

FORMULAIRE

MPSI-MP-PSI

Daniel FREDON | Lionel PORCHERON

Magali DÉCOMBE VASSET | Didier MAGLOIRE | Jean-Michel SARLAT

FORMULAIRE

MPSI-MP-PSI

l'intégrale

7^e édition

DUNOD

Collaboration technique : Thomas Fredon,
ingénieur Télécom Bretagne

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du

Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 2020

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-080971-4

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^o et 3^o a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Avant-propos	11
Mathématiques	12
1. Analyse	12
1.1 Les nombres réels	12
1.2 Continuité	12
1.3 Dérivation	13
1.4 Suites numériques	15
1.5 Intégration	16
1.6 Développements limités	20
1.7 Équations différentielles	22
1.8 Espaces vectoriels normés	26
1.9 Séries numériques	29
1.10 Suites et séries de fonctions	32
1.11 Calcul différentiel	36
2. Algèbre générale	38
2.1 Ensembles et applications	38
2.2 Relations	39
2.3 Calculs algébriques	40
2.4 Nombres complexes	41
2.5 Structures algébriques	42
2.6 Arithmétique	46
2.7 Polynômes	49
3. Algèbre linéaire et multilinéaire	52
3.1 Espaces vectoriels	52
3.2 Applications linéaires	56
3.3 Matrices, déterminants	58
3.4 Réduction des endomorphismes	61
3.5 Espaces vectoriels euclidiens	63

6 Table des matières

4. Calcul des probabilités	68
4.1 Événements et probabilités	68
4.2 Variables aléatoires	71
Informatique	77
1. Environnement informatique	77
2. Algorithmique	78
3. Programmation en Python	79
3.1 Généralités	79
3.2 Méthodes numériques	82
3.3 Algorithmique avancée	83
4. Bases de données	85
Physique	89
1. Étude du signal	89
1.1 Oscillateur harmonique non amorti (ressort horizontal)	89
1.2 Propagation du signal	90
1.3 Circuits électriques	93
2. Électronique	102
2.1 Stabilité des systèmes linéaires (PSI)	102
2.2 L'amplificateur linéaire intégré et la rétroaction (PSI)	103
2.3 L'A.L.I. et la réaction positive (PSI)	106
2.4 Les oscillateurs (PSI)	109
2.5 L'échantillonnage	111
2.6 Filtrage numérique du signal	113
2.7 Introduction à la transmission des signaux	114
3. Optique	116
3.1 Optique géométrique	116
3.2 Modèle scalaire des ondes lumineuses (MP)	118
3.3 Déphasage et chemin optique (MP)	120
3.4 Les sources lumineuses (MP)	122
3.5 Les détecteurs de lumière (MP)	123
3.6 Superpositions d'ondes lumineuses (MP)	125
3.7 Interférences(MP)	127

4. Mécanique	128
4.1 Cinématique d'un point	128
4.2 Cinématique d'un solide	131
4.3 Dynamique du point - étude énergétique	132
4.4 Dynamique de particules chargées	136
4.5 Dynamique du solide - étude énergétique	137
4.6 Mouvement dans un champ de force centrale conservative	140
4.7 Référentiels non galiléens - cinématique (MP)	143
4.8 Référentiels non galiléens - dynamique (MP)	145
4.9 Lois de Coulomb du frottement solide (MP)	147
5. Mécanique des fluides (PSI)	148
5.1 Fluides en écoulement	148
5.2 Écoulement incompressible et homogène	149
5.3 Bilans macroscopiques	152
6. Thermodynamique	153
6.1 Description d'un système à l'équilibre	153
6.2 Changement d'état d'un corps pur	154
6.3 Travail, transfert thermique et transformations	155
6.4 Premier et second principes	157
6.5 Machines thermiques	159
6.6 Systèmes ouverts	161
7. Statique des fluides	162
8. Électromagnétisme	165
8.1 Action d'un champ magnétique	165
8.2 Induction, auto-induction et couplage	166
8.3 Conversion de puissance électromécanique	168
8.4 Conservation de la charge électrique	169
8.5 Distributions de charge et champ électrostatique	172
8.6 Équations de Maxwell dans le vide	174
8.7 Propriétés du champ électrostatique	175
8.8 Champs électrostatiques de distributions particulières	178
8.9 Analogie pour le champ de gravitation	179
8.10 Dipôles électriques (MP)	181
8.11 Champs magnétostatiques	183
8.12 Dipôles magnétiques	187
8.13 L'approximation des régimes quasi stationnaires	189

8 Table des matières

9. Milieux ferromagnétiques (PSI)	190
9.1 Description	190
9.2 Circuits magnétiques	192
10. Ondes électromagnétiques	194
10.1 Les équations de propagation des champs	194
10.2 Énergie du champ électromagnétique	195
10.3 Le champ électromagnétique dans le vide sans charges ni courants électriques	196
10.4 Propagation du champ électromagnétique dans un plasma	197
10.5 Champ électromagnétique dans le plasma	199
10.6 Propagation du champ électromagnétique en présence d'un milieu conducteur ohmique	200
11. Ondes mécaniques (PSI)	203
11.1 Ondes sur une corde	203
11.2 Ondes acoustiques	205
12. Mécanique quantique (MP)	208
13. Éléments de physique statistique (MP)	213
13.1 Le facteur de Boltzmann	213
13.2 Statistique sur le système	214
13.3 Équipartition de l'énergie	215
14. Conversions de puissances (PSI)	218
14.1 Conversion statique	218
14.2 Conversion électro-mécanique	220
Chimie	225
1. Thermodynamique	225
1.1 États de la matière	225
1.2 Description d'un système physico-chimique	227
1.3 Étude thermodynamique d'une transformation	229
1.4 Diagrammes binaires (PSI)	231
1.5 Application du premier principe à la transformation chimique	233
1.6 Application du second principe à la transformation chimique	234
2. Cinétique	237
2.1 Cinétique formelle	237
2.2 Mécanismes réactionnels	241

3. Architecture de la matière	242
3.1 Classification périodique des éléments	242
3.2 Édifices chimiques	245
4. État solide	248
4.1 Modèle du cristal parfait	248
4.2 Types de cristaux	250
5. Solutions aqueuses	251
5.1 Réaction d'oxydo-réduction	251
5.2 Réaction acido-basique	254
5.3 Réaction de complexion	255
5.4 Réaction de précipitation	257
5.5 Diagrammes potentiel-pH et potentiel-pL	258
6. Électrochimie	258
6.1 Courbes courant - potentiel	258
6.2 Corrosion	260
6.3 Conversion et stockage d'énergie	261
Annexe A : Formulaire de trigonométrie	262
1. Angles associés	262
2. Formules d'addition	262
3. Formules de duplication	262
4. Formules de linéarisation	263
5. Transformation de sommes en produits	263
6. Expressions en fonction de $t = \tan \frac{a}{2}$	263
7. Équations trigonométriques	263
Annexe B : Champs scalaires - champs vectoriels	265
1. Coordonnées cartésiennes	265
2. Propriétés	265
3. Coordonnées cylindriques	266
4. Coordonnées sphériques	267

Annexe C : Unités et constantes fondamentales	268
1. Unités du système international	268
2. Constantes fondamentales	269
3. Ordres de grandeur	270
Annexe D : Séries de Fourier des signaux classiques	271
1. Signal 1 : rampe	271
2. Signal 2 : triangle	271
3. Signal 3 : sinus redressé (double alternance)	271
4. Signal 4 : sinus redressé (monoalternance)	271
5. Signal 5 : porte	272
6. Signal 6 : impulsion	272
Annexe E : Classification périodique	273
Annexe F : Constantes chimiques	276
1. Constantes acido-basiques	276
2. Potentiels standards rédox	277
3. Zone de virage des principaux indicateurs colorés	278
Index des mathématiques	279
Index de la physique	282
Index de la chimie	287

Avant-propos

Ce formulaire, dont voici la septième édition corrigée, s'adresse aux étudiants de MPSI, puis de MP ou PSI. Pour chaque item, vous trouverez :

– la mention ❶ ou ❷ qui indique si c'est une notion de première année ou de deuxième année ;

– parfois la mention MP ou PSI pour indiquer une notion réservée à une seule section.

Le livre est scindé en quatre parties : mathématiques, informatique, physique, chimie. Dans chaque partie, vous trouverez l'essentiel du cours, les principaux résultats étant mis en valeur par un support tramé.

À la fin, un index très détaillé vous permettra d'accéder très vite à la notion que vous voulez réviser.

Des annexes font le bilan d'informations essentielles et parfois dispersées dans votre cours.

Ce livre est un outil pédagogique adapté aux révisions rapides avant un devoir. C'est aussi un puissant remède contre l'anxiété du trou de mémoire. C'est en quelque sorte un anxiolytique sans risque sanitaire. Mais vous risquez l'accoutumance : quand vous aurez commencé à vous servir de ce livre, vous ne pourrez plus vous en passer, surtout à l'approche des concours (qui portent sur les deux années de prépas, ne l'oubliez pas).

Un grand merci à Thomas Fredon et Roger Faure pour leur soutien technique indispensable et à Matthieu Daniel, puis à Jean-Luc Blanc et Brice Martin, pour la réalisation finale. Merci à Alexis Brès et Léo Quentin pour la relecture et les corrections apportées à cette nouvelle édition.

Mathématiques

1. Analyse

1.1 Les nombres réels

① Parties denses dans \mathbb{R}

Une partie A est dense dans \mathbb{R} si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide.

Une partie A est dense dans \mathbb{R} si tout réel est limite d'une suite d'éléments de A .

① Borne supérieure

La borne supérieure de A est le plus petit élément (s'il existe) de l'ensemble des majorants de A .

$M = \sup A$ si :

$$\forall x \in A \quad x \leq M,$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad M - \varepsilon < x.$$

1.2 Continuité

① Continuité : définition

f est continue en a si elle est définie en a et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

① Théorème des valeurs intermédiaires

Si f est continue, pour tout y tel que $f(a) < y < f(b)$, il existe c tel que $y = f(c)$.

En particulier, si une fonction f est continue sur $[a, b]$, et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a, b]$.

① Continuité sur un segment

Toute fonction à valeurs réelles continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

L'image d'un segment par une fonction à valeurs réelles continue est un segment.

1.3 Dérivation

1 Dérivée en un point

Soit f une fonction définie sur D et x_0 un élément de D tel que f soit définie au voisinage de x_0 . On appelle dérivée de f au point x_0 le nombre (lorsqu'il existe) :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

1 Dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$x^n \ (n \neq 0)$	nx^{n-1}	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	e^x	e^x	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

1 Dérivée d'une fonction réciproque

La fonction réciproque f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

f est strictement monotone sur I , dérivable en $f(x_0)$ et $f'(x_0) \neq 0$.

1 Théorème de Rolle

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et telle que $f(a) = f(b)$.

Alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

① Égalité des accroissements finis

Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Ce théorème ne se prolonge pas aux fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C} .

① Inégalité des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.

Si $m \leq f' \leq M$, alors :

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a).$$

En particulier, si $|f'| \leq K$, alors, pour tous x et x' de $]a, b[$,

$$|f(x) - f(x')| \leq K|x - x'|.$$

① Limite de la dérivée

Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et si f' a une limite finie l en a , alors f est dérivable à droite en a et son nombre dérivé à droite en a vaut $f'_d(a) = l$.

Attention, il s'agit d'une condition suffisante de dérivabilité, mais elle n'est pas nécessaire. Il peut arriver que $f'_d(a)$ existe sans que f' ait une limite en a .

② MP Fonction convexe

f est convexe sur I :

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

$$x_1, \dots, x_n \in I$$

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+ \text{ avec } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

Le graphique de toute fonction convexe est au-dessous de chacune de ses cordes.

② MP Fonction convexe dérivable

Si f est deux fois dérivable sur I :

$$f \text{ convexe} \iff f'' \geq 0$$

Le graphique de toute fonction convexe dérivable est au-dessus de chacune de ses tangentes.