exemples.

Grandeur dérivée	Symbole	Unité dérivée	Symbole
Volume	V	mètre cube	m ³
Vitesse	v	mètre par seconde	m.s ⁻¹
Masse volumique	ρ	kilogramme par mètre cube	kg.m ⁻³

Certaines unités dérivées ont reçu un nom spécial pour simplifier. Le tableau ci-dessous donne quelques exemples.

Unité dérivée	Nom	Symbole
Angle plan	radian	rad
Angle solide	stéradian	sr
Fréquence	hertz	Hz
Énergie, Travail	joule	J
Température Celsius	degré Celsius	°C
Différence de potentiel électrique	volt	V
Eclairement lumineux	lux	lx

REMARQUE Revenons sur la grandeur « angle ». Par définition, l'angle θ correspond au rapport de la longueur de l'arc $A'B'$ sur le rayon r du cercle. Rapport de deux longueurs, l'angle θ n'a donc pas de dimension. C'est une grandeur adimensionnée. Elle peut, cependant, avoir une unité comme le radian, le degré ou le grade si on choisit de dire qu'un tour complet représente un angle de 2π rad ou 360° ou 400 grades.

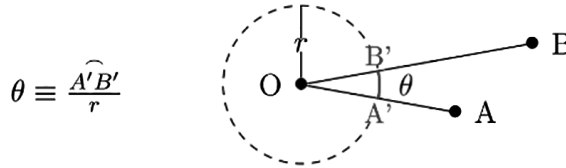


Figure 1.1

Un stéradian est un angle solide d'un cône qui, ayant son sommet au centre d'une sphère, découpe sur la surface de cette sphère une aire égale à celle d'un carré ayant pour côté une longueur égale au rayon de la sphère.

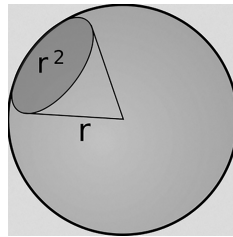


Figure 1.2 (Wikipedia)

2.6 Unités hors système

La pratique ou la commodité veut qu'on utilise assez souvent des unités hors du système international. Dans la mesure du possible, il faut combattre ce fait et utiliser les unités du système international. Le tableau ci-dessous donne quelques exemples.

Grandeur	Unité	Symbole	Valeur en unité SI
Temps	minute	min	1 min = 60 s
Volume	litre	L, l	1 L = 10^{-3} m ³
Pression	bar	bar	1 bar = 10^5 Pa
Longueur	angström	Å	1 Å = 10^{-10} m

3 Équations aux dimensions

3.1 Définition

Considérons deux systèmes d'unités. Les unités fondamentales sont différentes mais les relations de définition des unités dérivées sont les mêmes. Par exemple la force est liée à la masse et à l'accélération par la relation $[F] = [M].[A]$ dans les deux systèmes. Affectons l'indice 1 au premier système et l'indice 2 au second. La relation liant la force, la masse et l'accélération s'écrit $f_1 = m_1.a_1$ et $f_2 = m_2.a_2$. En divisant membre à membre on obtient :

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{a_2}{a_1} \quad (1)$$

Or le rapport f_2/f_1 que nous posons égal à F est le rapport des mesures d'une force dans les deux systèmes. C'est donc l'inverse du rapport des unités de forces des deux systèmes d'où l'intérêt de ce rapport dans les problèmes de changement d'unités. Posons de même $m_2/m_1 = M$ et $a_2/a_1 = A$. L'équation (1) devient $F = M.A$ notée aussi $[F] = [M].[A]$ ou $\dim(F) = \dim(M).\dim(A)$, c'est ce qu'on appelle l'équation aux dimensions de la force en fonction de la masse et de l'accélération.

Nous pouvons maintenant exprimer les grandeurs dérivées en fonction des grandeurs fondamentales. Nous obtiendrons ainsi les équations aux dimensions des diverses grandeurs en fonction des grandeurs fondamentales. Le tableau ci-dessous donne les équations aux dimensions des principales grandeurs mécaniques et électriques.

Grandeur	Définition	Dimension
LONGUEUR	l	L
Volume	$V = l^3$	L^3
TEMPS	T	T
Fréquence	$f = 1/t$	T^{-1}
Vitesse linéaire	$v = l/t$	LT^{-1}
Accélération linéaire	$a = v/t$	LT^{-2}
Angle	θ	1
Vitesse angulaire	$\omega = \theta/t$	T^{-1}
Accélération angulaire	$\alpha = \omega/t$	T^{-2}
MASSE	M	M
Masse volumique	$\rho = m/V$	ML^{-3}
Force	$f = m.a$	MLT^{-2}
Quantité de mouvement	$p = m.v$	MLT^{-1}

Grandeur	Définition	Dimension
Pression	$P = f/s$	$ML^{-1}T^{-2}$
Travail	$W = f.l$	ML^2T^{-2}
Puissance	$P = f/t$	ML^2T^{-3}
Intensité électrique	I	I
Charge	$q = i.t$	IT
Potentiel	$V = W/q$	$ML^2T^{-3}I^{-1}$
Résistance	$R = V/i$	$ML^2T^{-3}I^{-2}$
Capacité	$C = q/V$	$M^{-1}L^{-2}T^4I^2$

3.2 Application au changement d'unités.

Si nous voulons exprimer, dans un système 2, la mesure d'une grandeur dont nous connaissons la mesure dans un système 1, nous pouvons utiliser les équations de dimensions. Considérons par exemple le cas de la force. Nous avons :

$$\frac{f_2}{f_1} = F = MLT^{-2} = \frac{Um_1}{Um_2} \cdot \frac{Ul_1}{Ul_2} \cdot \left(\frac{Ut_1}{Ut_2} \right)^{-2} = \frac{Uf_1}{Uf_2}$$

avec Um_1 = Unité de masse dans le système 1, Ul_1 = Unité de longueur dans le système 1... puisque le rapport des mesures d'une grandeur quelconque est l'inverse du rapport des unités.

• Exemple

Le système britannique a pour grandeurs fondamentales le temps (unité : la seconde), la force (unité : la « livre », 1 livre = 4,45 N), la longueur (unité : le « pied », 1 pied = 0,305 m) Exprimer dans le système international, l'unité de masse de ce système (qui s'appelle le « slug »).

Affectons de l'indice 1 les mesures du système britannique et de l'indice 2 celles du système international. L'équation de dimensions de la force ne change pas, on a donc :

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{l_2}{l_1} \cdot \left(\frac{t_2}{t_1} \right)^{-2} ;$$

Soit $\frac{m_2}{m_1} = \frac{f_2}{f_1} \cdot \frac{l_1}{l_2} \cdot \left(\frac{t_1}{t_2} \right)^{-2} = \frac{4,45}{1} \cdot \frac{1}{0,305} = 14,6$ d'où $\frac{m_2}{m_1} = \frac{Um_1}{Um_2}$ donc slug/kg = 14,6 soit

1 slug = 14,6 kg.

3.3 Homogénéité

Les deux membres d'une équation littérale ou les divers termes d'une somme, représentent forcément des grandeurs de même nature. Ils doivent donc avoir les mêmes dimensions. Cette condition d'homogénéité, évidemment insuffisante pour que la formule considérée soit juste, est toutefois nécessaire. Aussi, est-il souvent prudent de vérifier l'homogénéité d'un résultat littéral avant de passer à une application numérique. Si l'équation trouvée n'est pas homogène, elle est fautive !

L'homogénéité d'une formule permet aussi de retrouver cette formule.

a) Exemple 1

L'expérience a montré que la force subie par une sphère immergée dans un fluide en mouvement dépend du coefficient de viscosité η du fluide, du rayon r de la sphère et de leur vitesse relative v . Trouver l'expression de cette force en la supposant de la forme $f = k \cdot \eta^a \cdot r^b \cdot v^c$, k est une constante sans dimensions et $\dim(\eta) = [\eta] = L^{-1}MT^{-1}$.

Équation de dimensions $LMT^{-2} = (L^{-1}MT^{-1})^a \cdot L^b \cdot L^c \cdot T^{-c}$ d'où $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, c'est-à-dire $f = k \cdot \eta \cdot r \cdot v$ (formule de Stokes $f = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v$).

b) Exemple 2

L'expérience a montré que la fréquence de vibration N d'une corde dépend de la longueur l , de la tension f , de la masse par unité de longueur μ de la corde. Trouver l'expression de cette fréquence.

Équation de dimensions : $\dim(N) = [N] = T^{-1}$, $\dim(l) = [l] = L$, $\dim(f) = [f] = MLT^{-2}$, $\dim(\mu) = [\mu] = ML^{-1}$; on a $N = k \cdot l^a \cdot f^b \cdot \mu^c$; soit $T^{-1} = L^a \cdot (MLT^{-2})^b \cdot (ML^{-1})^c$ d'où $a + b - c = 0$, $b + c = 0$, $-2 \cdot b = -1$; l'équation est donc de la forme $N = \frac{k}{l} \sqrt{\frac{f}{\mu}}$.

4 Incertitudes

Lorsqu'on mesure une grandeur A , quel que soit le soin apporté à la mesure, on n'obtient jamais la valeur vraie a_v mais une valeur mesurée a . Toute mesure est entachée d'une erreur qu'il est important de connaître ou tout au moins d'estimer.

Pour cela il faut examiner avec **un esprit très critique** la mesure : l'appareillage utilisé, la façon de l'utiliser, la méthode de mesure...

4.1 Vocabulaire

Le verbe mesurer et le terme mesure peuvent avoir plusieurs significations aussi est-on amené à utiliser des mots plus précis.

Mesurage : ensemble des opérations qui permettent de déterminer la mesure d'une grandeur.

Mesurande : grandeur que l'on veut mesurer.

Valeur vraie du mesurande : valeur qu'on obtiendrait si le mesurage était parfait.

Résultat d'un mesurage : valeur ou ensemble de valeurs donnés à un mesurande.

Un mesurage n'étant jamais parfait, le résultat doit donc être sous la forme d'un intervalle associé à un niveau de confiance (on estime que la valeur vraie est située dans l'intervalle avec une certaine probabilité) :

$$a \pm u(a)$$

où a est le résultat du mesurage et $u(a)$ l'incertitude (la notation u provient du mot anglais *uncertainty*, traduction de incertitude).

4.2 Erreurs

Soit a le résultat du mesurage et a_v la valeur vraie du mesurande, l'erreur sur le résultat vaut $E = a - a_v$. Par principe, cette erreur est inconnue et il est nécessaire de déterminer une limite à cette erreur, c'est ce qu'on appelle l'incertitude.

REMARQUE On définit aussi l'erreur relative par $E_{\%} = \frac{|a - a_v|}{a_v} \times 100$ et on doit aussi déterminer une limite appelée incertitude relative.

Du point de vue de leurs causes, il faut distinguer deux types d'erreurs : les erreurs systématiques et les erreurs accidentelles.

a) Les erreurs systématiques

Les erreurs systématiques ayant leur origine dans un défaut de l'appareil ou du mode opératoire se produisent **régulièrement, dans le même sens et avec une valeur constante**.

• Exemples

- utilisation d'un appareil mal étalonné ;
- utilisation d'un appareil de mesures dont le "zéro" ne correspond pas à la valeur nulle ;
- erreur de parallaxe sur un appareil analogique.

Si l'erreur systématique est ignorée de l'expérimentateur, elle est grave et elle rend illusoire le degré d'exactitude qu'il croit pouvoir attribuer à ses mesures.

Si l'erreur systématique est connue, il suffit d'en supprimer la cause, si cela est possible, ou d'effectuer la correction nécessaire sur les résultats des mesures.

L'erreur systématique ne doit donc pas intervenir dans la détermination de l'incertitude sur une mesure.

On évite les erreurs systématiques ou on les corrige par une analyse critique des méthodes utilisées et par un contrôle des appareils.

b) Les erreurs aléatoires, accidentelles ou fortuites

Les erreurs aléatoires, accidentelles ou fortuites ont pour caractère essentiel de se manifester dans un **sens imprévisible, à un moment inconnu et avec une valeur variable**.

Exemples

- Les erreurs de lecture. Nous éliminons l'erreur totale qui donne un résultat aberrant. Lors de la mesure d'une longueur avec une règle graduée au mm, dans le meilleur des cas on ne pourra pas faire une mesure avec une erreur inférieure à une graduation. En général, l'utilisation d'un appareil possédant une graduation entraîne une erreur de lecture d'une division.
- Les erreurs de fidélité de l'appareil. Elles existent si, en répétant plusieurs fois la même mesure, on obtient des résultats différents. Ces erreurs proviennent du fait qu'il est impossible de se replacer exactement dans les mêmes conditions, les propriétés de l'appareil de mesures évoluant avec le temps. En général, le constructeur a étudié ce type d'erreur et indique quelle précision il peut garantir (classe de l'appareil).
- Les erreurs dues à une mauvaise définition de la grandeur à mesurer. Ce sont ces erreurs qui souvent limitent la précision de la mesure : repérage du minimum (maximum) d'intensité lumineuse, de son, ...

4.3 Fidélité, Justesse

On peut schématiser ces erreurs sous la forme d'une cible, le centre représentant la valeur vraie du mesurande (inconnue). Cela permet de mettre en évidence les notions de justesse et de fidélité.

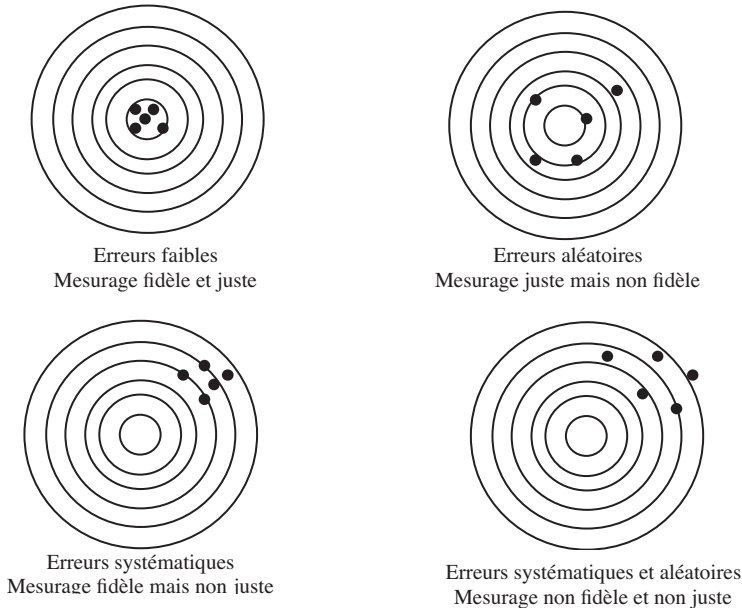


Figure 1.3

Lorsque les valeurs de mesure sont groupées vers le centre de la cible, on peut dire que la méthode de mesure est fidèle et juste. Si elles sont peu groupées mais situées « en moyenne » vers le centre de la cible, la méthode est juste mais non fidèle du fait des erreurs aléatoires. Si elles sont groupées mais éloignées du centre, la méthode est fidèle mais non juste du fait d'erreurs systématiques et enfin si elles sont peu groupées et situées loin du centre de la cible, la méthode n'est ni juste ni fidèle par la présence d'erreurs aléatoires et systématiques.

4.4 Incertitudes

L'incertitude permet de définir un intervalle de valeurs dans lequel on peut estimer, avec une certaine confiance, que la valeur vraie s'y trouve.

Dans la majorité des cas, on considère que les erreurs aléatoires (on admet qu'il n'y a pas d'erreurs systématiques) **suivent la loi normale** (gaussienne), on définit alors l'incertitude-type comme l'écart-type.

4.5 Loi normale

La loi normale $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$ représente la densité de probabilité avec \bar{x} valeur moyenne de x et σ l'écart type de la distribution ($\sigma^2 = \overline{(x - \bar{x})^2}$). La probabilité que le résultat du mesurage soit compris entre les valeurs x_1 et x_2 est donnée par $\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} dx$ et est représentée par la surface sous la courbe $f(x)$. Cette probabilité vaut 68,3 % pour $x_2 - x_1 = 2\sigma$; 95,4 % pour 4σ et 99,7 pour 6σ (voir figure 1.4)

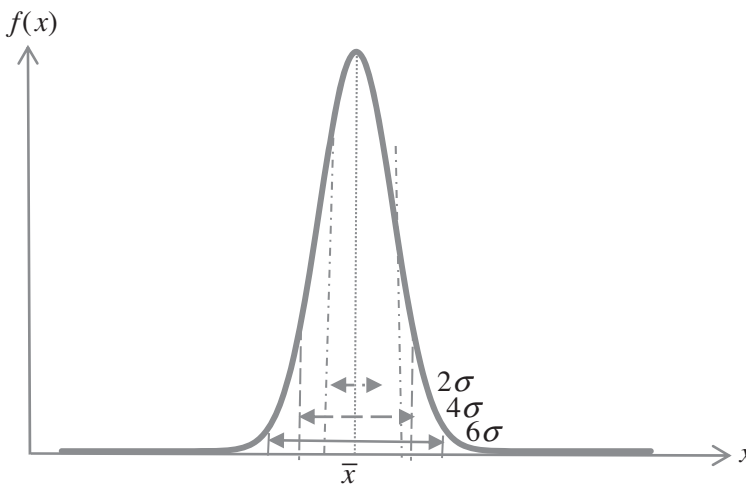


Figure 1.4

4.6 Évaluation des incertitudes

Un mesurage peut s'effectuer de différentes manières, soit à partir d'une série statistique (on effectue une série de mesures), on parle alors d'incertitudes de type A, soit à partir d'une seule mesure, on a alors des incertitudes de type B.

4.7 Évaluation des incertitudes de type A

Si on a effectué N mesures, la meilleure estimation du mesurande est la valeur moyenne

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_i x_i. \text{ L'écart type de la distribution (cf. § 4.5) est } \sigma = \sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_i (x_i - \bar{x})^2}.$$

Le terme $N-1$ au lieu de N vient du fait que la formule utilise la valeur moyenne \bar{x} et il est évident qu'on ne peut déterminer une valeur moyenne dans le cas d'une seule mesure.

La formule de propagation des incertitudes (cf. paragraphe 4.9) permet de détermi-

ner l'écart type de la valeur moyenne $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sqrt{\sum_i \sigma^2}}{N} = \frac{\sigma\sqrt{N}}{N} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ qui correspond à l'incertitude-type Δx notée aussi $u(x)$.

On aboutit ainsi au résultat final :

$$x = \bar{x} \pm u(x)$$

$$\text{Avec } \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_i x_i \text{ et } u(x) = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_i (x_i - \bar{x})^2}$$

Lorsque le nombre de mesures est faible, il faut alors corriger l'incertitude-type par le facteur t de Student, on a alors $U(x) = t \times u(x) = t \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ (incertitude élargie). La valeur de ce facteur dépend du nombre de mesures et de l'intervalle de confiance. Le tableau ci-dessous donne quelques valeurs de t .

a) Intervalle de confiance de 68 %

Nbre de mesures	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	40	∞
t	1,84	1,32	1,20	1,14	1,11	1,09	1,08	1,07	1,06	1,03	1,01	1,00

Les résultats expérimentaux montrent qu'on peut très rapidement « oublier » le coefficient de Student et le prendre égal à 1.

b) Intervalle de confiance 95 %

Nbre de mesures	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	40	∞
t	12,7	4,30	3,18	2,77	2,57	2,45	2,36	2,31	2,26	2,09	2,02	1,96

On remarque que, très rapidement, le coefficient de Student tend vers 2.

Le passage de $t = 1$ à $t = 2$ correspond au passage de l'intervalle de confiance à 68% à 95%.

4.8 Évaluation des incertitudes de type B

Souvent, on ne dispose pas d'assez de temps pour effectuer une série de mesures, on se trouve dans le cas de l'évaluation d'une incertitude de type B. Il faut alors déterminer l'origine possible de toutes les erreurs expérimentales. Classiquement cela conduit à examiner deux types d'incertitudes ; celle concernant la lecture et celle concernant l'appareillage.

Les incertitudes-types sont évaluées à partir de lois de probabilités supposées a priori. La loi, la plus souvent utilisée et la moins optimiste, est la loi rectangulaire ou loi uniforme. Dans ce cas, la densité de probabilité $f(x)$ de la variable x vaut a entre les valeurs x_1 et x_2 et 0 à l'extérieur.

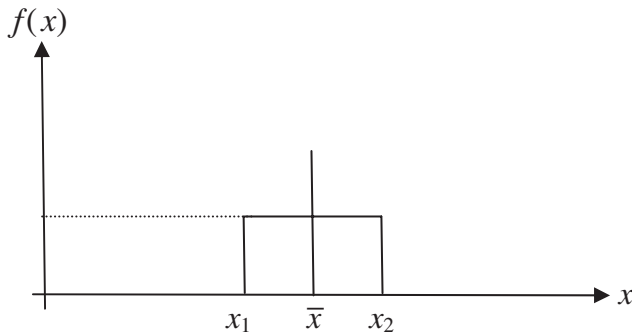


Figure 1.5

$$\begin{aligned} \text{On a } f(x) &= \int_{x_1}^{x_2} a \, dx = 1 \text{ soit } a = \frac{1}{x_2 - x_1} \text{ et la valeur moyenne } \bar{x} = \int_{x_1}^{x_2} ax \, dx \\ &= \frac{a}{2}(x_2^2 - x_1^2) = \frac{x_2 + x_1}{2}. \text{ L'écart-type } \sigma^2 = \int_{x_1}^{x_2} a(x - \bar{x})^2 \, dx = \int_{x_1}^{x_2} ax^2 \, dx + \int_{x_1}^{x_2} a\bar{x}^2 \, dx \\ &- 2 \int_{x_1}^{x_2} ax\bar{x} \, dx = \frac{a}{3}(x_2^3 - x_1^3) - \bar{x}^2 = \frac{x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2}{3} - \frac{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2}{4} = \frac{(x_2 - x_1)^2}{12} \\ \text{d'où } \sigma &= \frac{(x_2 - x_1)}{2\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

a) Incertitude-type de positionnement

Lors d'un mesurage, si on estime que la valeur est comprise entre x_{\max} et x_{\min} , alors, d'après ce qui précède, on aura :

$$x = \frac{x_{\max} + x_{\min}}{2} \text{ et } u(x) = \sigma = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2\sqrt{3}} = \frac{\delta}{2\sqrt{3}}.$$

δ représente la précision de la mesure. Les calculs précédents sont effectués avec un intervalle de confiance de 68 % (coefficient de Student égal à 1).

Si on choisit intervalle de confiance de 95 % il faut multiplier par $t = 2$ (Student) et on

obtient l'incertitude élargie à 95 % $U(x) = 2u(x) = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{\sqrt{3}} = \frac{\delta}{\sqrt{3}}$.

b) Incertitude-type liée à un intervalle

Lors d'un mesurage, si on estime que la valeur mesurée x_0 est comprise dans l'intervalle $x_{\max} = x_0 + \delta$ et $x_{\min} = x_0 - \delta$, d'après ce qui précède on a $x_{\max} - x_{\min} = 2\delta$ et on obtient l'incertitude type

$u(x) = \frac{\delta}{\sqrt{3}}$. L'incertitude

type élargie à 95 % est alors

$U(x) = 2 \frac{\delta}{\sqrt{3}}$; où δ représente la précision de mesure sur chaque position.

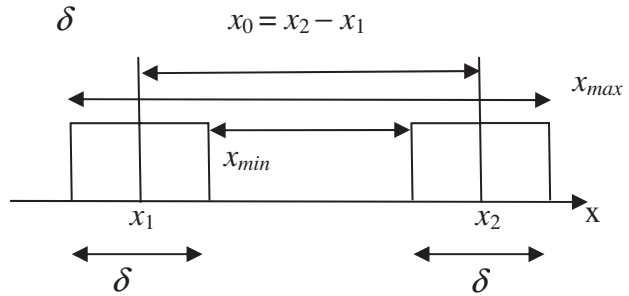


Figure 1.6

c) Incertitude type liée à la lecture

Lorsque la mesure est obtenue par lecture sur une échelle (thermomètre à alcool) ou sur un cadran (voltmètre analogique), la précision liée à la lecture δ est, en général, estimée à une graduation. On se trouve dans une situation analogue à celle du positionnement,

et l'incertitude type liée à la lecture est $u_{\text{lec}}(x) = \frac{\delta}{2\sqrt{3}}$. Avec un intervalle de confiance

de 95 % on obtient l'incertitude type élargie $U_{\text{lec}}(x) = \frac{\delta}{\sqrt{3}}$.

Si la mesure résulte d'une double lecture, par exemple, lecture d'une période sur un oscilloscope (on estime le point de début et le point de fin de la période) ou lecture d'une longueur sur une règle, alors la précision de lecture δ est doublée et on passe à une

incertitude type à $u_{\text{lec}}(x) = \frac{\delta}{\sqrt{3}}$, avec une incertitude type élargie de 95 % $U_{\text{lec}}(x) = 2 \frac{\delta}{\sqrt{3}}$.

d) Quelques exemples

Incertitude type liée au positionnement

Lors d'une manipulation en optique, la position d'une lentille, pour obtenir une image nette, est comprise entre 10,3 cm et 10,9 cm du fait de la « difficulté » à repérer la netteté de l'image. La valeur x de la position de la lentille sera prise égale à

$\frac{10,3 + 10,9}{2} = 10,6$ cm et l'incertitude-type $u(x) = \frac{10,9 - 10,3}{2\sqrt{3}} = \frac{\delta}{2\sqrt{3}} = 0,2$ cm.

L'incertitude type élargie à 95 % est alors $U(x) = \frac{10,9 - 10,3}{\sqrt{3}} = 0,3 \text{ cm}$ (Incertitudes exprimées avec un seul chiffre significatif).

Incertitude type liée à un intervalle

On mesure une distance $D = 25 \text{ cm}$ entre un émetteur et un récepteur d'ultrasons. On estime la précision sur cette mesure à $\delta = 1 \text{ cm}$, alors l'incertitude type élargie sera

$$U(D) = 2 \frac{1}{\sqrt{3}} = 1,1 \text{ cm.}$$

Mesure avec un appareil analogique

En premier lieu, il faut connaître l'indication de la classe de l'appareil notée C . La précision de construction δ_{Const} est alors égale à $C\%$ du calibre utilisé. La précision de lecture δ_{lect} est par convention fixée à 1 graduation de l'échelle. Par exemple, avec un voltmètre de classe 1,5, utilisé sur le calibre 10 V et comportant 100 graduations sur l'échelle, on obtient une précision de construction de $\delta_{\text{Const}} = 1,5 \cdot 10 / 100 = 0,15 \text{ V}$ et une précision de lecture de $\delta_{\text{lect}} = \frac{10}{100} = 0,10 \text{ V}$. L'incertitude-type de construction, analogue à celle liée

à un intervalle, est alors $u_{\text{cons}} = \frac{\delta_{\text{Const}}}{\sqrt{3}}$ et l'incertitude-type de lecture est $u_{\text{lect}} = \frac{\delta_{\text{lect}}}{2\sqrt{3}}$.

L'incertitude type totale vaut alors (voir paragraphe 4.9) $u(x) = \sqrt{(u_{\text{cons}})^2 + (u_{\text{lect}})^2} = 0,09 \text{ V}$ et pour un intervalle de confiance de 95 % $U(x) = 0,18 \text{ V}$.

Mesure de volume avec une burette

La précision de lecture de la mesure est estimée à $\delta_{\text{lect}} = 1$ graduation et l'incertitude-type élargie à 95 % est $U = \frac{\delta_{\text{lect}}}{\sqrt{3}}$.

Mesure avec un appareil numérique

La précision de construction est indiquée dans la notice de l'appareil. Elle résulte de la somme de deux termes, l'un lié au calibre utilisé et l'autre multiple de la valeur du dernier chiffre significatif (nD) affiché par l'appareil. C'est à partir de ces deux données constructeur que l'on calcule l'incertitude type.

• Exemple

• On utilise le multimètre MX 20 pour mesurer une tension continue sur le calibre 2 V.
 • Pour ce calibre, le constructeur indique une précision de 1 % sur la mesure et une précision de 8 fois le dernier digit (D) de l'affichage. Celui-ci comportant 4 chiffres.
 • La valeur lue est $L = 1,876 \text{ V}$, donc $D = 0,001 \text{ V}$. La précision de construction δ_{Const}

• sur cette mesure M est alors égale à $\delta_{\text{Const}} = \frac{1 \times 1,876}{100} + 8 \times 0,001 = 0,026 \text{ V}$.

• On effectue la mesure de cette même tension continue avec le multimètre MX554 sur le calibre 5 V. Pour ce calibre, le constructeur indique une précision de 0,05 % sur la mesure et une précision de $2D$ sur l'affichage ; celui-ci comportant 5 chiffres. La

valeur lue est $L = 1,8760$ V, donc $D = 0,0001$ V. La précision de construction δ_{Const} sur cette mesure M est alors égale à $\delta_{\text{Const}} = \frac{0,05 \times 1,8760}{100} + 2 \times 0,0001 = 0,0011$ V.
 Dans les deux cas, l'incertitude type sur la mesure sera $u = \frac{\delta_{\text{Const}}}{\sqrt{3}}$. Soit $0,015$ V pour le MX20 et $0,00065$ V pour le MX554. L'incertitude type élargie à 95 % sera $U = 2 \frac{\delta_{\text{Const}}}{\sqrt{3}}$. Soit $0,030$ V pour le MX20 et $0,0013$ V pour le MX554.

4.9 Tableau récapitulatif (Incertitude type élargie à 95 %)

Incertitudes de type A	
Sur une série de N mesures.	$U = 2 \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_i (x_i - \bar{x})^2}$
Incertitudes de type B	
Lecture simple sur une échelle (Thermomètre, burette...) $\delta = 1$ graduation	$U = \frac{\delta}{\sqrt{3}}$
Lecture double sur une règle, un écran d'oscilloscope $\delta = 1$ graduation	$U = 2 \frac{\delta}{\sqrt{3}}$
Mesure simple de position (précision de mesure δ)	$U = \frac{\delta}{\sqrt{3}}$
Mesure de longueur (double position)	$U = 2 \frac{\delta}{\sqrt{3}}$
Mesure sur un appareil numérique ($d_{\text{const}} = p\% \text{Lec} + nD$)	$U = 2 \frac{\delta_{\text{Const}}}{\sqrt{3}}$
Mesure sur un appareil analogique de classe C ($d_{\text{const}} = C\%$ du calibre et $U(C) = 2 \frac{\delta_{\text{Const}}}{\sqrt{3}}$)	$U(M) = \sqrt{U(C)^2 + U(L)^2}$

4.10 Propagation des incertitudes

Supposons qu'une grandeur X soit liée à deux autres grandeurs indépendantes Y et Z , $X = f(Y,Z)$ dont les valeurs mesurées sont \bar{y} et \bar{z} avec une incertitude-type $u(y) = \sigma_y$ et $u(z) = \sigma_z$. Comment déterminer l'incertitude-type sur X ?

Effectuons un développement limité de la fonction f autour du point (\bar{y}, \bar{z}) (les incertitudes sont supposées faibles) :

$$x = f(y,z) = f(\bar{y}, \bar{z}) + (y - \bar{y}) \frac{\partial f(\bar{y}, \bar{z})}{\partial Y} + (z - \bar{z}) \frac{\partial f(\bar{y}, \bar{z})}{\partial Z} \quad (1)$$

La valeur moyenne de cette expression vaut :

$$\bar{x} = f(\bar{y}, \bar{z}) + \overline{(y - \bar{y})} \frac{\partial f(\bar{y}, \bar{z})}{\partial y} + \overline{(z - \bar{z})} \frac{\partial f(\bar{y}, \bar{z})}{\partial z} = f(\bar{y}, \bar{z}).$$

En effet, les valeurs mesurées étant les valeurs moyennes, on a $\overline{(y - \bar{y})} = \bar{y} - \bar{y} = 0$ et $\overline{(z - \bar{z})} = \bar{z} - \bar{z} = 0$.

Pour déterminer l'incertitude-type, calculons l'écart-type $\sigma^2 = \overline{(x - \bar{x})^2} = \overline{[x - f(\bar{y}, \bar{z})]^2}$ d'où, en combinant avec (1) :

$$\sigma^2 = \overline{(y - \bar{y})^2} \left[\frac{\partial f(\bar{y}, \bar{z})}{\partial y} \right]^2 + \overline{(z - \bar{z})^2} \left[\frac{\partial f(\bar{y}, \bar{z})}{\partial z} \right]^2 + 2 \overline{(y - \bar{y})(z - \bar{z})} \frac{\partial f(\bar{y}, \bar{z})}{\partial y} \frac{\partial f(\bar{y}, \bar{z})}{\partial z}.$$

Les grandeurs Y et Z sont indépendantes, leur corrélation est nulle d'où $\overline{(y - \bar{y})(z - \bar{z})} = 0$.

On reconnaît $\sigma_y^2 = \overline{(y - \bar{y})^2}$ et $\sigma_z^2 = \overline{(z - \bar{z})^2}$, d'où l'expression de l'incertitude-type :

$$u(x) = \sqrt{u(y)^2 \left[\frac{\partial f(\bar{y}, \bar{z})}{\partial y} \right]^2 + u(z)^2 \left[\frac{\partial f(\bar{y}, \bar{z})}{\partial z} \right]^2}$$

Cette relation peut se généraliser dans le cas où il y a plus de 2 variables. Elle se simplifie pour les cas simples :

Expression de X	Incertitude-type
$X = Y \pm Z$	$u(x) = \sqrt{u(y)^2 + u(z)^2}$
$X = aY + b$	$u(x) = au(y)$
$X = Y \cdot Z$ ou $X = Y/Z$	$u(x) = x \sqrt{\left(\frac{u(y)}{y}\right)^2 + \left(\frac{u(z)}{z}\right)^2}$ ou $\frac{u(x)}{x} = \sqrt{\left(\frac{u(y)}{y}\right)^2 + \left(\frac{u(z)}{z}\right)^2}$
$X = Y^\alpha Z^\beta$	$u(x) = x \sqrt{\alpha^2 \left(\frac{u(y)}{y}\right)^2 + \beta^2 \left(\frac{u(z)}{z}\right)^2}$ ou $\frac{u(x)}{x} = \sqrt{\alpha^2 \left(\frac{u(y)}{y}\right)^2 + \beta^2 \left(\frac{u(z)}{z}\right)^2}$

• **Exemple : résistance de 330 Ω**

• Pour obtenir une résistance de 330 Ω, on peut directement prendre une résistance de cette valeur avec une tolérance (précision) de 5 % (série E24) donc $\delta = 330 \times 5/100$ ou mettre en série 3 résistances à 5 % de 100, 110 et 120 Ω. L'incertitude-type sur la résistance est différente.

• Dans le premier cas $u(R_{330}) = \frac{330 \cdot 0.05}{\sqrt{3}} = 9,5 \Omega$ et donc $U(R_{330}) = 19 \Omega$.

• De même, dans le second cas, on a $U(R_{100}) = 5,8 \Omega$; $U(R_{110}) = 6,3 \Omega$; $U(R_{120}) = 6,9 \Omega$ et $U(R_{330}) = \sqrt{U(R_{100})^2 + U(R_{110})^2 + U(R_{120})^2} = \sqrt{5.8^2 + 6.3^2 + 6.9^2} = 11 \Omega$. L'incertitude-type est plus faible dans le second cas.