

Daniel FREDON | Lionel PORCHERON  
Magali DÉCOMBE VASSET | Didier MAGLOIRE | Jean-Michel SARLAT

# FORMULAIRE

PCSI-PTSI-PC-PSI-PT

*l'intégrale*

7<sup>e</sup> édition

DUNOD

Collaboration technique : Thomas Fredon,  
ingénieur Télécom Bretagne

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1<sup>er</sup> juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du

Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 2020

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

[www.dunod.com](http://www.dunod.com)

ISBN 978-2-10-080992-9

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2<sup>o</sup> et 3<sup>o</sup> a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

# Table des matières

Avant-propos	9
<b>Mathématiques</b>	<b>10</b>
<b>1. Analyse</b>	<b>10</b>
1.1 Les nombres réels	10
1.2 Continuité	10
1.3 Dérivation	11
1.4 Suites numériques	12
1.5 Intégration	13
1.6 Développements limités	18
1.7 Équations différentielles	19
1.8 Espaces vectoriels normés	22
1.9 Séries numériques	23
1.10 Suites et séries de fonctions	25
1.11 Calcul différentiel	29
<b>2. Algèbre générale</b>	<b>31</b>
2.1 Ensembles et applications	31
2.2 Relations	32
2.3 Calculs algébriques	33
2.4 Nombres complexes	34
2.5 Arithmétique	35
2.6 Polynômes	36
<b>3. Algèbre linéaire et multilinéaire</b>	<b>37</b>
3.1 Espaces vectoriels	37
3.2 Applications linéaires	41
3.3 Matrices, déterminants	42
3.4 Réduction des endomorphismes	46
3.5 Espaces vectoriels euclidiens	48

## 4 Table des matières

<b>4. Calcul des probabilités</b>	51
4.1 Événements et probabilités	51
4.2 Variables aléatoires	54
<b>Informatique</b>	61
<b>1. Environnement informatique</b>	61
<b>2. Algorithmique</b>	62
<b>3. Programmation en Python</b>	63
3.1 Généralités	63
3.2 Méthodes numériques	66
3.3 Algorithmique avancée	67
<b>4. Bases de données</b>	69
<b>Physique</b>	73
<b>1. Étude du signal</b>	73
1.1 Oscillateur harmonique non amorti (ressort horizontal)	73
1.2 Propagation du signal	74
1.3 Circuits électriques	78
<b>2. Optique</b>	86
2.1 Optique géométrique	86
2.2 Modèle scalaire des ondes lumineuses (PC)	88
2.3 Déphasage et chemin optique (PC)	90
2.4 Les sources lumineuses (PC)	92
2.5 Les détecteurs de lumière (PC)	93
2.6 Superpositions d'ondes lumineuses (PC)	95
2.7 Interférences (PC)	97
<b>3. Mécanique</b>	99
3.1 Cinématique d'un point	99
3.2 Cinématique d'un solide	101
3.3 Dynamique du point - étude énergétique	102
3.4 Dynamique de particules chargées	106
3.5 Dynamique du solide - étude énergétique	107
3.6 Mouvement dans un champ de force centrale conservative	110
3.7 Référentiels non galiléens - Cinématique (PC)	114
3.8 Référentiels non galiléens - Dynamique (PC)	116
3.9 Lois de Coulomb du frottement solide (PC)	118

<b>4. Thermodynamique</b>	120
4.1 Description d'un système à l'équilibre	120
4.2 Changement d'état d'un corps pur	121
4.3 Travail, transfert thermique et transformations	123
4.4 Premier et second principes	124
4.5 Machines thermiques	126
4.6 Systèmes ouverts en régime stationnaire	128
4.7 Diffusion de particules	130
4.8 Diffusion thermique	133
<b>5. Statique des fluides</b>	139
<b>6. Mécanique des fluides</b>	141
6.1 Description d'un fluide en mouvement	141
6.2 Bilan de masse	142
6.3 Actions de contact dans un fluide en mouvement	143
6.4 Dynamique des fluides	146
6.5 Bilans macroscopiques	147
<b>7. Électromagnétisme</b>	149
7.1 Action d'un champ magnétique	149
7.2 Induction, auto-induction et couplage	151
7.3 Conversion de puissance électromécanique	154
7.4 Transport de charge électrique	155
7.5 Champs électrostatiques	158
7.6 Propriétés du champ électrostatique	162
7.7 Champs électrostatiques de distributions particulières	164
7.8 Analogie pour le champ de gravitation	167
7.9 Dipôles électriques	168
7.10 Champ magnétostatique	171
7.11 Calcul de champs magnétostatiques	173
7.12 Les équations de Maxwell	175
7.13 L'approximation des régimes quasi stationnaires	176
<b>8. Dipôles magnétiques</b>	177
8.1 Moment magnétique, champ, actions	177
8.2 Matière aimantée	179
<b>9. Électronique (PSI)</b>	180
9.1 Stabilité des systèmes linéaires	180
9.2 L'amplificateur linéaire intégré et la rétroaction	181
9.3 L'A.L.I. et la réaction positive	185

## 6 Table des matières

9.4 Les oscillateurs	187
9.5 L'échantillonnage	190
9.6 Filtrage numérique du signal	191
9.7 Introduction à la transmission des signaux	193

## 10. Milieux ferromagnétiques (PSI) 195

10.1 Description	195
10.2 Circuits magnétiques	197

## 11. Conversions de puissance (PSI) 199

11.1 Conversion statique	199
11.2 Conversion électro-mécanique	202

## 12. Ondes électromagnétiques 206

12.1 Les équations de propagation des champs	206
12.2 Énergie du champ électromagnétique	207
12.3 Le champ électromagnétique dans le vide sans charges ni courants électriques	208
12.4 Propagation du champ électromagnétique dans un plasma	209
12.5 Champ électromagnétique dans le plasma	211
12.6 Propagation du champ électromagnétique en présence d'un milieu conducteur ohmique	212

## 13. Ondes mécaniques 216

13.1 Ondes sur les cordes	216
13.2 Ondes acoustiques	217

## 14. Mécanique quantique 220

14.1 Premières notions	220
14.2 Physique du laser (PC)	221
14.3 Mécanique quantique (PC)	223

## Chimie 228

### 1. Thermodynamique 228

1.1 États de la matière	228
1.2 Description d'un système physico-chimique	230
1.3 Étude thermodynamique d'une transformation	232
1.4 Diagrammes binaires (PSI)	234
1.5 Application du premier principe à la transformation chimique	237
1.6 Application du second principe à la transformation chimique	238

<b>2. Cinétique</b>	243
2.1 Cinétique formelle	243
2.2 Mécanismes réactionnels	246
2.3 Cinétique en réacteur ouvert	247
<b>3. Architecture de la matière</b>	249
3.1 Classification périodique des éléments	249
3.2 Édifices chimiques	252
3.3 Modélisation quantique et réactivité	256
<b>4. État solide</b>	258
4.1 Modèle du cristal parfait	258
4.2 Types de cristaux	260
<b>5. Solutions aqueuses</b>	261
5.1 Réaction d'oxydo-réduction	261
5.2 Réaction acido-basique	263
5.3 Réaction de complexion	265
5.4 Réaction de précipitation	266
5.5 Diagrammes potentiel-pH	267
<b>6. Électrochimie</b>	268
6.1 Thermodynamique de l'oxydo-réduction (PC)	268
6.2 Cinétique de l'oxydo-réduction	269
6.3 Corrosion (PSI)	271
6.4 Conversion et stockage d'énergie (PSI)	272
<b>7. Chimie organique</b>	273
7.1 Description des molécules organiques	273
7.2 Polarimétrie et spectroscopie	276
7.3 Contrôle et sélectivité	278
7.4 Mécanismes en chimie organique	280
7.5 Stratégie de synthèse	286
7.6 Activation des alcools, phénols et composés carbonylés (PC)	286
7.7 Activation des acides carboxyliques (PC)	291
7.8 Protection et déprotection de fonction	294
7.9 Oxydo-réduction en chimie organique	295
7.10 Création de liaisons carbone-carbone	299
7.11 Matériaux organiques polymères (PC)	305

<b>Annexe A : Formulaire de trigonométrie</b>	307
1. Angles associés	307
2. Formules d'addition	307
3. Formules de duplication	307
4. Formules de linéarisation	308
5. Transformation de sommes en produits	308
6. Expressions en fonction de $\tan \frac{a}{2}$	308
7. Équations trigonométriques	308
<b>Annexe B : Champs scalaires - champs vectoriels</b>	309
1. Coordonnées cartésiennes	309
2. Propriétés	309
3. Coordonnées cylindriques	310
4. Coordonnées sphériques	311
<b>Annexe C : Unités et constantes fondamentales</b>	312
1. Unités du système international	312
2. Constantes fondamentales	313
3. Ordres de grandeur	314
<b>Annexe D : Séries de Fourier des signaux classiques</b>	315
1. Signal 1 : rampe	315
2. Signal 2 : triangle	315
3. Signal 3 : sinus redressé (double alternance)	315
4. Signal 4 : sinus redressé (monoalternance)	315
5. Signal 5 : porte	316
6. Signal 6 : impulsion	316
<b>Annexe E : Constantes chimiques</b>	317
1. Constantes acido-basiques	317
2. Potentiels standards rédox	318
3. Zone de virage des principaux indicateurs colorés	319
<b>Annexe F : Classification périodique</b>	321
<b>Index des mathématiques</b>	324
<b>Index de la physique</b>	327
<b>Index de la chimie</b>	333



# Avant-propos

Ce formulaire, dont voici la septième édition corrigée, s'adresse aux étudiants de PCSI, puis de PC ou PSI. Mais il sera aussi utile à la filière PTSI-PT : il ne manque que la thermodynamique industrielle.

Pour chaque item, vous trouverez :

- la mention **①** ou **②** qui indique si c'est une notion de première année ou de deuxième année ;
- parfois la mention **PC** ou **PSI** pour indiquer une notion réservée à une seule section.

Le livre est scindé en quatre parties : mathématiques, informatique, physique, chimie. Dans chaque partie, vous trouverez l'essentiel du cours, les principaux résultats étant mis en valeur par un support tramé.

À la fin, un index très détaillé vous permettra d'accéder très vite à la notion que vous voulez réviser.

Des annexes font le bilan d'informations essentielles et parfois dispersées dans votre cours.

Ce livre est un outil pédagogique adapté aux révisions rapides avant un devoir. C'est aussi un puissant remède contre l'anxiété du trou de mémoire. C'est en quelque sorte un anxiolytique sans risque sanitaire. Mais vous risquez l'accoutumance : quand vous aurez commencé à vous servir de ce livre, vous ne pourrez plus vous en passer, surtout à l'approche des concours (qui portent sur les deux années de prépa, ne l'oubliez pas).

Un grand merci à Thomas Fredon et Roger Faure pour leur soutien technique indispensable et à Matthieu Daniel, puis Jean-Luc Blanc et Brice Martin, pour la réalisation finale. Merci à Alexis Brès et Léo Quentin pour la relecture et les corrections apportées à cette nouvelle édition.

# Mathématiques

## 1. Analyse

### 1.1 Les nombres réels

#### ① Parties denses dans $\mathbb{R}$

Une partie  $A$  est dense dans  $\mathbb{R}$  si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide.

Une partie  $A$  est dense dans  $\mathbb{R}$  si tout réel est limite d'une suite d'éléments de  $A$ .

#### ① Borne supérieure

La borne supérieure de  $A$  est le plus petit élément (s'il existe) de l'ensemble des majorants de  $A$ .

$M = \sup A$  si :

$$\forall x \in A \quad x \leq M,$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad M - \varepsilon < x.$$

### 1.2 Continuité

#### ① Continuité : définition

$f$  est continue en  $a$  si elle est définie en  $a$  et si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

#### ① Théorème des valeurs intermédiaires

Si  $f$  est continue, pour tout  $y$  tel que  $f(a) < y < f(b)$ , il existe  $c$  tel que  $y = f(c)$ .

En particulier, si une fonction  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , et si  $f(a)$  et  $f(b)$  sont de signes contraires, l'équation  $f(x) = 0$  admet au moins une solution dans  $[a, b]$ .

#### ① Continuité sur un segment

Toute fonction à valeurs réelles continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

L'image d'un segment par une fonction à valeurs réelles continue est un segment.

### 1.3 Dérivation

#### 1 Dérivée en un point

Soit  $f$  une fonction définie sur  $D$  et  $x_0$  un élément de  $D$  tel que  $f$  soit définie au voisinage de  $x_0$ . On appelle dérivée de  $f$  au point  $x_0$  le nombre (lorsqu'il existe) :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

#### 1 Dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$x^n$ ( $n \neq 0$ )	$nx^{n-1}$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$e^x$	$e^x$	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

#### 1 Dérivée d'une fonction réciproque

La fonction réciproque  $f^{-1}$  est dérivable en  $f(x_0)$  et

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

$f$  est strictement monotone sur  $I$ , dérivable en  $f(x_0)$  et  $f'(x_0) \neq 0$ .

#### 1 Théorème de Rolle

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$ , et telle que  $f(a) = f(b)$ .

Alors il existe au moins un point  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

### ① Égalité des accroissements finis

Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ , il existe au moins un point  $c \in ]a, b[$  tel que :

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Ce théorème ne se prolonge pas aux fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ .

### ① Inégalité des accroissements finis

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$ .

Si  $m \leq f' \leq M$ , alors :

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a).$$

En particulier, si  $|f'| \leq K$ , alors, pour tous  $x$  et  $x'$  de  $]a, b[$ ,

$$|f(x) - f(x')| \leq K|x - x'|.$$

### ① Limite de la dérivée

Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$ , et si  $f'$  a une limite finie  $l$  en  $a$ , alors  $f$  est dérivable à droite en  $a$  et son nombre dérivé à droite en  $a$  vaut  $f'_d(a) = l$ .

Attention, il s'agit d'une condition suffisante de dérivabilité, mais elle n'est pas nécessaire. Il peut arriver que  $f'_d(a)$  existe sans que  $f'$  ait une limite en  $a$ .

## 1.4 Suites numériques

### ① Suite convergente

La suite  $(u_n)$  est convergente vers  $l$  si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0$$

$$|u_n - l| \leq \varepsilon.$$

Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Lorsqu'elle existe, la limite d'une suite est unique.

### ① Théorème d'encadrement

Si, à partir d'un certain rang,  $u_n \leq x_n \leq v_n$ , et si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent vers la même limite  $l$ , alors la suite  $(x_n)$  est convergente vers  $l$ .

**1 Suite extraite**

La suite  $(v_n)$  est extraite de la suite  $(u_n)$  s'il existe une application  $\varphi$  de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ , strictement croissante, telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$ .

On dit aussi que  $(v_n)$  est une sous-suite de  $(u_n)$ .

Si une suite possède une limite (finie ou infinie), toute sous-suite possède la même limite.

**1 Théorème de la limite monotone**

Toute suite de réels croissante et majorée est convergente.

Toute suite de réels décroissante et minorée est convergente.

Si une suite est croissante et non majorée, elle diverge vers  $+\infty$ .

Si une suite est décroissante et non minorée, elle diverge vers  $-\infty$ .

**1 Suites adjacentes**

$(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes si :

$(u_n)$  est croissante ;

$(v_n)$  est décroissante ;

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0.$$

Si deux suites sont adjacentes, elles convergent et ont la même limite.

Variante

Si  $(u_n)$  croissante,  $(v_n)$  décroissante et  $u_n \leq v_n$  pour tout  $n$ , alors elles convergent vers  $l_1$  et  $l_2$ . Il reste à montrer que  $l_1 = l_2$  pour qu'elles soient adjacentes.

**1.5 Intégration**

**1 Valeur absolue**

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

**1 Intégrales et ordre**

- Si  $a < b$ , et si  $f \leq g$  sur  $[a, b]$ , alors :  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ .

## 14 [1] Mathématiques

- Si  $f$  est continue et positive sur  $[a, b]$ , on a :

$$\int_a^b f(x) dx = 0 \iff \forall x \in [a, b] \quad f(x) = 0.$$

### 1 Inégalité de la moyenne

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \times \int_a^b |g(x)| dx.$$

### 1 Sommes de Riemann

Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Les sommes de Riemann, dont on considère la limite, sont des sommes d'aires de rectangles.

### 1 Intégration par parties

$$\begin{aligned} \int_a^b u'(t) v(t) dt \\ = [u(t) v(t)]_a^b - \int_a^b u(t) v'(t) dt. \end{aligned}$$

$u$  et  $v$  sont deux fonctions de classe  $C^1$  sur un intervalle  $I$ , et  $a$  et  $b$  des réels de  $I$ .

### 1 Intégration par changement de variable

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(u(t)) u'(t) dt = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x) dx.$$

$u$  de classe  $C^1$  de  $[\alpha, \beta]$  dans  $[a, b]$ , et  $f$  continue sur  $[a, b]$ .

### 1 Formule de Taylor avec reste intégral

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^{n+1}$  sur  $I$ ,  $x_0$  et  $x$  des points de  $I$ . On a :

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

$$\text{où } P_n(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

est l'approximation de Taylor à l'ordre  $n$  ;

et  $R_n(x) = \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$  est le reste intégral d'ordre  $n$ .

②

### Fonction intégrable

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt$  existe

$\int_a^{+\infty} f(t) dt$  converge

$\int_a^{+\infty} |f(t)| dt$  converge

$f$  intégrable sur  $[a, +\infty[$

$\int_a^b |f(t)| dt$  converge

$f$  intégrable sur  $[a, b[$

②

### Règles d'intégrabilité (fonctions positives)

• Comparaison

Supposons  $0 \leq f \leq g$  sur  $[a, +\infty[$ .

- Si  $g$  est intégrable sur  $[a, +\infty[$ , alors  $f$  est intégrable sur  $[a, +\infty[$ .
- Si  $f$  n'est pas intégrable sur  $[a, +\infty[$ , alors  $g$  n'est pas intégrable sur  $[a, +\infty[$ .

• Domination

Si  $f(x) = O(g(x))$ , l'intégrabilité de  $g$  sur  $[a, +\infty[$  implique celle de  $f$ .

• Équivalence

Si  $f(x) \sim_{+\infty} g(x)$ , l'intégrabilité de  $g$  sur  $[a, +\infty[$  équivaut à celle de  $f$ .

②

### Situations de référence

- Pour  $a > 0$ ,  $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$  intégrable sur  $[a, +\infty[ \iff \alpha > 1$ .
- Pour  $\alpha > 0$ ,  $x \mapsto e^{-\alpha x}$  intégrable sur  $[0, +\infty[$ .
- $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$  intégrable sur  $]0, a] \iff \alpha < 1$ .
- $x \mapsto \ln x$  intégrable sur  $]0, 1]$ .

## ② Théorème de convergence dominée

$(f_n)$  fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , continues par morceaux sur  $I$ .

$(f_n)$  converge simplement sur  $I$  vers  $f$  continue par morceaux sur  $I$ ,

il existe une fonction  $g$  continue par morceaux sur  $I$ , positive et intégrable sur  $I$ , telle que pour tout entier  $n$ , on ait  $|f_n| \leq g$  (hypothèse de domination),

$\Rightarrow$  les fonctions  $f_n$  et  $f$  sont intégrables sur  $I$  et

$$\int_I f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n.$$

## ② Théorème d'intégration terme à terme

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes, continues par morceaux et intégrables sur  $I$ , telle que la série  $\sum f_n$  converge simplement

vers  $f$  continue par morceaux sur  $I$  et telle que la série  $\sum \int_I |f_n|$  converge.

$\Rightarrow f$  est intégrable sur  $I$  et

$$\int_I \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n.$$

## ② Intégrales à paramètre (existence et continuité)

On considère  $I$  et  $J$  des intervalles de  $\mathbb{R}$ ,

$f$  une fonction définie sur  $J \times I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

On suppose :

- $f$  continue par rapport à la première variable, continue par morceaux par rapport à la seconde.
- Il existe une fonction  $\varphi$ , intégrable sur  $I$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , telle que, pour tout  $x$  de  $J$ , on ait  $|f(x, \cdot)| \leq \varphi$ , c'est-à-dire :

$$\forall x \in J \quad \forall t \in I \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t).$$

Alors la fonction  $x \mapsto g(x) = \int_I f(x, t) dt$  est définie et continue sur  $J$ .



## ② Intégrales à paramètre (dérivabilité)

Soit  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction définie sur  $J \times I$ , avec :

- $f$  continue par morceaux par rapport à la seconde variable,
- pour tout  $x$  de  $J$ ,  $t \mapsto f(x, t)$  intégrable sur  $I$ ,
- $\frac{\partial f}{\partial x}$  est définie sur  $J \times I$ , continue par rapport à la première variable, continue par morceaux par rapport à la seconde.
- il existe une fonction  $\varphi$  intégrable sur  $I$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  telle que, pour tout  $x$  de  $J$ ,  $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot) \right| \leq \varphi$ .

Alors la fonction  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $J$  et vérifie :

$$\forall x \in J \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

## ② Transformation de Laplace

$$\mathcal{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

pour  $\text{Re}(p) > a$

$f$  fonction causale, soit  $f(t) = 0$   
pour  $t < 0$   
 $a$  abscisse d'intégrabilité de  $f$

## ② Propriétés de la transformation de Laplace

Linéarité

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2](p) \\ = \lambda_1 \mathcal{L}[f_1](p) + \lambda_2 \mathcal{L}[f_2](p). \end{aligned}$$

Retard sur la fonction

$$\mathcal{L}[f(t - t_0)](p) = e^{-t_0 p} \mathcal{L}[f](p).$$

Théorème de la valeur initiale

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \mathcal{L}[f](x) = f(0^+).$$

Changement d'échelle

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(kt)](p) &= \frac{1}{k} \mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{p}{k}\right) \\ k &> 0. \end{aligned}$$

Retard sur la transformée

$$\mathcal{L}[f](p - p_0) = \mathcal{L}[e^{p_0 t} f(t)](p)$$

Théorème de la valeur finale

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \mathcal{L}[f](x) = l.$$