

Hervé Queffélec

Topologie

Cours et exercices corrigés

6^e édition

DUNOD

Illustration de couverture : maximmmum – Shutterstock.com

<p>Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.</p> <p>Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements</p>		<p>d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).</p>
--	--	---

© Dunod, Paris, 2012, 2016, 2020
11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-081178-6

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^o et 3^o a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

À ma famille, très affectueusement

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos	VII
Notations	VIII
Chapitre 1. Le corps des réels	1
I Définition axiomatique de \mathbb{R}	1
II Le théorème de la borne supérieure	4
Exercices	11
Corrigés	15
Chapitre 2. Espaces topologiques ; espaces métriques	21
I Définitions générales ; notations	22
II Sous-espace topologique ; topologie induite	27
III Notion de limite ; continuité	29
IV Espaces métriques	37
V Produit d'espaces topologiques	46
Exercices	53
Corrigés	61
Chapitre 3. Espaces compacts	77
I Définition et premières propriétés	77
II Fonctions continues sur un espace compact	82
III Produit d'espaces compacts	87
IV Espaces métriques compacts	91
Exercices	101
Corrigés	109
Chapitre 4. Espaces connexes	120
I Définition et premières propriétés	120
II Théorèmes de stabilité	122
III Espaces métriques connexes	126
IV Composantes connexes	128
V Applications de la connexité ; homotopie	134
Exercices	152
Corrigés	161
Chapitre 5. Espaces métriques complets	179
I Définition ; premières propriétés	179
II Théorème du point fixe de Picard	184
III Théorème de Baire	191
Exercices	202
Corrigés	209

Table des matières

Chapitre 6. Espaces localement trucs	223
I Définition générale; premiers exemples	223
II Espaces localement compacts	224
III Espaces localement connexes	231
Exercices	244
Corrigés	247
Chapitre 7. Dimension et fractalité	253
I Dimension de boîte (ou dimension métrique)	254
II Dimension de Hausdorff	269
III Dimension topologique	287
Exercices	297
Corrigés	300
Chapitre 8. Espaces normés de dimension finie	312
I Introduction	312
II Compléments sur les espaces normés	313
III Compléments de topologie	316
IV Uniforme convexité et espaces L^p	319
V Applications de la topologie aux espaces normés	321
Exercices	331
Corrigés	332
Références bibliographiques	335
Index	337

AVANT-PROPOS

Nous avons mis à profit cette sixième édition essentiellement sur le point suivant :

l'étude des espaces normés de dimension finie est infiniment plus riche, complexe, et utile, qu'on ne pourrait le croire, et a des interactions fortes (compacité, complétude, points fixes, etc..) avec la topologie générale. Nous avons donc ajouté un court chapitre 8 sur les applications de cette topologie aux espaces normés de dimension finie et leur ensemble, le continuum de Minkowski ; le théorème du point fixe de Brouwer, qui jouait déjà un rôle important dans l'édition précédente, est démontré ici en toute dimension. Une place importante est donnée à la théorie de l'approximation, en lien avec la stricte convexité, la stricte lissité et le théorème antipodal de Borsuk ; faute de place, ce dernier est seulement prouvé en dimension deux, mais son lien avec le théorème de Brouwer est étudié. Le théorème de Bunt-Motzkin est également démontré en détail (nous remercions chaleureusement J. F. Burnol pour des échanges extrêmement enrichissants sur ce théorème). Enfin, plusieurs dessins aident à la compréhension des preuves.

Nous prenons l'occasion pour remercier les nombreux collègues de leurs remarques extrêmement utiles sur l'édition précédente. Et nous accueillerons avec plaisir et gratitude toutes les remarques et suggestions sur cette nouvelle édition, envoyées à l'adresse :

Herve.Queffelec@univ-lille.fr

NOTATIONS

- Si A est une partie de X , on note A^c le complémentaire de A dans X ; si $A \subset X$ et $B \subset X$, on note $A \setminus B = A \cap B^c$; si les A_i ($i \in I$) sont des parties de X , on note leur union par $\bigcup_{i \in I} A_i$, $\bigcup_I A_i$, ou $\cup A_i$ s'il n'y a pas de risque de confusion; on note de même $\bigcap_{i \in I} A_i$, $\bigcap_I A_i$, $\cap A_i$ pour l'intersection, et $\bigsqcup_{i \in I} A_i$, $\bigsqcup_I A_i$, $\sqcup A_i$ pour l'union disjointe.
- 1_A désigne la fonction indicatrice de $A \subset X$; $1_A(x) = 1$ si $x \in A$, et $1_A(x) = 0$ si $x \notin A$.
- $|A|$ désigne le nombre d'éléments de l'ensemble fini A .
- Si les ensembles X_i ($i \in I$) ont une propriété (P) sauf peut-être un nombre fini d'entre eux, on dit que **presque tous** les X_i ont la propriété (P); si $X = \prod_{i \in I} X_i$ est leur produit cartésien, p_i désigne la projection canonique de X sur le i -ème facteur X_i : si $x = (x_i)_{i \in I} \in X$, $p_i(x) = x_i$.
- \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} désignent respectivement l'ensemble des nombres entiers naturels, entiers relatifs, rationnels, réels, complexes; si E est l'un de ces ensembles, ou plus généralement un demi-groupe d'élément neutre 0 , on note $E^* = E \setminus \{0\}$.
- Pour $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$, on note $\{f > a\}$ pour $\{x \in X; f(x) > a\}$ et on définit de même $\{f \geq a\}$, $\{f < a\}$, $\{f \leq a\}$.
- Pour $f : X \rightarrow X$, f^p désigne l'itérée de f p fois par elle-même : $f^p = f \circ \dots \circ f$ p fois.
- Pour $f : X \rightarrow Y$, la restriction de f à $A \subset X$ se note $f|_A$.
- $A := B$ signifie que l'on définit l'objet A comme étant l'objet déjà connu B ; de même, $A =: B$ définit B quand on connaît A .
- $\mathcal{P}(X)$ désigne l'ensemble des parties de l'ensemble X .
- Si X, Y sont deux espaces topologiques, $C(X, Y)$ désigne l'ensemble des applications continues de X dans Y ; si X est compact et Y métrique, $C(X, Y)$ est toujours muni de la « distance de la convergence uniforme » : $d(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)); x \in X\}$; cette distance est associée à une norme quand Y est un espace vectoriel normé : $\|f\| = \sup\{\|f(x)\|; x \in X\}$; si X n'est pas compact, cette norme est encore définie sur l'espace $C_b(X, Y)$ des applications continues **bornées** de X dans Y ; $C_b(X, \mathbb{R})$ ou $C_b(X, \mathbb{C})$ se note $C_b(X)$ s'il n'y a pas de risque de confusion; si Y est complet, $C_b(X, Y)$ l'est aussi.

- Tous les espaces vectoriels (en abrégé K -ev ou ev) considérés (à l'exception de l'exercice 1, chapitre I) seront sur le corps $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} ; on note evn un espace vectoriel normé; un espace de Banach est un evn complet. Une semi-norme sur un K -ev E est une application $p : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ ayant toutes les propriétés d'une norme sauf peut-être l'implication $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. Un hyperplan d'un ev E est un sous-espace vectoriel de E de codimension 1.

- Le produit scalaire sur un espace de Hilbert H est noté (x/y) ou $\langle x, y \rangle$, la norme associée $|x|$; i.e. $|x| = \sqrt{(x/x)}$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit : $|(x/y)| \leq |x| |y|$ pour $x, y \in H$. L'espace $\mathcal{L}(H)$ des applications linéaires continues de H dans H est normé par : $\|f\| = \sup\{|f(x)|; |x| = 1\}$. u^* désigne l'adjoint de $u \in \mathcal{L}(H)$: $(x/u^*(y)) = (u(x)/y)$ pour tous $x, y \in H$.

- « K^n usuel » désignera toujours \mathbb{R}^n (resp. \mathbb{C}^n) muni de son produit scalaire euclidien (resp. hermitien usuel); la norme associée définit la topologie usuelle sur K^n , c'est-à-dire la topologie produit de la topologie usuelle de K n fois par elle-même; la base canonique de K^n est notée (e_1, \dots, e_n) , et on identifie $f \in \mathcal{L}(K^n)$ et sa matrice sur la base canonique. S^n est la sphère unité euclidienne de \mathbb{R}^{n+1} : $x \in S^n \Leftrightarrow |x| = 1$.

- Si E est un ensemble de référence, I désigne l'identité de E dans E ; si $E = K^n$, I désigne aussi la matrice unité d'ordre n . \det désigne la fonction déterminant sur K^n , normalisée par $\det I = 1$.

- $GL(n, K)$ désigne le groupe des matrices carrées inversibles ($n \times n$) à coefficients dans K , $O(n)$ (resp. $U(n)$) le sous-groupe des éléments orthogonaux (resp. unitaires) de $GL(n, \mathbb{R})$ (resp. $GL(n, \mathbb{C})$). $O(n)$ est aussi le groupe des bijections linéaires de \mathbb{R}^n qui conservent le produit scalaire euclidien.

- Une homographie est une application de la forme $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ avec $ad - bc \neq 0$; si $h^2 = I$, h est dite involutive.

- Si E est un K -ev, $a, b \in E$, $A, B \subset E$, $\lambda \in K$, on note : $[a, b] = \{(1-t)a + tb; t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1\}$; c'est le segment d'origine a et d'extrémité b ; $A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\}$; $\lambda A = \{\lambda a; a \in A\}$. A est dite convexe si : $a, b \in A \Rightarrow [a, b] \subset A$.

- Si A, B sont deux parties d'un groupe multiplicatif G , on note de même $A \cdot B = \{ab; a \in A, b \in B\}$.

- Aux rares endroits du livre où intervient la théorie de la mesure, on emploie les notations usuelles à cette théorie; par exemple si $p \in [1, \infty[$, $L^p(\mu)$ désigne l'espace de Banach des classes de fonctions intégrables par rapport à la mesure positive μ , normé par (inégalité de Minkowski) $\|f\|_p = (\int |f|^p d\mu)^{1/p}$; on pose $\|\mu\| = \int d\mu \leq +\infty$; μ est une mesure de probabilité si $\|\mu\| = 1$, une mesure borélienne si elle est définie sur la tribu borélienne (i.e. engendrée par les ouverts) de l'espace topologique X ; la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n est notée m_n , ou même m , s'il n'y a pas de risque de confusion.

Topologie

- Une fonction entière est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini. Plus généralement, une fonction holomorphe sur un ouvert U de \mathbb{C} est une application $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ qui est \mathbb{C} -différentiable en tout point de U . H^∞ est l'espace des fonctions holomorphes bornées sur D , le disque unité ouvert.

- $\log x$ désigne le logarithme népérien du réel $x > 0$; Arc cos , Arc sin , Arctg désignent les déterminations principales des fonctions réciproques des fonctions trigonométriques cosinus, sinus, tangente et on a des bijections $\text{Arc cos} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, $\text{Arc sin} : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\text{Arctg} : \mathbb{R} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

- Dans le plan complexe \mathbb{C} , on emploie les notations suivantes : $|z|$ est le module de z ; $\bar{z} = x - iy$ est le conjugué de $z = x + iy$. $\Re z = x$, $\text{Im } z = y$ sont respectivement les parties réelle et imaginaire de z .

$D(a, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - a| < r\}$ est le disque ouvert de centre a et de rayon r .

$\bar{D}(a, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - a| \leq r\}$ est le disque fermé de centre a et de rayon r .

$C(a, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - a| = r\}$ est le cercle de centre a et de rayon r .

$D = D(0, 1)$ est le disque unité ouvert; $\Gamma = C(0, 1)$ est le cercle unité. C 'est aussi l'ensemble des e^{it} , où t parcourt un intervalle de longueur 2π .

- Une courbe est une application continue $\gamma : [u, v] \rightarrow \mathbb{C}$ où $u, v \in \mathbb{R}$ et $u < v$; $\gamma^* = \gamma([u, v])$ s'appelle l'image de γ .

- Une progression arithmétique dans \mathbb{Z} est une partie de \mathbb{Z} de la forme $a + b\mathbb{Z}$, où $a, b \in \mathbb{Z}$. On emploie les abréviations usuelles pgcd et ppcm pour plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple.

- Pour $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, la notation (de Landau) $f = O(g)$ signifie qu'on peut trouver $M > 0$ et $\delta > 0$ tels que $|f(z)| \leq M|g(z)|$ si $|z| \leq \delta$.

- Un ensemble inductif E est un ensemble partiellement ordonné (E, \leq) dans lequel toute partie totalement ordonnée possède un majorant; $b \in E$ est dit maximal si $x \in E$ et $x \geq b$ entraîne $x = b$. Si E est inductif et $a \in E$, on peut trouver b maximal avec $b \geq a$ (lemme de Zorn; cf. [HL]). Si $a \in E$ vérifie $a \leq x$ pour tout $x \in E$, on dit que a est le minimum de E et on note $a = \min E$; on définit de même $\max E$, quand il existe.

- Si X, Y sont deux espaces métriques, $f : X \rightarrow X$ est dite lipschitzienne s'il existe $k > 0$ tel que $d[f(a), f(b)] \leq k d(a, b)$ pour tous $a, b \in X$. f est dite isométrique si $d[f(a), f(b)] = d(a, b)$ pour tous $a, b \in X$.

- On dit (supposant connue la notion d'action de groupe) que le groupe G agit transitivement sur l'ensemble X si, étant donné $a, b \in X$, il existe $g \in G$ tel que $ga = b$.

LE CORPS DES RÉELS

1

I DÉFINITION AXIOMATIQUE DE \mathbb{R}

I.1 Corps archimédiens ; segments emboîtés

On adopte ici le point de vue de Dieudonné ([D], chapitre II), c'est-à-dire qu'on prend en cours de route la construction de Dedekind par la méthode dite « des coupures », qui consiste à adjoindre aux rationnels déjà connus de nouveaux éléments ; cette construction possède des propriétés dont la preuve n'est au début qu'une vérification ennuyeuse ; on prend ces premières propriétés comme axiomes (axiome voulant dire **propriété admise**) et on renvoie à [L] pour leur vérification ; à partir de ces « axiomes », on démontre de façon rigoureuse d'autres propriétés fondamentales du nouvel ensemble \mathbb{R} considéré, notamment celle de la borne supérieure. On suppose donc qu'il existe un ensemble \mathbb{R} (appelé corps des (nombres) réels) tel que :

Axiome 1. \mathbb{R} est un corps commutatif (de lois notées $+$, et \cdot), les éléments neutres pour l'addition et la multiplication étant respectivement notés 0 et 1 (zéro et un).

Axiome 2. \mathbb{R} est un corps ordonné, *i.e.* il existe sur \mathbb{R} une relation d'ordre total notée \leq , compatible avec la structure de corps au sens où pour tous x, y, z de \mathbb{R} :

$$x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z \quad (\text{I.1})$$

$$x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0. \quad (\text{I.2})$$

On posera $\max(x, y) = y$ si $x \leq y$ et $= x$ si $x \geq y$; on définit de même $\min(x, y)$.

Axiome 3. \mathbb{R} est un corps ordonné **archimédien**, *i.e.* $x > 0, y \geq 0$ entraîne l'existence de $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $nx \geq y$ (où $nx = x + \dots + x$ n fois). Pour $a \leq b$, on appelle segment ab , et on note $[a, b]$, l'ensemble des x tels que $a \leq x \leq b$.

Axiome 4. \mathbb{R} a la propriété des segments emboîtés, c'est-à-dire : toute suite décroissante $[a_n, b_n]$ de segments (cela équivaut à dire $a_{n+1} \geq a_n$ et $b_{n+1} \leq b_n$) a une intersection non vide.

Remarque. Le corps \mathbb{Q} des rationnels vérifie les axiomes 1, 2, 3 ; il est donc prévisible que c'est l'axiome 4 qui jouera le rôle essentiel dans les preuves à venir.

I.2 Partie positive, négative, valeur absolue; intervalles; distance sur \mathbb{R}

Étant donné $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$x^+ = \max(x, 0) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0, \end{cases} \quad (\text{I.3})$$

et x^+ s'appelle la partie positive de x ;

$$x^- = \max(-x, 0) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0, \end{cases} \quad (\text{I.4})$$

et x^- s'appelle la partie négative de x ;

$$|x| = \max(x, -x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0, \end{cases} \quad (\text{I.5})$$

et $|x|$ s'appelle la valeur absolue de x .

Les premières propriétés de ces trois symboles sont données par la proposition simple qui suit ; pour plus de clarté, définissons d'abord les intervalles de \mathbb{R} ; a et b désignent des réels.

- $]a, b[:= \{x; a < x < b\}$ s'appelle l'intervalle ouvert d'extrémités a et b ; on définit de même les intervalles ouverts

$$]a, \infty[:= \{x; x > a\}, \quad]-\infty, b[:= \{x; x < b\}, \quad]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}.$$

- $[a, b] := \{x; a \leq x \leq b\}$ s'appelle le segment (ou intervalle fermé) d'extrémités a et b (cf. axiome 4) ; on définit de même les intervalles fermés

$$[a, +\infty[:= \{x; x \geq a\}, \quad]-\infty, b] = \{x; x \leq b\}, \quad]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}.$$

- $[a, b[:= \{x; a \leq x < b\}$ s'appelle l'intervalle d'extrémités a et b , fermé en a et ouvert en b .
- $]a, b] := \{x; a < x \leq b\}$ s'appelle l'intervalle d'extrémités a et b , ouvert en a et fermé en b .
- Par convention, \emptyset est un intervalle ouvert et fermé ; \emptyset et \mathbb{R} sont les deux seuls intervalles à la fois ouverts et fermés.

Proposition I.1. Soit $a, b, x \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$, et soit $c = \frac{a+b}{2}$; alors

$$x = x^+ - x^- ; \quad |x| = x^+ + x^- \quad (\text{I.6})$$

$$]a, b[= \left\{ u; |u - c| < \frac{b-a}{2} \right\}; \quad [a, b] = \left\{ u; |u - c| \leq \frac{b-a}{2} \right\}. \quad (\text{I.7})$$

Démonstration. (I.6) est évident, mais utile ; on voit que

$$a < u < b \Leftrightarrow -\frac{b-a}{2} = a-c < u-c < b-c = \frac{b-a}{2},$$

d'où la première égalité de (I.7) ; la seconde se prouve de même. \square

Les notions de partie positive, partie négative et le couple de formules (I.6) se révèlent très utiles en Analyse (cf. exercice 9) ; la notion de valeur absolue permet de définir une distance sur \mathbb{R} , appelée distance usuelle et notée d , qui est une fonction des deux variables réelles x et y à valeurs dans la « demi-droite positive » $\mathbb{R}^+ := [0, \infty[$

$$d(x, y) = |x - y|. \quad (\text{I.8})$$

Proposition I.2. La distance d jouit des propriétés suivantes :

- a) $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie)
- b) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (séparation)
- c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

Démonstration. a) et b) sont évidents ; c) Posons $x-y = u$ et $y-z = v$; il est clair que $-(|u| + |v|) \leq u+v \leq (|u| + |v|)$; d'où $|x-z| = |u+v| \leq |u| + |v| = |x-y| + |y-z|$, i.e. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. \square

Remarque I.3. En anticipant sur les définitions du chapitre II, les propositions I.1 et I.2 expriment l'importante propriété suivante :

sur \mathbb{R} , les topologies de l'ordre et de la distance coïncident. (I.9)

En effet, la topologie de l'ordre (resp. de la distance) est celle engendrée par les intervalles ouverts (resp. les boules ouvertes) ; or, intervalles ouverts et boules ouvertes coïncident d'après (I.7).

I.3 Densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R}

Notons d'abord que \mathbb{R} est, comme tous les corps ordonnés, un corps de caractéristique zéro au sens où

$$x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow nx \neq 0. \quad (\text{I.10})$$

En effet, $x > 0$ entraîne $nx \geq x > 0$ d'après l'axiome 2 et une récurrence sur n (noter que $b_1 \geq a_1$ et $b_2 \geq a_2$ entraîne $b_1 + b_2 \geq a_1 + a_2$) ; de même, $x < 0$ entraîne $nx < 0$. Comme tous les corps commutatifs de caractéristique zéro, \mathbb{R} contient une copie du corps \mathbb{Q} des rationnels ; plus précisément, l'application $\varphi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi\left(\frac{p}{q}\right) = (p \cdot 1)(q \cdot 1)^{-1}$, où $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, est un isomorphisme croissant du corps ordonné \mathbb{Q} sur un sous-corps de \mathbb{R} , qu'on note encore \mathbb{Q} par abus de langage. Le théorème suivant est fondamental.

Théorème I.4. \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} .

Démonstration. En vertu de (I.9), il s'agit de montrer que tout intervalle ouvert $]a, b[$, où $a < b$, contient un rationnel $\frac{p}{q}$; d'après l'axiome 3, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $q > \frac{1}{b-a}$, ou $\frac{1}{q} < b - a$; soit $p \in \mathbb{Z}$ le plus petit entier tel que $\frac{p}{q} > a$; alors $\frac{p-1}{q} \leq a$, d'où

$$a < \frac{p}{q} = \frac{p-1}{q} + \frac{1}{q} < a + (b-a) = b,$$

et $\frac{p}{q}$ répond à la question. □

II LE THÉORÈME DE LA BORNE SUPÉRIEURE

II.1 Le théorème

Donnons d'abord deux définitions; soit (X, \leq) un ensemble totalement ordonné, A une partie non vide de X , $x, m \in X$.

$$x \text{ est un majorant de } A \text{ si } x \geq a \text{ pour tout } a \in A. \quad (\text{II.1})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m \text{ est la borne supérieure de } A \text{ si } m \text{ est un majorant de } A \\ \text{et si } x \text{ majorant de } A \text{ entraîne } x \geq m. \end{array} \right. \quad (\text{II.2})$$

La borne supérieure, si elle existe, est par définition le plus petit des majorants : elle est donc unique et se note $\sup A$; on définit de même un minorant de A et la borne inférieure (si elle existe) de A , qui est le plus grand des minorants et se note $\inf A$; A est dite majorée (resp. minorée) si elle possède un majorant (resp. un minorant); le théorème suivant est lui aussi fondamental.

Théorème II.1 (Théorème de la borne supérieure).

a) Toute partie A non vide majorée (resp. minorée) de \mathbb{R} possède une borne supérieure (resp. une borne inférieure) m .

b) m est caractérisé par les deux propriétés suivantes :

i) $m \geq a$ pour tout $a \in A$,

ii) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que $a \geq m - \varepsilon$.

c) $m \in \bar{A}$, autrement dit tout intervalle ouvert contenant m coupe A .

Démonstration. a) Soit M l'ensemble non vide des majorants de A ; fixons $a \in A$ et $b \in M$; pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $a + p 2^{-n} \geq b$, *a fortiori* tel

II. Le théorème de la borne supérieure

que $a + p 2^{-n} \in M$; soit p_n le plus petit entier ayant cette deuxième propriété, et $I_n = [a + (p_n - 1) 2^{-n}, a + p_n 2^{-n}]$; observons d'abord que

$$2p_n - 1 \leq p_{n+1} \leq 2p_n. \quad (\text{II.3})$$

En effet, $a + 2p_n 2^{-n-1} = a + p_n 2^{-n} \in M$, donc $p_{n+1} \leq 2p_n$; d'autre part $a + (2p_n - 2) 2^{-n-1} = a + (p_n - 1) 2^{-n} \notin M$, donc $p_{n+1} > 2p_n - 2$.

(II.3) entraîne

$$I_{n+1} \subset I_n. \quad (\text{II.4})$$

En effet, $a + (p_{n+1} - 1) 2^{-n-1} \geq a + (2p_n - 2) 2^{-n-1} = a + (p_n - 1) 2^{-n}$, et $a + p_{n+1} 2^{-n-1} \leq a + 2p_n 2^{-n-1} = a + p_n 2^{-n}$. D'après l'axiome 4, l'intersection des segments emboîtés I_n contient au moins un point m ; on voit que

$$x \in A \Rightarrow x \leq a + p_n 2^{-n} = a + (p_n - 1) 2^{-n} + 2^{-n} \leq m + 2^{-n}.$$

Faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $x \leq m$, d'où $m \in M$. Soit y un autre élément de M ; pour tout n , il existe $x_n \in A$ tel que $x_n > a + (p_n - 1) 2^{-n}$, puisque $a + (p_n - 1) 2^{-n} \notin M$; d'où $y \geq x_n > a + (p_n - 1) 2^{-n} \geq m - 2^{-n}$; faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $y \geq m$, ce qui montre que m est la borne supérieure de A .

b) L'inégalité $x_n \geq m - 2^{-n}$ dans a) montre que m vérifie i) et ii); si m' vérifie ces conditions, on a en particulier $m' \geq a \geq m - \varepsilon$ d'où $m' \geq m$ vu l'arbitraire sur ε , et de même $m \geq m'$, i.e. $m = m'$.

c) Il s'agit (cf. chapitre II) de trouver une suite (x_n) de A convergeant vers m ; or la suite (x_n) du a) fait l'affaire, puisqu'elle vérifie la double inégalité $m - 2^{-n} \leq x_n \leq m$. \square

Remarque II.2. Le théorème de la borne supérieure, vrai pour \mathbb{R} , ne l'est plus pour \mathbb{Q} (cf. exercice 13); c'est l'une des grandes supériorités des réels sur les rationnels, et une des justifications de leur introduction; en voici d'autres.

II.2 Suites de Cauchy; suites monotones

Une suite (x_n) de réels est dite de Cauchy si elle vérifie la propriété suivante, qui sera reprise entre autres au chapitre V :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall p, q \geq n_0) : d(x_p, x_q) = |x_p - x_q| \leq \varepsilon. \quad (\text{II.5})$$

En termes intuitifs, (x_n) est de Cauchy si $x_p - x_q \rightarrow 0$ quand $p, q \rightarrow \infty$; une suite (x_n) convergeant vers ℓ est de Cauchy (cf. chapitre II) d'après l'inégalité $d(x_p, x_q) \leq d(x_p, \ell) + d(\ell, x_q)$, mais l'intérêt de (II.5) est de ne pas faire intervenir la

Chapitre 1 · Le corps des réels

limite éventuelle et de pouvoir parfois conclure à son existence sans être capable de la calculer. Voici d'autres définitions importantes :

$$(x_n) \text{ est } \mathbf{croissante} \text{ si } x_{n+1} \geq x_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \quad (\text{II.6})$$

(On a alors $x_q \geq x_p$ pour $q \geq p$).

$$(x_n) \text{ est } \mathbf{décroissante} \text{ si } x_{n+1} \leq x_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \quad (\text{II.7})$$

(On a alors $x_q \leq x_p$ pour $q \geq p$).

$$(x_n) \text{ est } \mathbf{monotone} \text{ si elle est soit croissante soit décroissante.} \quad (\text{II.8})$$

« Tout ce qui monte converge » selon Teilhard de Chardin ; voici la version mathématique qui dit la même chose en termes peut-être moins poétiques ...

Théorème II.3.

- a) Toute suite de réels croissante, majorée converge dans \mathbb{R} vers sa borne supérieure.
- b) Toute suite de réels croissante, non majorée converge vers $+\infty$.

Démonstration. a) Soit A l'ensemble des termes x_n de la suite ; A étant majoré, sa borne supérieure $m = \sup A$ existe d'après le théorème II.1 ; soit $\varepsilon > 0$; toujours d'après II.1, il existe n_0 tel que $x_{n_0} \geq m - \varepsilon$; la suite étant croissante, on voit que :

$$n \geq n_0 \Rightarrow m - \varepsilon \leq x_{n_0} \leq x_n \leq m, \text{ d'où } |x_n - m| \leq \varepsilon.$$

Par définition (cf. chapitre II) x_n converge vers m .

b) Soit y un réel ; A étant cette fois non majoré, il existe n_0 tel que $x_{n_0} \geq y$ et on voit que :

$$n \geq n_0 \Rightarrow x_n \geq x_{n_0} \geq y.$$

Par définition, cela signifie que x_n converge vers $+\infty$. □

On a bien sûr un énoncé analogue avec des suites décroissantes.

Théorème II.4. Toute suite de Cauchy de \mathbb{R} converge dans \mathbb{R} ; en d'autres termes, \mathbb{R} est complet (cf. chapitre V).

Démonstration. Soit (x_n) une suite de Cauchy de \mathbb{R} ; définissons n_1 comme le plus petit entier tel que $|x_p - x_{n_1}| \leq 2^{-2}$ pour tout $p \geq n_1$, puis par récurrence n_k comme le plus petit entier $\geq 1 + n_{k-1}$ tel que $|x_p - x_{n_k}| \leq 2^{-k-1}$ pour tout $p \geq n_k$; nous avons alors

$$n_{k+1} > n_k ; |x_{n_{k+1}} - x_{n_k}| \leq 2^{-k-1}. \quad (\text{II.9})$$

II. Le théorème de la borne supérieure

Il en résulte que les segments $I_k = [x_{n_k} - 2^{-k}, x_{n_k} + 2^{-k}]$ sont décroissants, puisque $x_{n_{k+1}} + 2^{-k-1} \leq x_{n_k} + 2^{-k-1} + 2^{-k-1} = x_{n_k} + 2^{-k}$ et de même $x_{n_{k+1}} - 2^{-k-1} \geq x_{n_k} - 2^{-k-1} - 2^{-k-1} = x_{n_k} - 2^{-k}$; d'après l'axiome 4, leur intersection contient un réel ℓ , avec

$$|x_{n_k} - \ell| \leq 2^{-k}. \quad (\text{II.10})$$

(II.10) montre que la suite $(y_k) = (x_{n_k})$ converge vers ℓ quand $k \rightarrow \infty$; et une suite de Cauchy qui contient une sous-suite convergente converge, vérifions-le ici; soit $\varepsilon > 0$, n_0 comme dans (II.5), $k_0 \in \mathbb{N}$ assez grand pour qu'on ait $2^{-k_0} \leq \varepsilon$ et $n_{k_0} \geq n_0$ (c'est possible d'après (II.9)); alors $n \geq n_{k_0}$ entraîne $|x_n - \ell| \leq |x_n - x_{n_{k_0}}| + |x_{n_{k_0}} - \ell| \leq \varepsilon + 2^{-k_0} \leq 2\varepsilon$, ce qui prouve le théorème puisque ε est arbitrairement petit. \square

Remarque II.5. Là encore (cf. exercice 13) le fait d'être complet est une propriété possédée par le corps des réels, et non par celui des rationnels.

II.3 Le théorème de Borel-Lebesgue

- Une partie de \mathbb{R} s'appelle un ouvert si c'est une réunion d'intervalles ouverts (avec la convention $\bigcup_{\emptyset} \dots = \emptyset$).
- On dit qu'une famille $(\omega_i)_{i \in I}$ de parties de X est un recouvrement de $A \subset X$ si $A \subset \bigcup_I \omega_i$.

Le théorème suivant semble avoir été découvert par Borel et Lebesgue lorsqu'ils tentèrent d'établir de façon rigoureuse que la longueur $b - a$ d'un segment $[a, b]$ est plus petite que la somme des longueurs des segments non triviaux le recouvrant.

Théorème II.6 (Théorème de Borel-Lebesgue). Soit $(\omega_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert du segment $[a, b] = K$; alors il existe J fini, $J \subset I$ tel que $(\omega_i)_{i \in J}$ soit encore un recouvrement de K (on dit que K admet un sous-recouvrement fini extrait des ω_i).

Démonstration. Soit A l'ensemble des $x \in K$ tels que $[a, x]$ puisse être recouvert par un nombre fini de ω_i , et soit $m = \sup A \leq b$; nous allons voir que

$$m \in A; \quad m = b. \quad (\text{II.11})$$

En effet, $m \in K$, donc il existe j tel que $m \in \omega_j$, et $h > 0$ tel que $[m - h, m + h] \subset \omega_j$; on peut trouver $x \in A$ tel que $x \geq m - h$; $[a, x]$ est recouvert par un nombre p de ω_i ; en leur ajoutant ω_j , on voit que $[a, m + h]$ est recouvert par $p + 1$ des ω_i ; en particulier $m \in A$; si $m < b$, en diminuant au besoin h , on a $m + h \in K$ et donc $m + h \in A$, ce qui contredit la définition de m et achève de prouver (II.11). Or, (II.11) dit que K est recouvert par un nombre fini de ω_i . \square

II.4 Racine carrée; caractérisation des réels positifs

Le théorème de la borne supérieure permet d'avoir une caractérisation algébrique remarquable de la demi-droite positive $\mathbb{R}^+ = [0, \infty[$.

Proposition II.7. Soit $x \in \mathbb{R}$; on a équivalence entre :

- a) $x \in \mathbb{R}^+$,
- b) x est un carré parfait : $x = y^2$, $y \in \mathbb{R}$.

Démonstration. b) \Rightarrow a) est facile; si $y \geq 0$, $x = y^2 \geq 0$ par l'axiome 2; si $y < 0$, $x = (-y)^2 \geq 0$.

a) \Rightarrow b) : si $x = 0$, il n'y a rien à prouver; si $x > 0$, posons

$$A = \{y \in \mathbb{R}^+; y^2 \leq x\}.$$

A est non vide car $0 \in A$; A est majoré par $x+1$ car $y \geq x+1$ entraîne $y^2 \geq (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 > x$; A admet donc une borne supérieure $m \in \mathbb{R}^+$; $m > 0$ car, si $p \in \mathbb{N}^*$ et $\frac{1}{p} \leq x$, $\frac{1}{p^2} \leq \frac{1}{p} \leq x$ et $\frac{1}{p} \in A$; je dis que

$$m^2 = x. \tag{II.12}$$

Soit en effet $\varepsilon > 0$; d'après l'axiome 3, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} \leq m$ et $\frac{2m}{n} \leq \varepsilon$; d'après les propriétés de $m = \sup A$, il existe $y \in A$ tel que $y \geq m - \frac{1}{n}$; d'où

$$x \geq y^2 \geq m^2 - \frac{2m}{n} \geq m^2 - \varepsilon.$$

ε étant arbitraire, il vient $m^2 \leq x$; si $m^2 < x$, on trouve $\varepsilon > 0$ tel que $(m + \varepsilon)^2 \leq x$, d'où $m + \varepsilon \in A$, ce qui contredit la définition de m ; on a donc (II.12). \square

Remarque II.8. Si $z \in \mathbb{R}$ est une racine carrée de x (i.e. $z^2 = x$), on a $(z-y)(z+y) = z^2 - y^2 = x - x = 0$, donc $x > 0$ a exactement deux racines carrées : l'une positive y , l'autre négative $-y$. y s'appelle la racine carrée positive de x et se note \sqrt{x} . Voici une application classique mais frappante de la caractérisation algébrique de \mathbb{R}^+ .

Proposition II.9. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un homomorphisme d'anneau ($f(x+y) = f(x)+f(y)$); $f(xy) = f(x)f(y)$, $\forall x, y$) non identiquement nul; alors f est l'identité.

Démonstration. La simple hypothèse d'additivité sur f suffit à impliquer

$$f(rx) = rf(x), \quad \forall r \in \mathbb{Q}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{II.13}$$

II. Le théorème de la borne supérieure

On vérifie (II.13) d'abord pour $r \in \mathbb{N}$, par récurrence ; puis pour $r \in \mathbb{Z}$, d'après l'imparité de f ; si $r = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, on voit que $pf(x) = f(px) = f(qrx) = qf(rx)$, d'où $f(rx) = \frac{p}{q}f(x) = rf(x)$. Malgré la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} , on ne peut en général aller plus loin sans condition de régularité sur f . Mais **les deux** hypothèses vont permettre de montrer que f est croissante, la proposition II.7 jouant un rôle décisif :

$$u \leq v \Rightarrow f(u) \leq f(v). \quad (\text{II.14})$$

En effet, $u \leq v \Rightarrow v - u \geq 0 \Rightarrow v - u = y^2 \Rightarrow f(v - u) = (f(y))^2 \Rightarrow f(v - u) \geq 0 \Rightarrow f(v) - f(u) \geq 0 \Rightarrow f(u) \leq f(v)$. Il est maintenant facile de conclure, en observant d'abord que

$$f(1) = 1. \quad (\text{II.15})$$

(Il existe x_0 tel que $f(x_0) \neq 0$; alors $(1 - f(1))f(x_0) = f(x_0) - f(1x_0) = 0$, et $1 - f(1) = 0$).

Soit ensuite $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, r_1 et $r_2 \in \mathbb{Q}$ tels que $x - \varepsilon \leq r_1 \leq x \leq r_2 \leq x + \varepsilon$; (II.13), (II.14), (II.15) entraînent $r_1 = f(r_1) \leq f(x) \leq f(r_2) = r_2$, d'où $x - \varepsilon \leq f(x) \leq x + \varepsilon$; ε étant arbitraire, $f(x) = x$. \square

Remarque II.10. Il existe des fonctions très irrégulières (non mesurables au sens de Lebesgue) vérifiant :

(*) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. Mais on peut montrer que, dès que f est un peu régulière (mesurable au sens de Lebesgue précisément !),

(*) suffit à entraîner $f(x) = xf(1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

cf. Exercices 1 et 16, et remarque II.15.

II.5 Intervalles se coupant deux à deux ; propriété des deux boules de \mathbb{R}

Voici encore une conséquence du théorème II.1, qui joue notamment un rôle clé dans la preuve du théorème de Hahn-Banach et peut aussi passer pour un cas particulier du théorème de Helly (cf. [Eg]) : « des convexes compacts de \mathbb{R}^n qui se coupent $n + 1$ à $n + 1$ se coupent tous ».

Proposition II.11. Soit $(I_t)_{t \in T}$ une famille de segments se coupant deux à deux ; alors les I_t se coupent tous : $\bigcap_{t \in T} I_t \neq \emptyset$.

Démonstration. Posons $I_t = [a_t, b_t]$, $A = \{a_t ; t \in T\}$, $B = \{b_s ; s \in T\}$ et notons que

$$a_t \leq b_s, \quad \forall s, t \in T. \quad (\text{II.16})$$

Chapitre 1 · Le corps des réels

En effet, $[a_t, b_t] \cap [a_s, b_s]$ contient un point c , et $a_t \leq c \leq b_s$. Fixons s ; (II.16) montre que A est majoré par b_s , donc $a := \sup A$ existe et $a \leq b_s$, puis $a \in I_s$; faisant maintenant varier s , on voit que $a \in \bigcap I_s$. \square

Remarque II.12. Il est facile de voir qu'on a plus précisément $\bigcap I_t = [a, b]$ avec $a = \sup A$, $b = \inf B$.

D'après (I.7), la proposition II.11 admet la reformulation suivante (cf. chapitre II pour la définition d'une boule).

Proposition II.13 (Propriété des deux boules). *Toute famille de boules fermées de \mathbb{R} se coupant deux à deux a une intersection non vide.*

Cette propriété est partagée par très peu d'espaces métriques : par exemple, il est clair qu'on peut trouver dans \mathbb{R}^2 euclidien trois boules fermées se coupant deux à deux et d'intersection vide (cf. figure 1.1); pour insister sur l'importance de la proposition II.11 ou de la remarque II.12, voici encore une proposition qui n'est autre, comme on l'a déjà dit, que le point central du théorème de Hahn-Banach (forme analytique ; cf. par exemple [R], p. 106).

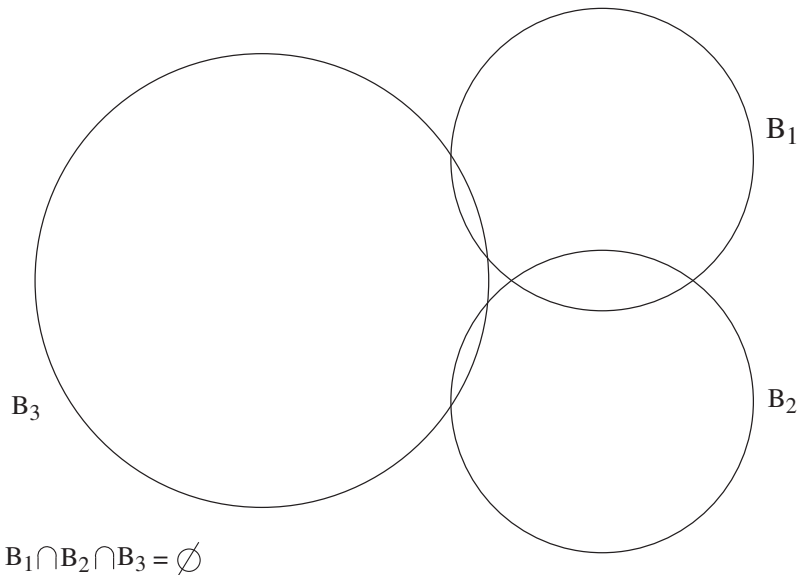


Figure 1.1

Proposition II.14. *Soit E un \mathbb{R} -ev, M un hyperplan de E , p une sous-norme sur E , f une forme linéaire sur M telle que $f(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in M$; alors, f peut être prolongée en une forme linéaire g sur E telle que $g(z) \leq p(z)$ pour tout $z \in E$.*

Démonstration. Par hypothèse, il existe $x_0 \in E$ tel que $E = M \oplus \mathbb{R}x_0$; il s'agit de définir $g(x_0) = a$, puis $g(x + tx_0) = f(x) + ta$, de façon que

$$f(x) + ta \leq p(x + tx_0), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in M. \quad (\text{II.17})$$

$t = 0$ correspond à l'hypothèse; $t > 0$ s'écrit aussi bien, vu l'arbitraire sur x et le fait que p est positivement homogène :

$$f(x) + a \leq p(x + x_0), \quad \forall x \in M. \quad (\text{II.17}^+)$$

De même, $t < 0$ donne

$$f(x) - a \leq p(x - x_0), \quad \forall x \in M. \quad (\text{II.17}^-)$$

En d'autres termes, on veut trouver : $a \in \bigcap_{x \in M} I_x$, où $I_x = [a_x, b_x]$,

$a_x = f(x) - p(x - x_0)$, $b_x = -f(x) + p(x + x_0)$; d'après II.11, tout revient à montrer que, pour tous $x, y \in M$: $a_x \leq b_y$; mais

$$\begin{aligned} a_x \leq b_y &\Leftrightarrow f(x) - p(x - x_0) \leq p(y + x_0) - f(y) \\ &\Leftrightarrow f(x + y) \leq p(x - x_0) + p(y + x_0); \end{aligned}$$

or, cette dernière inégalité est vraie puisqu'on a

$$f(x + y) \leq p(x + y) = p(x - x_0 + y + x_0) \leq p(x - x_0) + p(y + x_0). \quad \square$$

Exercices

Certains exercices font appel à des notions et définitions des chapitres suivants.

1.1 a) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue avec $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$; montrer que $f(x) = cx$, où $c = f(1)$.

b) Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base du \mathbb{Q} -espace vectoriel \mathbb{R} , et $(e_i^*)_{i \in I}$ le système dual, i.e :

$$e_i^* \in \mathbb{R}^*; \text{ et } e_i^*(e_j) = \delta_{ij}, \quad \forall i, j \in I.$$

Montrer que, pour tout i , e_i^* vérifie l'équation fonctionnelle précédente, mais n'est pas continue sur \mathbb{R} (e_i^* n'est même pas mesurable-Lebesgue; cf. remarque II.15 et exercice 16).

1.2 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ isométrique, i.e. $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ pour tous x, y .

a) Montrer que $f(0) = 0$ entraîne $f(x)f(y) = xy$ pour tous x, y .

b) Montrer que f est une application affine $x \mapsto a + x$ ou $x \mapsto a - x$.

1.3 Soit $a > 0$ et (x_n) la suite de réels définie par $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ décroît et en déduire que x_n tend vers \sqrt{a} .

b) Soit $\varepsilon_n = \frac{x_n - \sqrt{a}}{x_n + \sqrt{a}}$; montrer que $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n^2$; quelles informations cela donne-t-il sur la vitesse de convergence de x_n vers \sqrt{a} ?

1.4 On sait que (cf. par exemple [HL]) pour tout ensemble X le cardinal de $\mathcal{P}(X)$ est strictement supérieur à celui de X .

a) Soit $\omega = (\varepsilon_n(\omega)) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$; montrer que la suite de terme général $\sum_1^n \varepsilon_k(\omega) 3^{-k}$ est croissante majorée; on note sa limite par $\varphi(\omega)$ ou par $\sum_1^\infty \varepsilon_k(\omega) 3^{-k}$.

b) Montrer que φ est une injection de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$ dans \mathbb{R} ; en déduire que la cardinalité de \mathbb{R} est strictement supérieure à celle de \mathbb{N} ; on dit que \mathbb{R} n'est pas dénombrable (théorème de Cantor).

1.5 Soit $I = [0, 1]$, $a \in I$.

a) En écrivant $|x - a| = \sqrt{1 - (1 - (x - a)^2)}$, montrer que la fonction $x \mapsto |x - a|$ est limite uniforme sur I de polynômes; *idem* pour $x \mapsto (x - a)^+$.

b) Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue, affine par morceaux; montrer qu'il existe $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ et $a_1, \dots, a_n \in I$ tels que $f(x) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^n \lambda_k (x - a_k)^+$, $x \in I$.

c) Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue; montrer que f est limite uniforme sur I de fonctions continues affines par morceaux; en déduire que f est limite uniforme sur I de polynômes (preuve par Lebesgue du théorème de Weierstrass).

1.6 Théorie de la mesure

Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, avec μ positive et $\mu(X) = 1$; soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de \mathcal{A} ; si $J \subset I$ est dénombrable, on pose $A_J = \cup\{A_i; i \in J\}$; $A_J \in \mathcal{A}$.

a) Montrer que l'ensemble des $\mu(A_J)$ admet une borne supérieure m , et qu'il existe J_0 dénombrable tel que $m = \mu(A_{J_0})$.

b) Soit $A = A_{J_0} \in \mathcal{A}$; montrer que A contient « presque » tous les A_i au sens où : $i \in I \Rightarrow \mu(A_i \cap A^c) = 0$. Et que si $B \in \mathcal{A}$ vérifie $\mu(A_i \cap B^c) = 0 \forall i \in I$, on a $\mu(A \cap B^c) = 0$.

1.7 Soit (a_n) une suite de réels non bornée ; on se propose de montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $e^{ia_n x}$ ne tend pas vers 1.

a) Construire par récurrence des segments emboîtés non réduits à des points $I_1 \supset \dots \supset$

$I_k \supset I_{k+1} \dots$ et des entiers $n_1 < \dots < n_k < n_{k+1} \dots$ avec $y \in I_k \Rightarrow |e^{ia_{n_k} y} - 1| \geq 1$.

b) Montrer que l'intersection des I_k n'est pas vide et conclure.

1.8 (Suite). Soit (a_n) une suite de réels.

a) On suppose que $e^{ia_n x}$ tend vers 1 pour tout $x \in \mathbb{R}$; montrer que a_n tend vers 0.

b) On suppose que $e^{ia_n x}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$; montrer que (a_n) est de Cauchy, puis que (a_n) converge.

1.9 Avec les notations de l'exercice 6, soit $(f_n), f$ des fonctions positives de $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ telles que

i) $f_n \rightarrow f, \mu$ -presque partout ;

ii) $\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$.

Montrer que $\int |f - f_n| d\mu \rightarrow 0$ (on pourra appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $(f - f_n)^+$).

1.10 Soit F un espace normé ayant la propriété des deux boules (une famille de boules fermées se coupant deux à deux a une intersection non vide) ; soit M un hyperplan d'un espace normé E et $f : M \rightarrow F$ linéaire continue de norme ≤ 1 , i.e. : $\|f(x)\| \leq 1$ pour $\|x\| \leq 1$; montrer que f se prolonge en $g : E \rightarrow F$ linéaire continue de norme ≤ 1 .

1.11 Montrer que l'espace ℓ^∞ des suites bornées $x = (x_n)_{n \geq 0}$ de réels, normé par $\|x\| = \sup_n |x_n|$, a la propriété des deux boules.

1.12 a) Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels ; montrer qu'on peut en extraire une suite monotone.

b) Soit $X = (x_1, \dots, x_p)$ une suite de p réels distincts avec $p = n^2 + 1, n \in \mathbb{N}^*$;

i) soit $f : X \rightarrow \mathbb{N}^{*2}$ définie par $f(x_i) = (a_i, b_i)$ où a_i (resp. b_i) est la longueur de la plus grande suite croissante (resp. décroissante) commençant par x_i et extraite de X ; montrer que f est injective.

ii) Montrer qu'on peut extraire de X une suite monotone de longueur $n + 1$; en considérant l'exemple $n, \dots, 2, 1, 2n, \dots, n + 2, n + 1, \dots, n^2, \dots, n^2 - n + 1$, montrer que ce résultat est optimal en général.

1.13 On considère les deux suites de rationnels $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}$ et $b_n = a_n + \frac{1}{n \cdot n!}$, ($n \in \mathbb{N}^*$).

a) Montrer que (a_n) est strictement croissante, (b_n) strictement décroissante, et que $a_i \leq b_j$ pour tous $i, j \in \mathbb{N}^*$.

b) Montrer que les segments de rationnels $I_n = [a_n, b_n]$ sont emboîtés et d'intersection vide.

c) Montrer que l'ensemble A des a_n n'a pas de borne supérieure dans \mathbb{Q} .

d) Montrer que la suite (a_n) est de Cauchy, mais divergente dans \mathbb{Q} .

1.14 a) Soit G un sous-groupe de \mathbb{R} non réduit à zéro ; on pose

$$G^+ = \{x ; x \in G, x > 0\}, \text{ et } m = \inf G^+.$$

i) Si $m > 0$, montrer que $G = m\mathbb{Z}$.

ii) Si $m = 0$, montrer que G est dense dans \mathbb{R} , c'est-à-dire : tout intervalle $]a, b[$, où $a < b$, contient au moins un point de G .

b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un irrationnel ; montrer que le sous-groupe $\mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}$ est dense dans \mathbb{R} .

1.15 Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

1.16 Théorème de Steinhaus

Soit n un entier ≥ 1 , $m = dx$ la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n (on note $x = (x_1, \dots, x_n)$, $dx = dx_1 \cdots dx_n$), A et B deux parties mesurables de \mathbb{R}^n . On se propose de montrer que :

$$m(A) > 0 \text{ et } m(B) > 0 \Rightarrow A + B \text{ contient un ouvert non-vide } \Omega. \quad (1.1)$$

($A+B$ désigne l'ensemble des sommes $a + b$, où $a \in A$, $b \in B$).

a) Montrer qu'on peut, sans perte de généralité, supposer en plus que $m(A) < \infty$ et $m(B) < \infty$, hypothèse qu'on fait dans la suite.

b) Soit $u = \mathbf{1}_A$, $v = \mathbf{1}_B \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ et $w = u * v$ leur produit de convolution défini par

$$w(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x - y)v(y)dy.$$

Montrer que w est continue, non identiquement nulle.

c) Montrer qu'il existe un ouvert non-vide Ω sur lequel $w > 0$.

d) Montrer que $\Omega \subset A + B$, ce qui prouve (1.1) (théorème de Steinhaus).

1.17 Soit q un entier ≥ 3 , et $A = \{0, 1, \dots, q-1\}$ l'alphabet associé. On fixe $p \in A$, $1 \leq p \leq q-2$ et on désigne par $B = A \setminus \{p\}$ l'alphabet A privé de la lettre p . Soit K l'ensemble des réels x qui peuvent s'écrire

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{q^n} \text{ avec } \varepsilon_n \in B.$$

- a) Montrer que $K \subset [0, 1]$ et que $m(K) = 0$.
 b) Montrer que, pour tout $\alpha \in A$, il existe $\varepsilon, \varepsilon' \in B$ tels que $2\alpha = \varepsilon + \varepsilon'$.
 c) Montrer que $2K := K + K$ contient le segment $[0, 2]$. Ainsi, la réciproque de l'exercice 1.16 est fausse.

Corrigés

1.1 a) Variante facile de la proposition II.9.

b) e_i^* est une forme \mathbb{Q} -linéaire sur \mathbb{R} , donc est additive par définition ; mais $e_i^*(0) = 0$, $e_i^*(e_i) = 1$, donc e_i^* ne vérifie pas le théorème de la valeur intermédiaire, étant à valeurs rationnelles ; *a fortiori*, elle n'est pas continue (on montre même facilement que son graphe est dense dans \mathbb{R}^2 !).

1.2 a) On « élève l'hypothèse au carré » et on simplifie.

b) Si $f(0) = 0$, a) montre que $f(x) = \varepsilon x$, où $\varepsilon = f(1) = \pm 1$; le cas général s'en déduit par translation.

1.3 a) L'inégalité $\frac{u+v}{2} \geq \sqrt{uv}$ pour $u, v \in \mathbb{R}^+$ montre que $x_{n+1} \geq \sqrt{x_n \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a}$; donc $x_n \geq \sqrt{a}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, et $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2} \left(\frac{a-x_n^2}{x_n} \right) \leq 0$. (x_n) décroissante minorée par \sqrt{a} possède une limite $\ell > 0$ telle que (cf. chapitre II) $\ell = \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{a}{\ell} \right)$; d'où $(\ell - \sqrt{a})^2 = 0$ et $\ell = \sqrt{a}$.

b) $x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2} \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{x_n}$ et $x_{n+1} + \sqrt{a} = \frac{1}{2} \frac{(x_n + \sqrt{a})^2}{x_n}$, d'où $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n^2$; numériquement (cas particulier de la méthode de Newton), on double le nombre de zéros en base 10 en passant de ε_n à ε_{n+1} ($\varepsilon_n \rightarrow 0$) et on double (approximativement) le nombre de décimales exactes de \sqrt{a} quand on passe de x_n à x_{n+1} ; le test $a = 2$ est assez convaincant.

1.4 Cf. proposition IV.6, chapitre III.

1.5 a) $\sqrt{1-u} = 1 - \sum_1^{\infty} a_n u^n$ pour $-1 < u < 1$, avec $a_1 = \frac{1}{2}$ et $a_n = \frac{1.3.5 \dots (2n-3)}{2.4 \dots 2n}$

pour $n \geq 2$ (cours de L1/L2); en particulier $0 \leq \sum_1^N a_n u^n \leq 1 - \sqrt{1-u} \leq 1$ pour

$0 \leq u < 1$, et faisant tendre u vers 1 : $\sum_1^N a_n \leq 1$; la série a_n à termes positifs a ses

sommes partielles majorées, donc converge; donc $1 - \sum_1^{\infty} a_n u^n$ converge normalement

vers $\sqrt{1-u}$ sur $[-1, 1]$; avec $u = 1 - (x-a)^2 \in [-1, 1]$, on voit que la suite de

polynômes P_N , où $P_N(x) = 1 - \sum_1^N a_n (1 - (x-a)^2)^n$ converge uniformément vers

$|x-a|$ sur I ; de plus, $(x-a)^+ = \frac{1}{2} [|x-a| + (x-a)]$.

b) Par hypothèse, il y a une subdivision (a_i) avec $-1 = a_1 < \dots < a_n = 1$, telle que f est affine sur $[a_i, a_{i+1}]$, $1 \leq i \leq n-1$; pour tous $\lambda_0, \dots, \lambda_n$, $g(x) :=$

$\lambda_0 + \sum_1^n \lambda_k (x-a_k)^+$ est aussi affine sur chaque $[a_i, a_{i+1}]$, et on ajuste les λ_k pour avoir

$g(a_i) = f(a_i)$, $i = 1, \dots, n$. $g(a_1) = f(a_1)$ donne $\lambda_0 = f(a_1)$; $g(a_2) = f(a_2)$ donne

$\lambda_0 + \lambda_1(a_2 - a_1) = f(a_2)$, ce qui détermine λ_1 ; on détermine de proche en proche

$\lambda_2, \dots, \lambda_n$ et on obtient $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

c) On utilise la continuité uniforme de f sur I (cf. chapitre III) pour l'approcher par des fonctions affines par morceaux, puis on combine a) et b).

1.6 a) L'ensemble des $\mu(A_J)$ est majoré par 1, donc a une borne supérieure m ; d'après le théorème II.1, il existe pour tout n de \mathbb{N}^* une partie dénombrable $J_n \subset I$

telle que : $\mu(A_{J_n}) \geq m - \frac{1}{n}$; posons $J_0 = \bigcup_1^{\infty} J_n$; J_0 est encore une partie dénombrable

de I (cf. [HL]), donc $\mu(A_{J_0}) \leq m$; de plus $\mu(A_{J_0}) \geq \mu(A_{J_n}) \geq m - \frac{1}{n}$ pour tout n , d'où $\mu(A_{J_0}) = m$.

b) Soit $i \in I$; $J_0 \cup \{i\}$ est dénombrable et contient J_0 , d'où $\mu(A_{J_0 \cup \{i\}}) = m$; autrement dit, $\mu(A \cup A_i) = \mu(A)$, et $\mu(A_i \cap A^c) = \mu(A \cup A_i) - \mu(A) = 0$.

1.7 a) On construit les I_k sous la forme $[y_k - h_k, y_k + h_k]$, $h_k > 0$; soit n_1 avec $a_{n_1} \neq 0$; la fonction $\frac{2\pi}{|a_{n_1}|}$ périodique, $y \mapsto |e^{ia_{n_1}y} - 1|$ atteint l'ensemble $[0, 2]$ de ses

valeurs sur tout segment de longueur $\frac{2\pi}{|a_{n_1}|}$, en particulier il existe $y_1 \in]0, \frac{4\pi}{|a_{n_1}|}[$ tel

que $|e^{ia_{n_1}y_1} - 1| = 2$ et $h_1 > 0$ tel que $|e^{ia_{n_1}y} - 1| \geq 1$ si $y \in [y_1 - h_1, y_1 + h_1] = I_1$; ayant construit $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_k$ et $n_1 < \dots < n_k$, on choisit $n_{k+1} \geq 1 + n_k$ tel que

$\frac{2\pi}{|a_{n_{k+1}}|} < h_k$, et il existe de même $y_{k+1} \in]y_k - h_k, y_k + h_k[$ tel que $|e^{ia_{n_{k+1}}y_{k+1}} - 1| = 2$,

et $h_{k+1} > 0$ tel que $I_{k+1} := [y_{k+1} - h_{k+1}, y_{k+1} + h_{k+1}] \subset I_k$ et $|e^{ia_{n_{k+1}}y} - 1| \geq 1$ si $y \in I_{k+1}$; d'où le résultat.

b) D'après l'axiome des segments emboîtés, $\bigcap_k I_k$ contient un point x ; on voit que $|e^{ia_{n_k}x} - 1| \geq 1$ pour tout k , donc e^{ia_nx} ne tend pas vers 1.

1.8 a) D'après 7), (a_n) est bornée : $|a_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; fixons $x \in]0, \frac{\pi}{M}[$; alors, via l'inégalité $|\sin u| \geq \frac{2}{\pi}|u|$ pour $|u| \leq \frac{\pi}{2}$, on a : $|e^{ia_nx} - 1| = 2 \left| \sin \frac{a_nx}{2} \right| \geq \frac{2}{\pi} |a_n|x$, et il en résulte que $a_n \rightarrow 0$.

Remarque. On a une solution immédiate si on s'autorise l'emploi du théorème de convergence dominée : $\int_0^\infty e^{-(1+ia_n)x} dx \rightarrow \int_0^\infty e^{-x} dx$, autrement dit $\frac{1}{1+ia_n} \rightarrow 1$ et $a_n \rightarrow 0$.

Soit (n_k) une suite croissante d'entiers : $n_1 < n_2 < \dots < n_k < n_{k+1} \dots$; et soit $l(x) = \lim_n e^{ia_nx}$; $|l(x)| = 1$, donc $e^{i(a_{n_{k+1}} - a_{n_k})x} = \frac{e^{ia_{n_{k+1}}x}}{e^{ia_{n_k}x}} \rightarrow \frac{l(x)}{l(x)} = 1$ pour tout x , et a) entraîne $a_{n_{k+1}} - a_{n_k} \rightarrow 0$; ceci montre (cf. chapitre 5, Proposition I.3) que (a_n) est de Cauchy et converge, puisque \mathbb{R} est complet.

1.9 $|f - f_n| = 2(f - f_n)^+ - (f - f_n)$, et $\int (f - f_n) d\mu \rightarrow 0$ par hypothèse; il suffit donc de montrer que $\int (f - f_n)^+ d\mu \rightarrow 0$, et c'est là qu'on peut appliquer le théorème de convergence dominée (qui ne marche pas en général pour $|f - f_n|$); en effet, $0 \leq (f - f_n)^+ \leq f$, et $f \in L^1(\mu)$; d'autre part $(f - f_n)^+ \xrightarrow{pp} (f - f)^+ = 0$, donc le résultat s'ensuit.

1.10 On imite la preuve de la proposition II.14; $E = M \oplus \mathbb{R}x_0$, et on cherche $a = g(x_0) \in F$ tel que : $\|f(x) + ta\| \leq \|x + tx_0\|, \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in M$. Une norme étant homogène cela revient à la condition :

$$\|f(x) - a\| \leq \|x - x_0\|, \quad \forall x \in M. \tag{IV.1}$$

Or les boules $\bar{B}(f(x), \|x - x_0\|)$, où $x \in M$, se coupent deux à deux : car pour deux telles boules la distance des centres est inférieure à la somme des rayons :

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &= \|f(x - y)\| \leq \|x - y\| = \|(x - x_0) - (y - x_0)\| \\ &\leq \|x - x_0\| + \|y - x_0\|; \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse sur F , ces boules se coupent toutes : un point a de leur intersection répond à la question.

1.11 Soit $B_i = \bar{B}(x^i, r_i)$ des boules fermées de ℓ^∞ se coupant deux à deux ($i \in I$); pour chaque n , les boules projetées $p_n(B_i)$ se coupent deux à deux dans \mathbb{R} ; en effet si $\|c - x^i\| \leq r_i$ et $\|c - x^j\| \leq r_j$, on a aussi $|p_n(c) - p_n(x^i)| \leq \|c - x^i\| \leq r_i$ et $|p_n(c) - p_n(x^j)| \leq \|c - x^j\| \leq r_j$, d'où $p_n(c) \in p_n(B_i) \cap p_n(B_j)$; d'après la proposition II.13, il existe pour chaque n un $a_n \in \bigcap_i p_n(B_i)$; si $a = (a_n)$, $a \in \ell^\infty$, et $a \in \bigcap_i B_i$.

1.12 a) Distinguons deux cas exclusifs.

Cas 1 : $(\exists p) (\forall q > p) (\exists r > q) ; x_r \geq x_q$.

Alors on peut fabriquer par récurrence des entiers $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ avec $n_1 = p + 1$ et (x_{n_k}) croissante. *Cas 2* : $(\forall p) (\exists q > p) (\forall r > q) : x_r < x_q$.

Alors on peut fabriquer par récurrence des entiers $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ avec $n_1 > 1$ et $x_r < x_{n_k}$ pour tout $r > n_k$; (x_{n_k}) est strictement décroissante.

b) i) Si $x_i \neq x_j$, on a par exemple $i < j$; distinguons ensuite deux cas :

Cas 1 : $x_i < x_j$: alors (x_i, x_j) est le début d'une suite croissante, donc $a_i \geq 1 + a_j$.

Cas 2 : $x_i > x_j$: alors (x_i, x_j) est le début d'une suite décroissante, donc $b_i \geq 1 + b_j$.

Dans tous les cas, $f(x_i) \neq f(x_j)$.

ii) Si on a toujours $\max(a_i, b_i) \leq n$, f est une injection de X dans le carré d'entiers $[1, n] \times [1, n]$, et X a moins de n^2 éléments, contrairement à l'hypothèse ; donc on peut trouver i tel que $\max(a_i, b_i) \geq n + 1$;

si $a_i \geq n + 1$, on peut extraire une suite croissante de longueur $n + 1$;

si $b_i \geq n + 1$, on peut extraire une suite décroissante de longueur $n + 1$.

Sur l'exemple à n^2 termes considéré, on peut extraire au mieux une suite croissante $k, k + n, k + 2n, \dots, k + (n - 1)n$; ou une suite décroissante $kn, kn - 1, \dots, kn - n + 1$, avec $1 \leq k \leq n$.

1.13 a) $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)!}$ et $b_{n+1} - b_n = \frac{-1}{n \cdot n!(n+1)^2}$; si $k = \max(i, j)$, $a_i \leq a_k \leq b_k \leq b_j$.

b) Si $\frac{p}{q} \in \bigcap_1^\infty I_n$, on a pour tout n : $\frac{p}{q} = a_n + \frac{\theta_n}{n \cdot n!}$, où $0 < \theta_n < 1$. (En effet, $a_n < a_{n+1} \leq \frac{p}{q} \leq b_{n+1} < b_n$). En particulier : $\frac{p}{q} = a_q + \frac{\theta_q}{q \cdot q!}$; en multipliant par $q \cdot q!$, on obtient $\theta_q \in \mathbb{Z}$, ce qui est absurde : $\theta_q \in]0, 1[$. On a donc $\bigcap_1^\infty I_n = \emptyset$.

c) Si $m = \sup A$ existe dans \mathbb{Q} , on a pour tout n : $m \geq a_n$, et $m \leq b_n$, puisque b_n est un majorant de A ; donc, $m \in \bigcap_1^\infty I_n$, ce qui contredit b).

d) Soit p, q entiers avec $p < q$; a) montre que $0 \leq a_q - a_p \leq b_p - a_p = \frac{1}{p \cdot p!}$; (a_n) est donc de Cauchy ; si $a_n \rightarrow \ell \in \mathbb{Q}$, on a encore une fois la contradiction $\ell \in \bigcap_1^\infty I_n$. Bien sûr, a_n converge dans \mathbb{R} vers le célèbre nombre e , et b) est la preuve, due à Fourier, de l'irrationalité de e .

1.14 a) i) Supposons que $m \notin G^+$; alors on peut trouver $x \in G$ tel que $m < x < 2m$, puis $y \in G$ tel que $m < y < x$; $x - y \in G^+$ et $0 < x - y < m$ ce qui est absurde ; on a donc $m \in G^+$, et m est le plus petit élément > 0 de G ; soit maintenant $x \in G^+$; par l'axiome 3, on peut trouver $p \in \mathbb{N}$ tel que $pm \leq x < (p + 1)m$. Alors $x - pm$ est un élément ≥ 0 de G vérifiant $x - pm < m$, d'où $x - pm = 0$ et $x \in m\mathbb{Z}$; on en déduit $G = m\mathbb{Z}$.

ii) On peut trouver $x \in G$ tel que $0 < x < b - a$, et $n \in \mathbb{Z}$ tel que $(n - 1)x \leq a < nx$; alors $nx = (n - 1)x + x < a + b - a = b$, et $nx \in G \cap]a, b[$.

b) D'après a), si $\mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}n$ n'est pas dense dans \mathbb{R} , il existe $m > 0$ tel que $\mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}n = m\mathbb{Z}$; en particulier, il existe $p, q \in \mathbb{Z}^*$ tels que $\alpha = pm$ et $1 = qm$; d'où $\alpha = \frac{p}{q}$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

1.15 Supposons que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p, q premiers entre eux ; $p^2 = 2q^2$, donc p est pair : $p = 2p'$; puis $q^2 = 2p'^2$, donc q est pair lui aussi, ce qui est absurde.

Remarque II.15. Voici comment montrer l'assertion b) de l'exercice 1.1 ; si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie l'équation fonctionnelle de cet exercice et de plus est mesurable Lebesgue, soit $A = \{x; f(x) \leq 0\}$ et m la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} ; $A \cup -A = \mathbb{R}$, donc $m(A) > 0$, et $A + A = A$ contient un intervalle $[a - h, a + h]$, avec $h > 0$ (voir exercice 1.16 qui suit) ; on en déduit que $|f(x)| \leq |f(a)| = M$ si $|x| \leq h$. Plus précisément, si $2^{n-1}h < |x| \leq 2^n h$, avec $n \in \mathbb{Z}$, on a $2^{-n}|f(x)| = |f(2^{-n}x)| \leq M$, d'où $|f(x)| \leq M2^n \leq \frac{2M|x|}{h}$, puis $|f(x) - f(y)| \leq \frac{2M}{h}|x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

On en déduit que f est continue sur \mathbb{R} . Ainsi, les solutions discontinues de l'équation fonctionnelle sont automatiquement non mesurables-Lebesgue.

1.16 a) Si $A_N = A \cap \{x; \|x\| \leq N\}$, $B_N = B \cap \{x; \|x\| \leq N\}$, on a $m(A_N) < \infty$, $m(B_N) < \infty$, et $m(A_N) \uparrow m(A)$, $m(B_N) \uparrow m(B)$. On peut donc trouver un entier N tel que $0 < m(A_N) < \infty$ et $0 < m(B_N) < \infty$.

Si l'on est capable de trouver $\Omega \subset A_N + B_N$, on aura a fortiori $\Omega \subset A + B$.

b) u est continue, comme convolution d'une fonction de L^1 et d'une fonction de L^∞ (cours d'intégration). Si $\widehat{\varphi}$ désigne la transformée de Fourier d'une fonction $\varphi \in L^1$, on a : $\widehat{w} = \widehat{u} \widehat{v}$, en particulier $\widehat{w}(0) = \int w(x)dx = \widehat{u}(0) \widehat{v}(0) = m(A)m(B) > 0$. Donc, w n'est pas identiquement nulle.

c) Soit $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n ; w(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n ; w(x) > 0\}$. L'ensemble Ω est non-vidé d'après b). Il est ouvert car w est continue.

d) Soit $x \in \Omega$. On a $w(x) = \int_{\mathbb{R}^n} 1_A(x - y)1_B(y)dy > 0$, donc il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $1_A(x - y) \neq 0$ et $1_B(y) \neq 0$. On a alors $x - y \in A$, $y \in B$ et $x = (x - y) + y \in A + B$.

1.17 a) Si $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{q^n} \in K$, on a $0 \leq x \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q-1}{q^n} = 1$. Notons ensuite que tout $x \in [0, 1]$ s'écrit de façon (presque) unique $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{q^n}$ avec $\varepsilon_n \in A$. Et la suite (ε_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes (pour la mesure de Lebesgue m sur $[0, 1]$) équidistribuées avec $m(X_n = j) = 1/q$, $0 \leq j \leq q-1$. On a clairement $K \subset \{\varepsilon_j \neq p, 1 \leq j \leq N\}$ pour tout entier N , donc par indépendance

$$m(K) \leq m\left(\bigcap_{j=1}^N \{\varepsilon_j \neq p\}\right) = \prod_{j=1}^N m(\varepsilon_j \neq p) = \left(\frac{q-1}{q}\right)^N.$$

En faisant tendre N vers l'infini, on obtient bien $m(K) = 0$.

b) Il n'y a qu'à définir (notant que $p+1 \leq q-1$)

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon' = \alpha \text{ si } \alpha \neq p. \\ \varepsilon &= p-1, \varepsilon' = p+1 \text{ si } \alpha = p. \end{aligned}$$

c) Soit $z \in [0, 2]$. Alors $\frac{z}{2} \in [0, 1]$. Écrivons en base q un développement $\frac{z}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{q^n}$ avec $\alpha_n \in A$, soit $z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha_n}{q^n}$. Pour chaque n , d'après b), on peut trouver $\varepsilon_n, \varepsilon'_n \in B$ tels que $2\alpha_n = \varepsilon_n + \varepsilon'_n$. Soit $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{q^n}$ et $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon'_n}{q^n}$. Alors, $x, y \in K$ et $z = x + y$.