Maths

# Algèbre

FLUORESCIENCES

# Maths

# Algèbre

Jean-Romain Heu

Viktoria Heu

DUNOD

**NOUS NOUS ENGAGEONS EN FAVEUR DE L'ENVIRONNEMENT :**

PAPIER CERTIFIÉ

Nos livres sont imprimés sur des papiers certifiés pour réduire notre impact sur l'environnement.

Le format de nos ouvrages est pensé afin d'optimiser l'utilisation du papier.

Depuis plus de 30 ans, nous imprimons 70 % de nos livres en France et 25 % en Europe et nous mettons tout en œuvre pour augmenter cet engagement auprès des imprimeurs français.

Nous limitons l'utilisation du plastique sur nos ouvrages (film sur les couvertures et les livres).

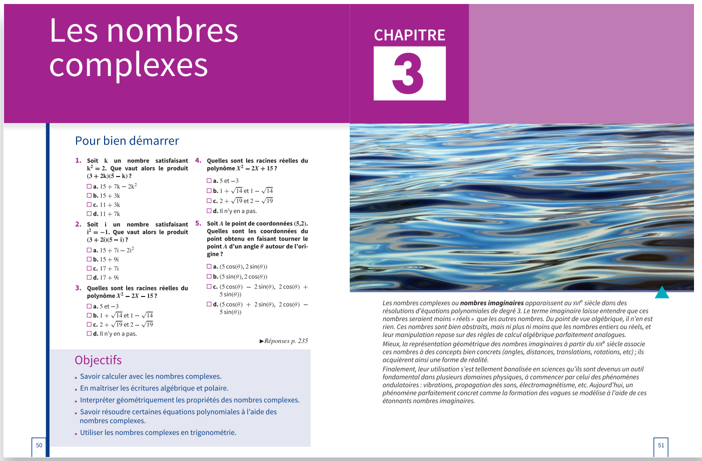

11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-085617-6

# Table des matières

# Se repérer dans le livre

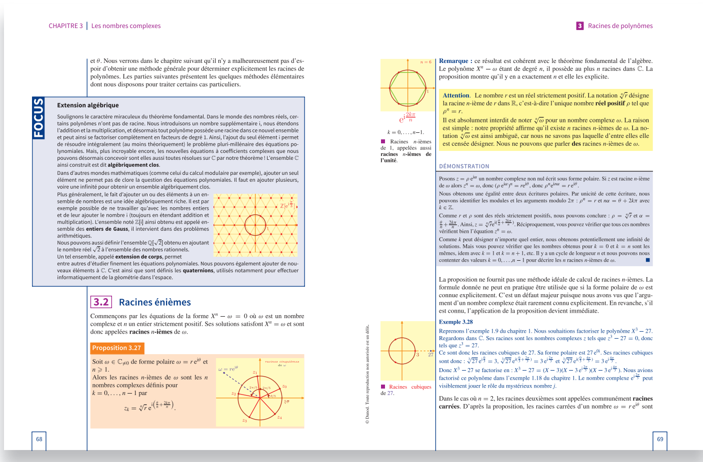
## Ouverture de chapitre

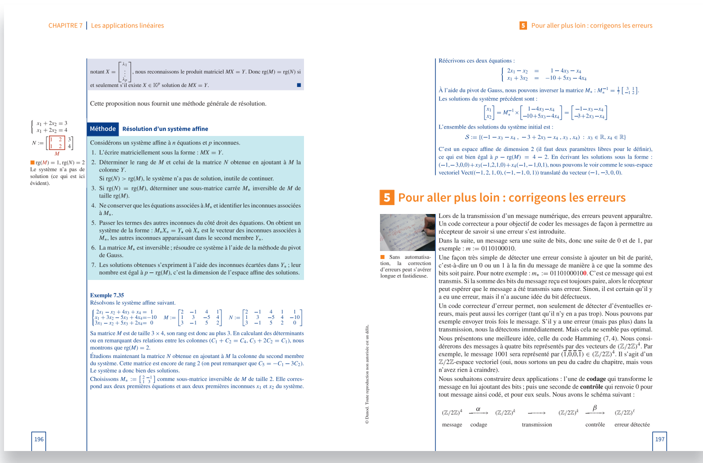
- QCM pour se tester sur les prérequis de Terminale.
- Un exemple concret pour introduire le sujet du chapitre.
- Ce que l'on maîtrisera à la fin du chapitre.




## Le cours

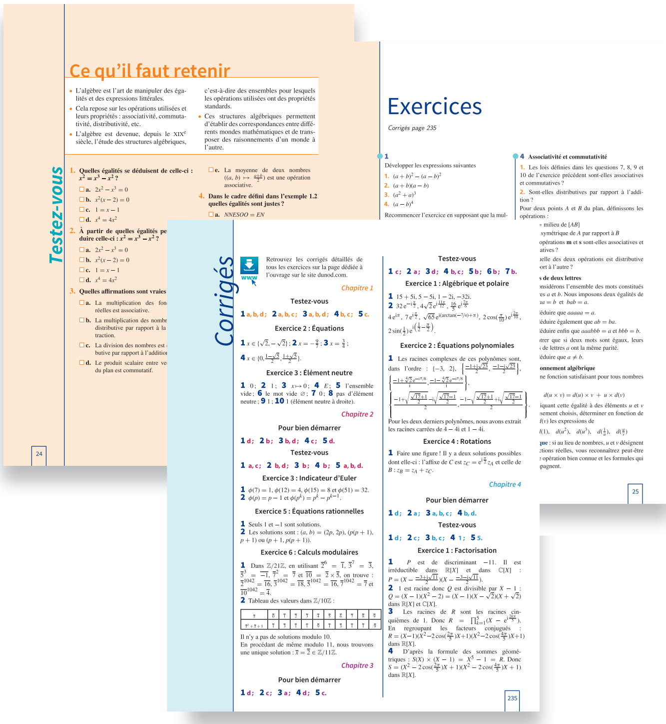
- Le **cours** est illustré par des figures et de nombreux exemples.
- Les **focus** développent un sujet de recherche, une application, un thème d'actualité.
- Des repères historiques.
- Des conseils et erreurs à éviter.



## En fin de chapitre

- Un **résumé** de ce qu'il faut retenir.
- Les **QCM** et **exercices** permettent de vérifier ses connaissances et de s'entraîner aux examens.
- Les **corrigés** sont détaillés à la fin du livre.




## En fin d'ouvrage

- Un **index** pour retrouver rapidement les notions principales.


## Les + en ligne

Retrouvez sur la page dédiée à l'ouvrage sur le site dunod.com :

- Des compléments de cours.
- Les corrigés détaillés de tous les exercices.

*À Joseph, Raphaël et Sonja.*

# Avant-propos

Lorsqu'on arrive dans l'enseignement supérieur scientifique, on découvre rapidement que le monde mathématique se divise en deux grands domaines : l'**algèbre** et l'**analyse**[1]. La séparation entre ces deux disciplines n'est pas aussi nette que celle qui existe entre la géométrie (le monde des figures) et l'arithmétique (le monde des nombres entiers).

Le novice comprend rapidement que l'analyse s'intéresse aux nombres réels et aux fonctions réelles et que l'algèbre s'intéresse à des objets mathématiques de nature différente pour lesquels nous disposons d'opérations élémentaires. Mais cette distinction lui semble souvent un peu artificielle.

De fait, il n'a pas complètement tort. Pourquoi les nombres complexes sont-ils le plus souvent traités dans un cours d'algèbre alors qu'ils sont une émanation des nombres réels ? Pourquoi l'étude des polynômes relève-t-elle de l'algèbre et non de l'analyse comme cas particuliers de fonctions réelles ?

À l'inverse, pourquoi les logarithmes sont-ils présentés dans les cours d'analyse ? Certes leur rôle dans le cadre de la dérivation et de l'intégration des fonctions usuelles n'est pas discutable, mais c'est bien dans des traités d'algèbre qu'on les a longtemps trouvés. Ils ont en effet été introduits par John Napier au XVII$^{\text{e}}$ siècle pour leur propriété fondamentale : $\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$. Ils transforment ainsi une multiplication en une addition, ce qui fut un outil de calcul important, avant l'arrivée des calculatrices. Les logarithmes mettent donc en relation deux opérations élémentaires, il s'agit d'une propriété algébrique.

De la même manière, de nombreux chapitres d'analyse ressemblent en partie à des cours d'algèbre. On définit l'addition des suites réelles, la multiplication des fonctions et on en étudie les propriétés structurelles. Par exemple, l'énoncé : « Une somme de fonctions continues est encore une fonction continue » est évidemment de nature analytique, sa démonstration repose essentiellement sur la définition de la continuité. Mais il est également de nature algébrique : on exprime le fait qu'une certaine propriété des fonctions est préservée par l'addition.

Cette situation paradoxale est en définitive facile à résoudre : l'algèbre n'est plus vraiment une discipline mathématique. Elle est une façon de raisonner et de calculer abstraitement, avec une capacité de généralisation tellement puissante qu'elle a imprégné presque tous les domaines mathématiques : géométrie, logique, topologie, calcul différentiel, etc. L'algèbre et l'analyse en particulier sont profondément interdépendantes. Cela se constatera dans ce livre par le fait que vous trouverez des nombres réels dans presque tous les chapitres.

## Contenu

Le premier chapitre de cet ouvrage tentera de préciser ce qui définit l'algèbre. Nous le ferons dans une perspective historique afin de comprendre comment cette définition a évolué jusqu'à aujourd'hui et de justifier la place qu'a désormais l'algèbre dans les sciences. Ce rapide voyage dans le temps, allant de la manipulation des équations dans l'Antiquité jusqu'à l'évocation de la mécanique quantique, nous

1. Les probabilités arrivent un peu plus tard et la géométrie est réduite à peu de choses en première année.

permettra de présenter les notions générales qui seront déclinées dans les chapitres suivants : les propriétés des opérations élémentaires, les bases du raisonnement algébrique, les structure algébriques.

Les quatre chapitres suivants seront dédiés aux **objets algébriques élémentaires** : les nombres entiers et rationnels, les nombres complexes, les polynômes et les matrices. Le point de vue adopté pour introduire ces objets sera toujours le même : ils sont de nature algébrique car nous disposons d'opérations élémentaires (addition et multiplication) pour les manipuler. Ce sont les propriétés de ces opérations qui rendent ces objets particulièrement intéressants.

Nous retrouvons le paradoxe déjà mentionné : il manque visiblement un chapitre sur les nombres réels entre celui sur les nombres rationnels et celui sur les nombres complexes. Même si les nombres réels mériteraient également un traitement algébrique, cet aspect ne serait pas très différent de ce que nous connaissons déjà pour les nombres rationnels. L'originalité profonde des nombres réels relève bien de l'analyse et nous vous renvoyons donc à un ouvrage qui lui est consacré pour combler le vide laissé entre nos chapitres.

Les trois derniers chapitres constituent un cours de ce qu'on appelle l'**algèbre linéaire**. Non seulement cette théorie joue un rôle fondamental en sciences, mais elle est dans cet ouvrage une excellente illustration de ce qu'est l'algèbre moderne : l'étude d'une structure algébrique (ici l'espace vectoriel), et des applications naturellement adaptées à cette structure, (ici les applications linéaires). Cette théorie repose sur les objets algébriques et leurs propriétés présentés dans les chapitres précédents.

Tout au long de l'ouvrage, nous nous efforçons de mettre en valeur ce qu'est profondément l'algèbre et le raisonnement algébrique. Ce point de vue lie tous les chapitres les uns aux autres. Mais cela ne nous empêche pas de présenter des applications propres à chaque chapitre dans des domaines scientifiques variés.

Nous montrerons par exemple comment les nombres complexes et le calcul matriciel permettent de faire de la géométrie. Nous expliquerons pourquoi les nombres complexes, et plus précisément les exponentielles complexes, sont si utilisés dans les sciences physiques.

Les équations différentielles, systèmes différentiels et autres équations aux dérivées partielles jouent un rôle central dans toutes les sciences, de la biologie aux sciences humaines. Leur nature est analytique, mais lorsqu'ils sont **linéaires**, leur résolution passe par des méthodes algébriques. Nous les croiserons ainsi dans plusieurs chapitres (polynômes, espaces vectoriels, réduction d'endomorphismes).

Un domaine fondamental commun à l'algèbre et à l'informatique est celui du **calcul formel** ou **calcul symbolique**. Ses principes et de nombreux programmes l'illustrant ont été présentés dans l'ouvrage *Analyse* de cette même collection, nous vous y renvoyons. Nous nous contenterons ici d'illustrer certaines notions par des codes élémentaires rédigés en langage PYTHON, et nous présenterons quelques méthodes de codage et de cryptage de l'information reposant sur des propriétés algébriques des nombres entiers, des polynômes ou encore des matrices.

# Qu'est-ce que l'algèbre

| | |
|---|---|
| **≃−3000** | Mésopotamie, écriture cunéiforme, représentation des nombres |
| **≃−2000** | Mésopotamie, tablettes scolaires d'apprentissage des quatre opérations, racines carrées et cubiques |
| **−700→700** | Du monde méditerranéen à la Chine, étude d'équations linéaires, quadratiques et cubiques |
| **820** | Empire arabe, apparition du mot *algèbre* ; formalisation des méthodes algorithmiques de résolution des équations de degrés un et deux |
| **XVI^e siècle** | Europe, méthode générale de résolution d'équations de degrés trois et quatre ; introduction d'un symbolisme pour écrire et manipuler les équations ; développement du calcul littéral ; apparition des nombres complexes |
| **XVII^e siècle** | Europe, définition algébrique des courbes du plan, algébrisation de la géométrie |
| **XVIII^e siècle** | Europe, étude des systèmes linéaires de taille quelconque, apparition du déterminant |
| **XIX^e siècle** | Europe, premières structures algébriques, groupes, espaces vectoriels ; développement du calcul matriciel |
| **XX^e siècle** | Monde entier, développement de la topologie algébrique, de la géométrie algébrique, de l'analyse algébrique ; algébrisation de la physique théorique ; résolution de grandes conjectures d'arithmétique. |

## Objectifs

- Comprendre ce que représente l'algèbre en mathématiques et comment elle s'est développée historiquement.
- Étudier les propriétés des opérations élémentaires : associativité, distributivité et commutativité.
- Savoir raisonner algébriquement.
- Introduire la notion de structure algébrique.

# CHAPITRE 1


*Qu'est-ce que l'algèbre ? Commençons par donner une réponse simple : l'**algèbre** est l'étude des opérations algébriques élémentaires sur les nombres : addition, soustraction, multiplication et division. Ces opérations permettent de définir des équations pour lesquelles les mathématiciens déterminent des méthodes de résolution depuis l'Antiquité.*

*À partir du XVIIIe siècle, ces derniers ont peu à peu réalisé que les raisonnements algébriques qu'ils élaboraient pouvaient s'appliquer à bien d'autres domaines que celui des nombres. Ils se mirent à additionner des mots, multiplier des tableaux, soustraire des entrelacements ou encore inverser des rotations.*

*Depuis, l'algèbre est devenu un domaine extrêmement vaste des mathématiques et des sciences en général dont l'objet est l'étude des opérations dans un ensemble mathématique et de leurs propriétés.*

# 1 Al-jabr wa-l-muqãbala


■ Muhammad ibn Mûsâ AL-KHWÂRIZMÎ, ≈780-850, savant persan.
Son ouvrage sur la résolution des équations est considéré comme le premier traité d'algèbre.

Nous avons retrouvé des traces d'équations algébriques de degré deux sur des tablettes babyloniennes du XVIII^e siècle avant notre ère. Dans toute l'Antiquité, de la Chine à la Grèce en passant par l'Inde, des mathématiciens se sont intéressés aux équations de degrés un et deux, voire trois, le plus souvent en lien avec des problèmes de géométrie. Puis, notamment avec le développement de l'arithmétique, les équations devinrent un sujet d'étude indépendant de la géométrie.

C'est au IX^e siècle que le mot *algèbre* fait son apparition dans le titre d'un ouvrage d'AL-KHWÂRIZMÎ. Il y décrit notamment des méthodes de traitement des équations d'ordre un et deux, en s'appuyant sur deux principes :

- La restauration (*al-jabr*) : une égalité est préservée si on ajoute à chacun de ses membres le même nombre.
- La comparaison (*al-muqãbala*) : une égalité est préservée si on retranche à chacun de ses membres le même nombre.

Nous traduirions ces principes par les axiomes suivants relatifs à l'égalité :

$$\boxed{\text{Pour tous nombres } a, b \text{ et } c, \text{ si } a = b \text{ alors } a + c = b + c \text{ et } a - c = b - c.}$$

**Exemple 1.1**

Appliquons ces principes à l'équation : $4x - 7 = 4 + x$.

Ajoutons 7 des deux côtés : $4x - 7 + 7 = 4 + x + 7$, donc $4x = 11 + x$.

Retranchons $x$ des deux côtés : $4x - x = 11 + x - x$, donc $3x = 11$.

Les principes d'AL-KHWÂRIZMÎ s'appliquent également à la multiplication et la division.

Divisons ainsi chaque membre par 3 : $\frac{3x}{3} = \frac{11}{3}$, donc $x = \frac{11}{3}$. C'est la solution de l'équation.

Oui, ce n'est pas très impressionnant mais nous touchons là à l'essence de l'algèbre : l'art de manipuler les égalités.

الجبر

■ Al-jabr, signifie en arabe restauration, reconstruction, mais également réduction d'une fracture.
On manipule les membres d'une équations comme on manipule les membres d'un corps.

**Exemple 1.2**

Regardons une équation d'ordre deux : $x^2 + 6x = 5$.

Évitons les formules magiques avec $\Delta$ et contentons-nous de manipuler cette équation.

Ajoutons 9 des deux côtés : $x^2 + 6x + 9 = 14$.

Nous reconnaissons à gauche une identité remarquable ; c'est le développement de $(x+3)^2$.

Ainsi $(x + 3)^2 = 14$.

Nous avons besoin d'un nouveau principe : si deux nombres élevés au carré sont égaux, alors ces nombres sont égaux au signe près.

Passons ainsi à la racine carrée des deux côtés de l'égalité : $x + 3 = \pm\sqrt{14}$.

Retranchons enfin 3 des deux côtés et nous obtenons ainsi les deux solutions de l'équation :

$$x = \sqrt{14} - 3 \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{14} - 3.$$

# 2 Calcul littéral

$2^{15}$

La notation des puissances sous forme d'exposant est introduite vers 1480. Son usage sera systématisé par DESCARTES.

$+ \quad -$

Les symboles *plus* et *moins* apparaissent vers 1490. Le premier est probablement une abréviation du mot latin *et*.

$=$

Ce symbole est introduit vers 1557 par Robert RECORDE pour désigner l'égalité, car d'après lui « rien ne peut être plus égal que ces deux barres parallèles ».

$\times$

Le symbole *fois* de la multiplication est introduit par William OUGHTRED vers 1630.

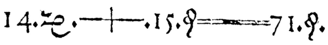
$a \cdot b,\ a * b,\ ab$

D'autres symboles (voire l'absence de symbole) existent à cette même époque. Encore aujourd'hui, l'écriture symbolique de la multiplication n'est pas unique.

Vous n'avez sans doute pas appris grand chose pour le moment et vous pouvez légitimement vous demander comment de tels problèmes de lycée ont pu occuper les mathématiciens pendant des siècles. L'une des raisons (si ce n'est l'unique raison) vient du langage mathématique de leurs époques. Les équations que nous avons présentées n'étaient pas codées comme nous l'avons fait, mais décrites de manière rhétorique par de longues phrases. L'exemple précédent aurait été énoncé ainsi : « Chercher une quantité dont le carré ajouté de six fois cette même quantité est égal à quatre ».

Manipuler dans ces conditions demande d'importants efforts cérébraux.

L'utilisation de symboles et de lettres pour représenter des équations va s'imposer petit à petit. Ci-après, l'une des premières équations, dans un ouvrage de Robert RECORDE, écrite en langage symbolique « moderne ».



Nous l'écririons aujourd'hui : $14x + 15 = 71$.

Au XVI[e] siècle, François VIÈTE propose de systématiser la représentation des nombres par des lettres, et des problèmes par des équations. Il développe surtout des règles de manipulation de ces équations facilitant leur résolution. VIÈTE en fit un programme ambitieux qu'il baptisa **algèbre nouvelle**, parfaitement conscient de sa capacité à révolutionner le calcul algébrique.

C'est peu de dire qu'il eut raison. Cette simple idée de construire un nouveau langage plus adapté sera en effet révolutionnaire pour le développement des mathématiques et des sciences en général. Nous pouvons la comparer à l'introduction de l'écriture décimale des nombres qui s'avérera bien plus efficace que d'autres écritures, comme par exemple en Europe l'écriture en chiffres romains[1].

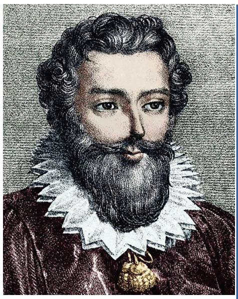
Les notations introduites par VIÈTE furent en cela d'une incroyable efficacité. Elles permirent de développer des techniques simples d'étude et de résolution des équations. Mieux que cela, elles permirent d'améliorer l'intuition qu'ont les mathématiciens de leurs équations, ils établirent un rapport cognitif plus immédiat, presque physique (on n'ose pas dire charnel) avec ces expressions ayant désormais acquis une existence concrète.

**Exemple 1.3**

Considérons un solide en mouvement rectiligne uniforme. Sa vitesse est la distance parcourue sur une unité de temps. Notons-la $v$ et notons $d$ la distance parcourue pendant une durée $t$. D'après la définition de la vitesse, les distances parcourues sont proportionnelles aux durées, ce qui se traduit par l'égalité : $\frac{d}{v} = \frac{t}{1}$.

On en déduit les égalités suivantes : $d = vt$ et $v = \frac{d}{t}$. Elles peuvent s'interpréter ainsi : pour un temps fixé, la distance parcourue est proportionnelle à la vitesse, et pour une distance donnée, la vitesse est inversement proportionnelle au temps de parcours.

1. Nous pouvons en tirer un principe général en sciences que tout étudiant devrait assimiler rapidement : bien formuler un problème, ou simplement le reformuler, est souvent la clé de sa résolution.



François VIÈTE, 1540-1603, mathématicien français.

René DESCARTES, 1596-1650, savant français.

*a, b, c*
*x, y, z*

DESCARTES introduit vers 1635 l'usage toujours en cours de représenter les paramètres connus d'un problème par les premières lettres de l'alphabet et les inconnues par les dernières.

GALILÉE établit ces résultats vers 1640, mais il n'utilisait pas de formules. Il a ainsi justifié chaque assertion, indépendamment des autres, sur quatre pages, là où notre équation initiale nous a permis de déduire les deux autres immédiatement !

Non seulement le formalisme symbolique facilite grandement le raisonnement, mais il permet de comprendre plus clairement les relations qu'entretiennent les différentes variables entre elles.

Le système de notations de VIÈTE fut amélioré dans les décennies qui suivirent ses ouvrages. Nos notations actuelles sont en grande partie héritées de celles de DESCARTES qui finalisa le travail initié par VIÈTE.

Depuis cette époque, l'algèbre est devenue la manipulation d'expressions littérales. **Calculer** ne signifie plus savoir compter et effectuer des opérations avec des nombres mais également savoir manipuler des symboles et des lettres. Résoudre algébriquement une équation signifie désormais déterminer ses solutions sous formes de formules faisant intervenir les paramètres du problème. La solution d'une équation de la forme $ax + b = 0$ est $x = -\frac{b}{a}$. Celles d'une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ sont de la forme bien connue $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Notons qu'on ne se préoccupe pas ici de savoir si $a$ est non nul ou $b^2 - 4ac$ positif. Formellement, ces solutions sont justes puisque si on les injecte dans les équations, on constate qu'elles les satisfont parfaitement.

Les solutions formelles d'une équation sont par nature parfaitement **exactes** à la différence des solutions obtenues par des méthodes **numériques approchées**. Dans le monde algébrique, l'écriture décimale n'a pas sa place car elle renvoie à ce monde numérique imparfait : nous n'écrirons jamais 1,5 mais $\frac{3}{2}$.

Cette nouvelle façon de raisonner et de calculer a imprégné l'ensemble des mathématiques. Rien que dans le monde des fonctions réelles, lieu de prédilection de l'analyse, nous manipulons le plus souvent des expressions littérales auxquelles nous appliquons des règles algébriques.

**Exemple 1.4**

Dans un monde mathématique mystérieux, nous posons les règles suivantes :

$$(\sin(X))' = \cos(X), \quad (X^3)' = 3X^2,$$
$$\forall u(X), v(X), \ \left(\frac{u(X)}{v(X)}\right)' = \frac{u'(X)v(X) - u(X)v'(X)}{v^2(X)}.$$

Que désignent sin, cos et cette étrange apostrophe ? D'où sort la dernière formule ? Nous n'en savons rien, nous n'avons rien défini ni rien démontré. Cela ne nous empêche par de déduire de ces trois règles le résultat suivant :

$$\left(\frac{X^3}{\sin(X)}\right)' = \frac{X^3\sin(X) - 3X^2\cos(X)}{\sin^2(X)}.$$

Un cours d'analyse permettra de donner du sens à tout cela. Mais vous devriez réaliser qu'au lycée, une fois les concepts définis, vous avez essentiellement étudié des fonctions définies par des formules, donc des expressions symboliques, construites à partir de fonctions élémentaires et d'opérations élémentaires. Et dériver de telles fonctions revenait à appliquer un certain nombre de règles de nature algébrique.

Nous vous renvoyons au manuel *Analyse* de cette même collection, où l'importance du calcul symbolique dans le monde des fonctions est longuement discutée.

# 3 Opérations élémentaires

## 3.1 Associativité, commutativité et distributivité

Les manipulations des équations reposent sur des propriétés usuelles satisfaites par nos opérations élémentaires. Rappelons-les :

**Proposition 1.5**

L'addition et la multiplication sont **associatives**, c'est-à-dire : pour tous nombres $a$, $b$ et $c$,

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad \text{et} \quad a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

Ces opérations sont également **commutatives** : pour tous nombres $a$ et $b$,

$$a + b = b + a \quad \text{et} \quad a \times b = b \times a$$

La multiplication est **distributive** par rapport à l'addition :

$$a \times (b + c) = (a \times b) \ + \ (a \times c)$$

*Multi-plier* signifie *plier plusieurs fois*, méthode employée au moyen-âge pour calculer le produit de deux nombres à l'aide d'une corde.

L'associativité de l'addition et de la multiplication signifie concrètement que le parenthésage est inutile lorsqu'on additionne trois nombres : $a + b + c$ peut signifier $(a + b) + c$ ou $a + (b + c)$, peu importe, le résultat sera le même. Et de même lorsqu'on multiplie trois nombres : $(ab)c = a(bc)$.

La soustraction n'est pas une opération associative : en général $(a - b) - c$ est différent de $a - (b - c)$. La notation $a - b - c$ est ainsi ambiguë, même si par convention, il a été décidé qu'elle signifierait $(a - b) - c$.

La commutativité d'une opération signifie que l'ordre des termes n'importe pas pour effectuer l'opération. La soustraction, encore elle, n'est pas commutative puisqu'en général $a - b$ est différent de $b - a$. Finalement, la soustraction est décevante par rapport à l'addition. Tellement décevante que les mathématiciens préfèrent s'en tenir à l'addition et ignorer cette opération. Lorsqu'ils voient une soustraction $a - b$, ils préfèrent y voir l'addition $a + (-b)$ de $a$ avec l'opposé de $b$. Pour les mêmes raisons, ils trouvent la multiplication bien plus intéressante que la division et préfèrent interpréter cette dernière comme la multiplication d'un nombre par l'inverse de l'autre nombre.

La distributivité est une règle faisant intervenir deux opérations. L'addition n'est pas distributive par rapport à la multiplication puisque $a + (b \times c)$ est différent de $(a + b) \times (a + c)$ en général.

En appliquant la distributivité deux fois, nous pouvons développer des expressions factorisées :

$$(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d) = ac + ad + bc + bd.$$

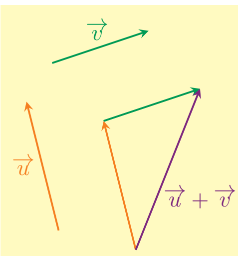
Notons que la multiplication semble également distributive par rapport à la soustraction. Par exemple, $3 \times (7 - 2)$ est bien égal à $3 \times 7 \; - \; 3 \times 2$. Le bon fonctionnement de cette distributivité repose sur la **règle des signes** : $+\times+ = +$, $+\times- = -$ et $-\times- = +$.

De cette manière, nous pouvons distribuer toute expression faisant intervenir des soustractions ou des nombres négatifs[2] :

$$\begin{aligned}(9-2)\times(8-5) &= 9\times 8 \;+\; (-2)\times 8 \;+ 9\times(-5) \;+\; (-2)\times(-5)\\ &= 9\times 8 \;-\; 2\times 8 \;-\; 9\times 5 \;+\; 2\times 5.\end{aligned}$$

## 3.2 Autres additions et multiplications

Lorsque une opération ressemble beaucoup à l'addition ou à la multiplication, nous nous autorisons souvent à la noter encore $+$ ou $\times$. Cela a déjà commencé avec les nombres. L'addition et la multiplication des nombres entiers sont clairement définies. Ces opérations ont été étendues aux nombres rationnels, puis aux nombres réels en gardant les mêmes notations. Pourtant quand on y pense, l'addition des nombres rationnels est nettement moins triviale que celle des entiers ($\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$) et ne parlons même pas de celle des réels ($\pi + \sqrt{2} = ???$). Mais ces opérations satisfont toujours les mêmes propriétés vues dans la section précédente et les raisonnements algébriques restent inchangés dans chacun de ces ensembles de nombres, donc moralement tout va bien.




L'addition des vecteurs est une opération géométrique. Le lien avec l'addition des nombres ne saute pas aux yeux ! Mais il s'agit bien d'une opération associative et commutative.

De la même manière ont été définies l'addition et la multiplication des fonctions réelles. Par définition, la somme de deux fonctions $f$ et $g$ est la fonction notée $f + g$ qui à tout nombre réel $x$ associe $f(x) + g(x)$. Pourquoi ces couleurs ? Parce que ces deux $+$ sont différents. Le second $+$ est le symbole de l'addition bien connue des nombres réels. Le premier $+$ est un nouveau symbole pour l'addition des fonctions que nous venons de définir. Nous aurions pu (dû ?) introduire un autre symbole pour définir cette nouvelle opération. Mais celle-ci fonctionne tellement comme l'addition standard que cela nous aurait plus perturbé qu'autre chose. Et il en est évidemment de même pour la multiplication des fonctions.

Nous appliquerons encore ce principe dans cet ouvrage, en définissant une addition et une multiplication pour les classes de congruences, les nombres complexes, les polynômes et les matrices. Il s'agira à chaque fois de nouvelles opérations, mais les nommer ainsi signifie qu'elles se comportent de manière analogue à l'addition et la multiplication standard. Plus précisément, nous aurons toujours l'associativité et la distributivité, mais pas forcément la commutativité !

2. Rappelons-nous que le produit $(-2) \times (-5)$ n'a a priori aucun sens. La règle des signes a quelque chose d'arbitraire ; sa raison d'être est la distributivité de la multiplication.

FOCUS

### Non-associativité d'une addition

Il existe un exemple classique qui contredit immédiatement notre dernier propos : l'addition des nombres flottants (ou nombres à virgule) définie dans les ordinateurs n'est pas associative à cause des erreurs d'arrondis. Si par exemple, mon logiciel de calcul ne m'autorise que des nombres à six chiffres significatifs, l'opération 2,00000 + 0,000001 aura pour résultat 2,00000 (la sixième décimale a disparu dans l'arrondi). Calculons de cette manière les deux expressions suivantes :

$$(-2{,}00000 + 2{,}05000) + 0{,}000001 = 0{,}050000 + 0{,}000001 = 0{,}050001$$
$$-2{,}00000 + (2{,}05000 + 0{,}000001) = -2{,}00000 + 2{,}05000 = 0{,}050000.$$

Les résultats sont différents ! Cette non-associativité entraîne de nombreux problèmes dans les calculs numériques approchés. Conclusion : dès que nous sortons du cadre algébrique, les problèmes apparaissent !

## 3.3 Identités remarquables

Sous les conditions décrites dans la section précédente, certains résultats classiques appris au lycée restent vrais de manière plus générale. Prenons par exemple l'identité remarquable : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Peu importe dans quel monde vivent $a$ et $b$, ce résultat ne repose que sur des propriétés de distributivité et de commutativité :

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)\times(a+b) && \text{définition de la puissance}\\
&= a\times(a+b)\ +\ b\times(a+b) && \text{distributivité}\\
&= (a\times a\ +\ a\times b)\ +\ (b\times a\ +\ b\times b) && \text{distributivité}\\
&= a^2\ +\ 2ab\ +\ b^2 && \text{associativité de } + \\
& && \text{et commutativité de } \times
\end{aligned}$$

Le terme $2ab$ ne signifie rien de plus que $ab + ab$.

Les résultats qui suivent reposent sur de tels arguments. Ils sont valables dans n'importe quel ensemble disposant d'une addition associative et commutative et d'une multiplication associative et distributive par rapport à l'addition (mais non nécessairement commutative). Ils peuvent ainsi s'appliquer à des nombres (évidemment) mais aussi à des fonctions, des matrices, des polynômes, etc.

Dans un tel contexte, l'identité remarquable ci-avant se généralise en une formule importante à connaître :

**Proposition 1.6 Formule du binôme de Newton**

Soient deux éléments $a$ et $b$ qui commutent pour la multiplication : $a \times b = b \times a$. Alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

| $n \backslash k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | **1** | | | | | |
| 1 | **1** | **1** | | | | |
| 2 | **1** | **2** | **1** | | | |
| 3 | **1** | **3** | **3** | **1** | | |
| 4 | **1** | **4** | **6** | **4** | **1** | |
| 5 | **1** | **5** | **10** | **10** | **5** | **1** |

Le triangle de Pascal $10 = 6 + 4$.

La démonstration de la formule de Pascal est disponible sur www.dunod.com

Le terme $\binom{n}{k}$ est le coefficient binomial « $k$ parmi $n$ ». C'est le $k$-ième terme de la $n$-ième ligne du **triangle de Pascal**. Rappelons que ce triangle peut se construire par récurrence de la manière suivante : tous les coefficients $\binom{n}{0}$ et $\binom{n}{n}$ sont égaux à 1 (il s'agit des coefficients situés sur la première colonne et sur la diagonale). Et à l'intérieur du triangle, chaque coefficient s'obtient en sommant les deux coefficients situés au-dessus de lui, d'après la **formule de Pascal** : $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$.
La démonstration de la proposition se fait par récurrence sur $n$ ; elle repose sur la formule de Pascal, l'associativité, la commutativité et la distributivité des opérations.

**Exemple 1.7**

Soient $A$ et $B$ deux matrices qui commutent : $AB = BA$ (vous ne savez pas encore de quoi il s'agit mais cela n'a pas d'importance ici). Alors

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \quad \text{et} \quad (A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3.$$

Mais si ces matrices $A$ et $B$ ne commutent pas, le résultat est moins simple :

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2\\ (A+B)^3 &= (A^2 + AB + BA + B^2)(A+B)\\ &= A^3 + ABA + BA^2 + B^2A + A^2B + AB^2 + BAB + B^3\end{aligned}$$

obtenus en développant bêtement, mais en ne modifiant jamais l'ordre des facteurs dans les différents produits du développement.

L'autre identité remarquable bien connue $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ nécessite également la commutativité de $a$ et $b$. Elle se généralise de la manière suivante.

**Proposition 1.8**

Soient deux éléments $a$ et $b$ qui commutent pour la multiplication ($ab = ba$) et soit $n \in \mathbb{N}_{\neq 0}$. Alors :

$$\begin{aligned}a^n - b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})\\ &= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k.\end{aligned}$$

Nous vous en laissons la démonstration. Il s'agit simplement de développer le produit de $(a-b)$ par la somme et de constater que presque tous les termes se simplifient alors et qu'il ne reste que les termes $a^n$ et $-b^n$.

**Exemple 1.9**

Factorisons le polynôme $X^3 - 27$. Nous reconnaissons une expression de la forme $a^3 - b^3$ avec $a := X$ et $b := 3$. Ainsi, $X^3 - 3^3 = (X-3)(X^2+3X+3^2)$. Si nous souhaitons factoriser

Symbole d'égalité dissymétrique, utilisé dans certains logiciels et dans cet ouvrage pour les **définitions** de variables.

complètement ce polynôme, il reste à factoriser le polynôme $X^2+3X+9$. Son discriminant $-27$ est strictement négatif, ce polynôme ne peut donc pas se factoriser dans $\mathbb{R}$.

Terminons avec un cas particulier de la proposition précédente dans un cadre où nous disposons de fractions. Il s'obtient en posant $a := 1$ et $b := x$ :

**Proposition 1.10 Somme géométrique**

Soit $x$ un nombre réel (ou complexe) différent de 1 et $n \varepsilon \mathbb{N}$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

## 3.4 Autres opérations

Il n'y a pas que l'addition et la multiplication dans la vie mathématique ! Mais elles restent tout de même les opérations de référence. Bien d'autres opérations existent et nous sommes tentés de comparer leur fonctionnement avec le leur. Pour cela, nous pouvons définir de manière plus générale l'associativité, la commutativité et la distributivité.

**Définition 1.11**

Soit $E$ un ensemble. Une **opération interne** à $E$ notée $*$ est une opération qui à deux éléments $a$ et $b$ quelconques de $E$ associe un élément noté $a*b$ appartenant à $E$ également.

L'opération $*$ est dite **associative** si pour tous éléments $a$, $b$ et $c$ de $E$,

$$a*(b*c) = (a*b)*c.$$

Elle est dite **commutative** si pour tous éléments $a$ et $b$ de $E$, $a*b = b*a$.

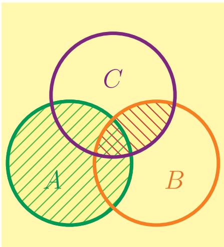
Si nous disposons d'une autre opération interne à $E$ notée $\heartsuit$, nous disons que $\heartsuit$ est **distributive** par rapport à $*$ si pour tous éléments $a$, $b$ et $c$ de $E$,

$$a\heartsuit(b*c) = (a\heartsuit b)*(a\heartsuit c) \text{ et } (b*c)\heartsuit a = (b\heartsuit a)*(c\heartsuit a).$$

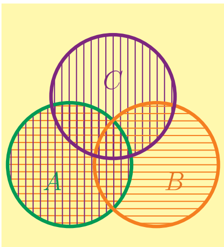
Dans le cas où l'opération $*$ est l'addition et $\heartsuit$ est la multiplication, nous retrouvons bien nos définitions de la section 3.1. Regardons des exemples d'opérations autres que l'addition ou la multiplication.

**Exemple 1.12**

Pour deux nombres entiers positifs $a$ et $b$, nous pouvons définir la puissance $b$-ième de $a$ avec l'opération $a \wedge b$. Le résultat est encore un nombre entier positif, donc l'opération $\wedge$ est bien interne à l'ensemble $\mathbb{N}$. Elle n'est ni associative (par exemple, $(2 \wedge 1) \wedge 3 = 8$ qui est différent de $2 \wedge (1 \wedge 3) = 2$) ni commutative ($2 \wedge 3 \neq 3 \wedge 2$ par exemple).




$A \cup (B \cap C)$




$(A \cup B) \cap (A \cup C)$

■ Nous obtenons le même ensemble.

**Exemple 1.13**

Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan, nous pouvons définir leur produit scalaire noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$. Le résultat de cette opération est un nombre réel, et non un vecteur. Le produit scalaire noté $\cdot$ n'est ainsi pas une opération interne au plan et sort du cadre de notre définition. Remarquons néanmoins que cette opération est commutative et distributive par rapport à l'addition : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ et $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.

**Exemple 1.14**

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble. Pour deux parties $A$ et $B$ de $\mathcal{E}$, nous pouvons définir leur intersection $A \cap B$ et leur union $A \cup B$.

Les opérations internes $\cap$ et $\cup$ sont associatives et commutatives :

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C,\ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,\ A \cap B = B \cap A,\ A \cup B = B \cup A.$$

L'union est distributive par rapport à l'intersection, et chose étonnante, cela fonctionne aussi dans l'autre sens ; l'intersection est distributive par rapport à l'union :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

**Exemple 1.15**

Pour deux fonctions réelles $f$ et $g$, on définit leur **composition** ainsi : c'est la fonction notée $f \circ g$ qui à tout réel $x$ associe le nombre $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Par exemple, si $f$ et $g$ sont définies par $f(x) := x+1$ et $g(x) := x^2$, alors $(f \circ g)(x) = f(x^2) = x^2 + 1$.

Cette opération n'est pas commutative. En effet, pour notre exemple, $(g \circ f)(x) = g(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$, donc les fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$ sont différentes.

Elle est en revanche associative : pour toutes fonctions $f$, $g$ et $h$, les fonctions $(f \circ g) \circ h$ et $f \circ (g \circ h)$ sont toutes les deux définies par $x \mapsto f(g(h(x)))$, donc $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ que nous pouvons ainsi noter simplement $f \circ g \circ h$.

**Exemple 1.16**

Définissons pour finir une nouvelle opération. Nous considérons l'ensemble $\mathcal{M}$ de tous les mots que l'on peut former avec un nombre fini de lettres de l'alphabet. Par exemple, les mots *abdmaos* et *uupupuk* en sont des éléments. Nous définissons sur cet ensemble l'opération de **concaténation** qui consiste à accoler des mots. On note cette opération interne $*$. Par exemple $abdmaos * uupupuk = abdmaosuupupuk$.

Puisque l'algèbre consiste à manipuler des expressions littérales, elle revient finalement à jouer avec des mots et à les combiner selon certaines règles. La concaténation des mots est alors la plus pure des opérations algébriques.

Cette opération est associative puisque lorsqu'on accole trois mots, peu importe dans quel ordre sont effectuées les opérations : $m_1 * (m_2 * m_3) = m_1 * m_2m_3 = m_1m_2m_3 = m_1m_2 * m_3 = (m_1 * m_2) * m_3$.

Mais elle n'est en revanche pas commutative ; l'ordre des mots qu'on accole importe en général. Par exemple : $zic * mu = zicmu$ et $mu * zic = muzic$, donc $zic * mu \neq mu * zic$.

# 4 Raisonnement algébrique

Nous avons vu dans la première section ce qu'était un raisonnement algébrique : c'est l'art de manipuler des égalités. Regardons sur des exemples variés comment cela peut se décliner. Nos démonstrations seront excessivement détaillées car nous insistons sur les principes fondamentaux à l'œuvre dans les raisonnements. La bonne rédaction de ces exercices serait plus concise tout en n'oubliant aucun argument.

**Exemple 1.17**

Commençons par la résolution d'une équation algébrique : $\dfrac{\sqrt{2-x}}{x-1} = \dfrac{2}{3}$.

Premier réflexe : il faut supprimer les fractions. La fraction $\frac{a}{b}$ n'est qu'un symbole qui ne désigne rien de plus que le nombre qui, multiplié par $b$, est égal à $a$. La seule façon d'exploiter une fraction est, à un moment donné, de la multiplier par son dénominateur. Appliquons cela à notre équation et multiplions des deux côtés par $3(x-1)$. Nous obtenons :

$$3\sqrt{2-x} = 2(x-1).$$

Attention, soyons tout de même rigoureux ! Pour que cette nouvelle égalité soit équivalente à la première, il faut préciser que $x \neq 1$.

Continuons et attaquons désormais la racine carrée. De même qu'une fraction n'est qu'une expression symbolique, $\sqrt{c}$ n'est qu'un symbole qui désigne le nombre positif qui élevé au carré égale $c$. La seule façon d'exploiter cette définition est donc d'élever la racine au carré. Appliquons cela à notre égalité et élevons au carré des deux côtés :

$$9(2-x) = 4(x-1)^2.$$

Là encore, soyons rigoureux, cette égalité n'est équivalente à la précédente que si on précise que $2-x$ et $x-1$ doivent être positifs (si nous repassons en effet à la racine carrée dans cette dernière égalité, nous obtenons $3\sqrt{2-x} = 2|x-1|$).

Les étapes suivantes sont plus classiques. Nous vous laissons le soin de développer les expressions et de passer tous les termes à gauche de l'égalité. Vous obtiendrez ainsi : $-4x^2 - x + 14 = 0$. Vous reconnaîtrez alors une équation de degré deux de discriminant $\Delta := (-1)^2 - 4(-4)(14) = 225$. Les solutions de cette dernière équation sont donc $x_1 := \frac{1+\sqrt{225}}{-8}$ et $x_2 := \frac{1-\sqrt{225}}{-8}$. Les solutions obtenues sont des expressions algébriques, certes peu jolies, mais parfaitement exactes ! Cela étant dit, nous pouvons remarquer que $\sqrt{225} = 15$ et simplifier les expressions : $x_1 = -2$ et $x_2 = \frac{7}{4}$.

Avons-nous terminé la résolution ? Non ! D'après les remarques faites au cours de notre raisonnement, il nous reste des points à vérifier. Nous avons simplement démontré la chose suivante : si l'équation possède des solutions, il ne peut s'agir que de $x_1$ ou $x_2$. Vérifions alors :

$$\frac{\sqrt{2-x_1}}{x_1-1} = \frac{\sqrt{2-(-2)}}{-2-1} = -\frac{2}{3} \qquad \frac{\sqrt{2-x_2}}{x_2-1} = \frac{\sqrt{2-\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}-1} = \frac{2}{3}.$$

Nous constatons que $x_1$ n'est pas solution de l'équation. Ce candidat ne vérifie en effet pas la condition $x_1 - 1 \geqslant 0$ que nous avions établie. En revanche $x_2$ est bien solution de l'équation. Nous pouvons conclure que $\frac{7}{4}$ est l'unique solution de cette équation.

$\sqrt{\phantom{x}}$

Ce symbole représentant la racine carrée est introduit vers 1525. Il s'agit probablement d'un r déformé.

$\dfrac{n}{d}$

La notation des fractions avec une barre séparant numérateur et dénominateur apparaît chez les mathématiciens arabes au XII^e^ siècle.

Jouons désormais avec des lettres.

**Exemple 1.18**

Considérons un nombre noté $j$ vérifiant $j^2 = -j-1$. L'étude du polynôme $X^2+X+1$ permet de comprendre qu'un tel nombre $j$ ne peut pas exister. Le chapitre 3, voire le chapitre 4, permettront de reconsidérer la chose, mais à vrai dire peu importe. La force de l'algèbre est que nous pouvons nous autoriser à faire à peu près tout ce que nous voulons, tant que les règles utilisées sont clairement énoncées. Imaginons donc qu'un tel machin existe, nous ne savons pas ce que c'est mais cela ne nous empêche pas de raisonner et de calculer.

Par exemple, en restant dans le cadre des opérations algébriques, nous pouvons déterminer les puissances de $j$ à partir de l'égalité initiale $j^2 = -j-1$ :

$$j^3 = j \times j^2 = j \times (-j-1) = -j^2 - j = -(-j-1) - j = 1.$$

N'allons pas en déduire que $j = 1$, c'est visiblement faux puisque $1^2 \neq -1-1$ ! Continuons :

$$j^4 = j \times j^3 = j \times 1 = j, \quad j^5 = j \times j^4 = j \times j = j^2, \text{ etc.}$$

Nous sommes visiblement capables de calculer les puissances de $j$ sans même savoir ce qu'est ce machin. Si nous supposons de plus que la commutativité reste valable avec $j$, nous pouvons développer des expressions telles celle-ci :

$$(X-3j)(X-3j^2) = X^2 - 3jX - 3j^2X + 9j^3 = X^2 - 3jX - 3(-j-1)X + 9 \times 1 = X^2 + 3X + 9.$$

Nous retrouvons le polynôme de l'exemple 1.9 Finalement, si nous admettons l'existence de ce $j$, nous pouvons terminer la factorisation que nous avions commencée :

$$X^3 - 27 = (X-3)(X-3j)(X-3j^2).$$

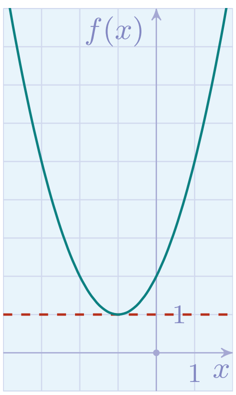
Quel sens cela a-t-il ? Aucun pour le moment, il va falloir patienter un peu.

Passons à un exemple qui semble relever de l'analyse mais qui peut se traiter à l'aide d'un raisonnement purement algébrique.

**Exemple 1.19**

Montrer que pour tout nombre réel $x$, nous avons $x^2 + 2x + 2 \geqslant 1$.

Les inégalités dans le monde des nombres réels relèvent a priori de l'analyse et non de l'algèbre. D'ailleurs, la plupart des lycéens ont appris à résoudre un tel problème en étudiant la fonction $f := x \mapsto x^2 + 2x + 2$. Dérivée, tableau de variation, etc, et la conclusion est établie après avoir démontré que 1 est le minimum de la fonction $f$.




■ Le graphe de $f$, que nous ignorons ici pour marquer notre mépris de l'analyse.

L'expression étudiée ne contenant que des additions et des multiplications, nous pouvons envisager une autre démonstration par un raisonnement purement algébrique. Une astuce possible est l'utilisation de la **forme canonique** de cette expression polynomiale de degré 2. L'idée consiste à reconnaître le début de l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Ici $x^2 + 2x$ est le début du développement de $(x+1)^2$. Ainsi, pour un réel $x$ fixé,

$$x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 + 1 = (x+1)^2 + 1.$$

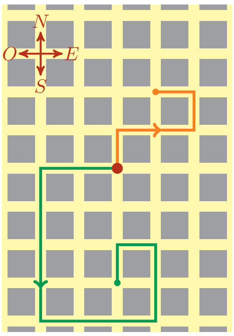
Or, d'après la règle des signes, un carré est toujours positif, donc $(x+1)^2 \geqslant 0$.

Enfin, en ajoutant 1 de chaque côté de l'inégalité, nous ne la modifions pas, donc $(x+1)^2 + 1 \geqslant 1$, c'est-à-dire $x^2 + 2x + 2 \geqslant 1$.

Continuons avec une autre équation non algébrique a priori.

**Exemple 1.20**

Résoudre : $\exp(x^3) = 5$. Là encore, ce problème fait intervenir des fonctions réelles et relève a priori de l'analyse et non de l'algèbre. Nous pouvons cependant l'interpréter de manière algébrique. Nommons cube la fonction qui permet d'élever au cube un




La grille et les deux chemins $C_1$ et $C_2$ codés par *NEENO* et *OOSSSSEEENNOS*.

nombre : $\text{cube}(x) := x^3$. L'équation peut alors s'écrire à l'aide d'une composée de fonctions : $\exp \circ \text{cube}(x) = 5$. Comme dans les exemples plus élémentaires, nous allons résoudre cette équation en passant des termes de l'égalité d'un côté à l'autre. Il faut pour cela « inverser » les fonctions en jeu au sens de la composition. Tout lycéen sait faire cela en faisant appel aux bijections réciproques : pour faire disparaître l'exponentielle, on « passe au logarithme ». D'un point de vue algébrique, on compose des deux côtés par le logarithme népérien : $\ln \circ (\exp \circ \text{cube})(x) = \ln(5)$, donc, par associativité de $\circ$ : $(\ln \circ \exp) \circ \text{cube}(x) = \ln(5)$.

Comme le logarithme et l'exponentielle « se compensent » : $\text{cube}(x) = \ln(5)$ ou encore $x^3 = \ln(5)$.

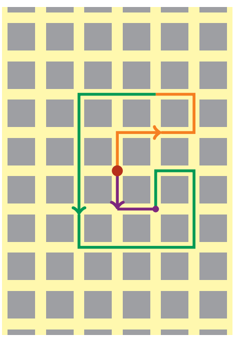
Enfin on fait de même avec l'application cube dont la bijection réciproque est la racine cubique :

$$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{\ln(5)}, \text{ donc finalement } x = \sqrt[3]{\ln(5)}.$$

Nous avons effectué un traitement purement algébrique de cette équation. Il faudrait éventuellement vérifier que la solution obtenue est bien définie mais ce dernier point relève cette fois bien de l'analyse.

Terminons avec un problème analogue dans un domaine plus exotique.

**Exemple 1.21**



La composée des deux chemins $C_1$ et $C_2$ est le chemin *NEENOOOSSSSEEENNOS* qui revient à faire le déplacement *SE*.

Considérons la grille ci-contre et imaginons que nous nous déplaçons dans ce labyrinthe infini. Un déplacement est une suite de pas élémentaires (vers le nord, vers l'est, etc). Nous pouvons composer les déplacements en les effectuant l'un après l'autre.

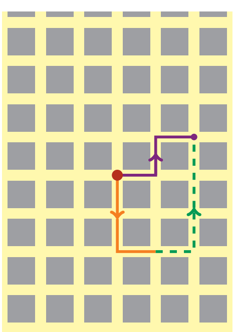
Un déplacement peut être codé ainsi : *NEENO* signifie qu'on effectue un pas vers le nord, puis deux pas vers l'est, un pas vers le nord et un pas vers l'ouest. La composition des déplacements revient à accoler les codes : $SSONO * ENNOS = SSONOENNOS$.

C'est la loi de concaténation des mots que nous avons définie dans l'exemple 1.16.

Si nous nous intéressons aux chemins parcourus, cette loi n'est pas commutative : le chemin *NE* n'est pas le même que le chemin *EN*. Mais si ne nous intéressons qu'au point d'arrivée des chemins, la loi devient commutative : pour un même point de départ, les chemins *NE* et *EN* conduisent au même point d'arrivée : $NE = EN$. De même, nous pouvons écrire $SENO = \varnothing$ puisque ce déplacement ramène au point de départ.

Imaginons maintenant qu'on ait déjà effectué le déplacement *SSE* alors qu'on voulait arriver au bout du chemin *ENE*. Quel déplacement faut-il effectuer pour arriver à bon port ? Le problème se met en équation : nous cherchons le mot $\mathbf{M}$ tel que $SSE * \mathbf{M} = ENE$. Comme dans les exemples précédents, la résolution de cette équation revient à la manipuler en faisant passer des termes d'un côté à l'autre. Composons des deux côtés par le déplacement $N$ : $NSSE * \mathbf{M} = NENE$. Or le déplacement *NS* revient à faire du surplace : $NS = \varnothing$. Nous pouvons simplifier notre expression : $SE * \mathbf{M} = NENE$. Selon le même principe, composons encore par $N$, puis enfin par $O$ :

$$NSE * \mathbf{M} = NNENE \text{ donc } E * \mathbf{M} = NNENE \text{ donc } OE * \mathbf{M} = ONNENE \text{ donc } \mathbf{M} = ONNENE.$$



$SSE * ENNN = ENE$

Le déplacement *ONNENE* est une solution (facilement vérifiable). Nous pouvons même la simplifier un peu en utilisant la commutativité et $OE = \varnothing$ :

$$\mathbf{M} = ONNENE = OEENNN = ENNN.$$

Conclusion : nous avons défini un moyen de calculer avec des chemins et de raisonner algébriquement dans ce monde.