

**TOUT EN  
FICHES**

Michel Chrysos

**L'ESSENTIEL D'**

# **ÉLECTRO- MAGNÉTISME**

**LICENCE, IUT**

**DUNOD**

Direction artistique : Élisabeth Hébert  
Conception graphique : Pierre-André Gualino  
Mise en page : Lumina

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1<sup>er</sup> juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du

Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 2020

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

ISBN 978-2-10-079736-3

[www.dunod.com](http://www.dunod.com)

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2<sup>o</sup> et 3<sup>o</sup> a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

# Table des matières

<b>Avant-propos</b>	V
<b>Le mot de l'auteur</b>	VI
<b>Fiche 1.</b> Introduction	1
<b>Fiche 2.</b> De la charge au champ	10
<b>Fiche 3.</b> Du champ électrostatique au concept de potentiel	19
<b>Fiche 4.</b> Distributions continues de charge	27
<b>Fiche 5.</b> Multipôles électriques	35
<b>Fiche 6.</b> Lignes de champ	43
<b>Fiche 7.</b> Symétries et invariances	51
<b>Fiche 8.</b> Équipotentiellles	59
<b>Fiche 9.</b> Introduction au théorème de Gauss	67
<b>Fiche 10.</b> Équations de Maxwell en électrostatique	74
<b>Fiche 11.</b> Énergie électrostatique	82
<b>Fiche 12.</b> Conducteurs en équilibre	90
<b>Fiche 13.</b> Des conducteurs au concept de condensateur	98
<b>Fiche 14.</b> Des condensateurs et des diélectriques	106
<b>Fiche 15.</b> Éléments d'électrocinétique	114
<b>Fiche 16.</b> Introduction à la magnétostatique	122

<b>Fiche 17.</b>	Forces et champs en magnétisme	130
<b>Fiche 18.</b>	Potentiel vecteur	138
<b>Fiche 19.</b>	Autour du théorème d'Ampère	146
<b>Fiche 20.</b>	Régime non-stationnaire	154
<b>Fiche 21.</b>	Équation de Maxwell-Ampère	162
<b>Fiche 22.</b>	Analogies ultimes et synthèse	170
<b>Fiche 23.</b>	Énergie magnétique	179
<b>Fiche 24.</b>	Propagation et retard	187
<b>Fiche 25.</b>	Ondes planes et polarisation	195
<b>Fiche 26.</b>	Aspects énergétiques	203
<b>Fiche 27.</b>	Dipôles rayonnants	211
<b>Fiche 28.</b>	Champs électromagnétiques dans les conducteurs	220
<b>Fiche 29.</b>	Éléments de mathématiques n° 1	228
<b>Fiche 30.</b>	Éléments de mathématiques n° 2	236
<b>Index</b>		243
<b>Crédits iconographiques</b>		249

# Avant-propos

Avec 30 fiches resserrées, 15 pages de formulaires mathématiques, 40 exercices résolus, 60 exemples, 80 méthodes et plus de 180 illustrations, cet ouvrage ambitionne de devenir la solution de référence pour les étudiants des Licences scientifiques ainsi que les élèves des cours préparatoires spécialisés et les candidats au CAPES et à l'Agrégation de Physique. L'essentiel de l'électromagnétisme y est abordé depuis le niveau débutant jusqu'à un niveau avancé sur un mode synthétique, ludique, rigoureux, et surtout efficace pour faciliter la compréhension et la mémorisation des différents concepts. Ce sont les constants encouragements que l'auteur reçoit par ses étudiants, depuis bientôt trente ans de métier, qui l'ont persuadé que faire un ouvrage traitant d'un sujet où le nombre de livres sur le marché déborde ne serait peut-être pas complètement inutile. Constamment alimenté par la parution de concepts par paires, le contenu se distingue clairement des livres existants, le renouveau apporté étant dans la mise en parallèle entre les phénomènes électriques et magnétiques, à commencer par les champs ou encore la charge et le courant, en allant jusqu'à l'analogie entre des outils mathématiques complémentaires. Cette architecture savante ne s'arrête pas ici : elle se poursuit aujourd'hui aux plus hauts niveaux, poussant à se questionner sur la réalité ou l'utopie d'une grande théorie unificatrice. Ce livre est aussi une incitation aux étudiants à se poser des questions philosophiques, et un clin d'œil à tous ceux qui vont y découvrir une vocation et le désir de s'épanouir, plus tard, dans les hautes sphères du savoir. Afin de compléter la lecture du livre, cinq fiches annexes, traitant des sujets souvent hors programme de concours, ou encore des approfondissements d'exercices pour lecteurs chevronnés, sont à retrouver sur la page de l'ouvrage sur [dunod.com](http://dunod.com).

# Le mot de l'auteur

Ce livre est l'aboutissement de trois décennies au service de l'enseignement supérieur et de la recherche. À la suite d'un parcours de polytechnicien à Athènes, de chercheur à Athènes et à Paris Orsay, puis de professeur au sein d'une université classée parmi les premières en France pour les études en Licence, j'ai pu acquérir une vue globale sur les besoins et les faiblesses des étudiants en Licence de physique, et en tirer des conclusions. De toutes les matières charnières, l'électromagnétisme occupe une place singulière en enseignement universitaire. Construction intellectuelle de haut niveau, son enseignement en Licence est morcelé en plusieurs modules, tous redoutés au vu des outils mathématiques poussés et de l'arsenal de concepts abstraits qu'il nécessite. C'est dans ma volonté d'offrir au public ma propre vision de l'enseigner que le présent ouvrage puise ses sources. C'est une vision qui fait ses preuves dans les amphithéâtres angevins, tout comme, par le passé, sur les bancs d'autres facultés, à Rennes, à Reims et à l'étranger. Au-delà des incitations des étudiants de chaque promo, ce sont celles d'Annick et d'Éléna qui ont été l'élément déclencheur pour ce projet. Enfin et surtout, ce livre n'aurait pas pu voir le jour sans la confiance et l'accueil enthousiaste de mon éditrice Lætitia HÉRIN, les précieux conseils techniques d'Henri, et la collaboration, ô combien efficace, d'Éléna.

Ce livre est dédié à ma mère.

Michel Chrysos

Angers, novembre 2019

**Électromagnétisme** Science qui étudie la charge électrique ainsi que les forces et les champs qui lui sont associés. C'est essentiellement l'œuvre du physicien écossais James Clerk Maxwell, qui, en 1865, avança que la lumière est un phénomène ondulatoire dû à des phénomènes électriques et magnétiques.

**Champs principaux et constantes** électrique  $\vec{E}$  et magnétique  $\vec{B}$ ; déplacement électrique  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$  et excitation magnétique  $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$ ; permittivité du vide  $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$  F/m et perméabilité du vide  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  H/m; farad (F) et henry (H) sont les unités de la capacité et de l'inductance.

**Électricité, magnétisme, optique ondulatoire** Ce ne sont que des facettes de la vaste science qu'est l'électromagnétisme et non des sciences indépendantes, à l'inverse de la pensée, autrefois, de Coulomb, Ørsted, Ampère et Faraday ou encore de Fresnel, illustres prédécesseurs de Maxwell dont ce dernier réussit à synthétiser les travaux.

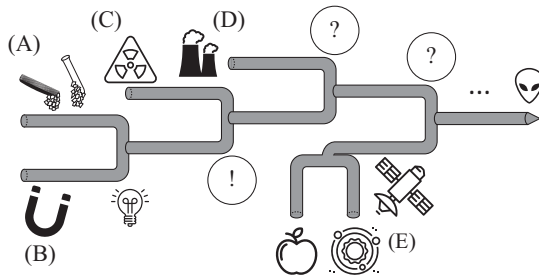
**Interaction électromagnétique** Mise en relation des phénomènes électriques et magnétiques dans un cadre théorique cohérent. Conséquence directe de la théorie de Maxwell, elle fut définitivement complétée par Einstein dont la théorie de la relativité restreinte (1905) apporta la preuve de cette mise en commun. C'est l'une des quatre interactions fondamentales et le résultat de la toute première unification.

### ***Mise en garde : forces électriques versus forces magnétiques***

Sur un plan pratique les forces électrique et magnétique se comportent très différemment et leur description se fait par des équations différentes. Les forces électriques sont produites par des charges électriques, qu'elles soient au repos ou non. À l'inverse, les forces magnétiques sont engendrées par et s'exercent sur des charges en mouvement (voir Éq. (1.2)).

## **1. Interactions fondamentales et unifications**

Tout comme l'électromagnétisme (Fig. 1.1A & B), il existe trois autres interactions fondamentales (nucléaires faible (C) et forte (D), gravitationnelle (E)) qui, elles aussi, ont des histoires plus ou moins tourmentées. Peuvent-elles, à l'instar de la théorie électromagnétique, s'unifier sous la chapelle d'une seule interaction ? Il serait légitime de



**Figure 1.1** – L'épopée de l'unification des interactions physiques

le penser : un édifice cosmique régi par une seule interaction est bien plus attrayant sur le plan philosophique qu'un ensemble d'interactions morcelées. Dans les années 1970, un édifice théorique d'une formidable complexité vit le jour, donnant lieu à une interaction électrofaible (Fig. 1.1A à C) qui unifie les forces électromagnétique et faible nucléaire. Fruit du travail de trois physiciens (S. Glashow, A. Salam et S. Weinberg, prix Nobel 1979), cette interaction prend effet à très hautes températures ( $\sim 10^{16}$  K) et franchit une étape supplémentaire dans la longue saga vers l'ultime unification. Mais il n'en est ainsi ni pour l'interaction nucléaire forte qui reste récalcitrante, ni pour la gravitation, dont l'origine demeure à ce jour mystérieuse malgré des efforts acharnés frôlant le succès à quelques reprises. Si les avis quant à l'avenir de la recherche d'une force unificatrice semblent aujourd'hui partagés, des unifications sont bel est bien présentes tout comme d'innombrables travaux sur le sujet. Le contenu de notre cours peut tout à coup paraître dérisoire au regard de l'extrême complexité de ces édifices modernes. Pour autant, ces constructions intellectuelles n'auraient pas vu le jour sans l'unification électromagnétique et l'apparition de la lumière comme l'aboutissement d'un calcul savant. C'est ce que cet ouvrage démontre à sa manière.

## 2. Gravitation

Une première étape importante dans l'épopée de l'unification fut franchie par Newton. Philosophe, mathématicien, physicien, alchimiste,



astronome et théologien anglais, Isaac Newton (1643-1727) fut le premier à saisir le caractère universel de la gravitation. C'est à la suite d'une synthèse sans précédent des travaux de Kepler sur les mouvements célestes (1619) et de Galilée sur la chute des corps (1632) que Newton jeta les bases de sa loi universelle, proclamant que la chute d'un objet sur Terre et les mouvements des corps célestes, telles les planètes, seraient un seul et même phénomène gouverné par une seule et même loi :

$$\vec{F}_{1,2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r = \underbrace{m_2}_{\text{masse d'essai}} \times \underbrace{\left(-G \frac{m_1}{r^2} \vec{e}_r\right)}_{\vec{E}_1 : \text{champ source}} \quad (1.1)$$

**Loi de gravitation universelle** Synthèse des travaux sur les mouvements célestes (Kepler) et la chute des corps (Galilée).

$\vec{F}_{1,2}$  est la force qu'un corps de masse  $m_1$  situé à l'origine,  $O$ , exerce sur un corps de masse  $m_2$  placé à une distance  $r$  de  $O$ .  $\vec{F}_{1,2}$  est aussi un produit entre une « masse d'essai »  $m_2$  et le champ gravitationnel engendré par la « masse source ».  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ , la constante de gravitation, est l'une des trois constantes universelles ( $c$ ,  $h$ ,  $G$ ).

#### **EXEMPLE.** CHUTE D'UNE POMME OU DE LA LUNE

Aussi surprenant que cela puisse paraître, la lune est « en chute libre » lors de son mouvement autour de la Terre, à la manière d'une pomme qui tombe d'un arbre (Fig. 1.1E). Les deux mouvements ne diffèrent en réalité que par leur élan : la lune a un élan bien plus important qu'une pomme ou qu'un morceau de gravier qu'on lance à l'aide d'un lance-pierre, ces derniers n'ayant pas atteint la « première vitesse cosmique », 7,9 km/s, la vitesse minimale de satellisation autour de la Terre.

#### **Remarque : Des théories apparemment exactes... et pourtant**

L'épopée de la gravitation ne s'arrête pas à Newton. Deux siècles plus tard, une deuxième révolution vit le jour, étape ô combien importante pour l'avenir des sciences : c'est l'avènement, en 1915, de l'emblématique théorie de la relativité générale avec laquelle Einstein imposa la description actuelle de la gravitation. Basée sur une perception entièrement géométrique de celle-ci, cette théorie offre la preuve qu'il ne s'agirait pas d'une force mais d'une déformation du tissu de l'espace-temps. Pour autant, malgré ces progrès

spectaculaires, la gravitation demeure encore un mystère en soi. Des paradoxes pour le moment non-résolus apparaissent en raison de son caractère classique et non quantique. Ceci rend cette théorie incompatible avec les lois de l'infiniment petit, et par conséquent avec les autres interactions, dont la description est entièrement quantique.

### 3. Oubli historique ou souci d'équité ?

À la manière du célèbre romain d'Alexandre Dumas père *Les Trois Mousquetaires*, où le quatrième d'entre eux (car ils étaient bien quatre paradoxalement) n'est pas compté dans le titre, les fameuses quatre forces fondamentales étaient cinq à l'origine. Mais dans les manuels universitaires, il est coutumier d'en compter seulement quatre car nombreux sont ceux qui considèrent que la longue saga de l'unification des interactions ne commence qu'au XX<sup>e</sup> siècle. Petit oubli historique ou décision prise dans un souci d'équité ? Si l'électricité et le magnétisme étaient comptés de façon morcelée, il aurait peut-être fallu compter aussi les forces de la chute des corps et du mouvement des corps célestes dont l'unification remonte à l'époque de Newton ; et cela en ferait beaucoup. Seraient-ce des questions seulement d'ordre sémantique ?

### 4. Équations de Maxwell

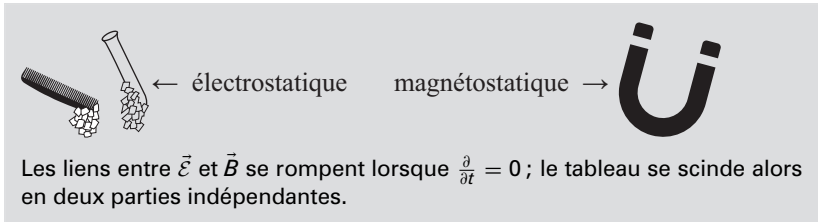
Énoncer d'ores et déjà les quatre équations de Maxwell est peut-être la meilleure façon de s'immerger dans l'électromagnétisme. On va ensuite, tout au long des fiches qui vont se succéder, les démontrer, les comprendre, et apprendre à les appliquer dans des situations physiques diverses. Les équations de Maxwell sont :

① Équation de Maxwell-Gauss $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ $(\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho)$	② Équation de Maxwell-Thomson $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
③ Équation de Maxwell-Faraday $\vec{\nabla} \wedge \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	④ Équation de Maxwell-Ampère $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t})$ $(\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t})$

**Les principaux constats autour du tableau**

$\vec{\mathcal{E}}$  et  $\vec{B}$  figurent trois fois chacun ; ②<sup>1</sup> est dépourvue de second membre ; ④ est « surchargée » ; ① et ④ comportent des *sources* (densités de charge  $\rho$  et de courant  $\vec{j}$ ) ; ② et ③ n'en comportent pas ; ① et ② contiennent un seul champ chacune ; ③ et ④ en contiennent deux.

Ainsi qu'on l'entrevoit par ce surprenant parallèle entre  $\vec{\mathcal{E}}$  et  $\vec{B}$ , il s'agit bien d'une mise en commun entre les deux champs.



### ■ Force de Lorentz, loi de Coulomb, et rôle des forces électriques

La force de Lorentz,  $\vec{f}_L$ , est d'ordinaire enseignée comme une donnée supplémentaire des quatre équations de Maxwell. C'est aussi la manière dont elle a été historiquement mise en évidence. En réalité elle en découle. Pour l'obtenir, les équations d'Euler-Lagrange et d'autres notions de mécanique analytique, qui dépassent le but de cet ouvrage, sont nécessaires. Exercée sur une charge  $q$  animée d'une vitesse  $\vec{v}$  dans un champ ( $\vec{\mathcal{E}}, \vec{B}$ ),  $\vec{f}_L$  s'écrit :

$$\vec{f}_L = q(\vec{\mathcal{E}} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (1.2)$$

La force électrique,  $q\vec{\mathcal{E}}$ , est responsable de la plupart des propriétés physicochimiques des atomes et molécules. Malgré la neutralité électrique de ces structures, des phénomènes électriques peuvent y apparaître parce que les forces électriques agissent sur leurs constituants individuels chargés. En électrostatique, la force électrique entre deux particules ponctuelles chargées est exprimée par la loi de Coulomb ; sa ressemblance à l'Éq. (1.1) est déconcertante :

1. Sir W. Thomson n'est autre que le très connu lord Kelvin (1824-1907).

$$\vec{F}_{1,2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_r = \underbrace{q_2}_{\text{charge d'essai}} \times \underbrace{\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r}_{\vec{E}_1 : \text{champ source}} \quad (1.3)$$

**Loi de Coulomb** Force de l'interaction électrostatique entre deux particules chargées (Charles-Augustin Coulomb, 1785).

$\vec{F}_{1,2}$  est la force qu'une particule ponctuelle de charge  $q_1$  située à l'origine exerce sur une particule ponctuelle de charge  $q_2$  placée à une distance  $r$ ;  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \times 10^9$  m/F est la constante de Coulomb. En accord avec l'Éq. (1.2), la loi de Coulomb est aussi un produit du type  $q\vec{E}$  entre une charge d'essai et un champ électrique source.

La force électrique est d'ordinaire bien plus intense que la force magnétique et surtout gigantesque par rapport à la gravité.

#### EXEMPLE. UNE INTENSITÉ INSOUÇONNÉE

La force électrique est d'une intensité insoupçonnée. En l'absence ne serait-ce que d'un seul électron pour chaque milliard de molécules constituant deux personnes séparées d'une distance de quelques mètres, les deux individus se verraient repoussés avec une force équivalente à plusieurs dizaines de milliers de tonnes. L'exactitude de ce chiffre est démontrée en exercice.

#### EXEMPLE. COULOMB CONTRE NEWTON

Pour deux électrons, une comparaison entre la loi de Coulomb et la loi de Newton donne, à l'aide des Éqs. (1.1) & (1.3) ( $e_0 = 1,6 \times 10^{-19}$  C,  $m_e = 9,1 \times 10^{-31}$  kg) :

$$\frac{\text{Coulomb}}{\text{Newton}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 G} \left( \frac{e_0}{m_e} \right)^2 \approx 4 \times 10^{42} \quad (1.4)$$

La gravitation ne joue donc aucun rôle à l'échelle de l'infiniment petit. En revanche, elle est la principale interaction à l'échelle astronomique. Ce revirement vient de la masse, qui est une quantité définie positive, tandis que la somme algébrique des charges électriques d'un corps céleste est quasi nulle en moyenne. La gravitation l'emporte haut la main par un effet de cumul en accord avec la devise « l'union fait la force ».

**EXERCICE**

Nous faisons l'hypothèse que le corps humain est entièrement constitué d'eau, qu'il pèse en moyenne 70 kg et que pour chaque milliard de molécules dont il est composé, un électron en est absent. Montrer que, sous ces hypothèses, deux individus séparés l'un de l'autre d'une distance de 2 m se repoussent par une force équivalente à un poids de 30 000 tonnes. Qu'en serait-il si le corps humain était entièrement fait de carbone ?

**Solution**

Sachant que sur  $10^9$  molécules, 1 électron est absent, il manque  $\frac{6 \times 10^{23}}{10^9} = 6 \times 10^{14}$  électrons par mole d'eau (18 g). En d'autres termes, 18 g d'eau seraient chargés positivement avec une charge de  $6 \times 10^{14} \times 1,6 \times 10^{-19} = 9,6 \times 10^{-5}$  C. Le corps humain aurait alors une charge excédentaire de  $9,6 \times 10^{-5} \times \frac{70 \times 1000}{18} = 0,37$  C. Les deux individus seraient repoussés par une force de  $\frac{9 \times 10^9 \times 0,37^2}{2^2} = 3 \times 10^8$  N, soit l'équivalent d'un poids de  $\frac{3 \times 10^8}{10} = 3 \times 10^7$  kg = 30 000 tonnes. Si le corps était constitué de  $^{12}_6\text{C}$ , on aurait 12 g au lieu de 18 g par mole, soit l'équivalent d'un poids de  $\left(\frac{18}{12}\right)^2 \times 30\,000 = 67\,500$  tonnes.

**EXERCICE**

Le but est de montrer que, lorsque  $v \ll c$ , l'action du champ magnétique est négligeable devant celle du champ électrique.

On étudie la propagation des ondes dites hertziennes dans la haute atmosphère, zone composée de plasma (électrons libres, ions positifs et molécules neutres). Du point de vue macroscopique, le plasma est localement neutre et suffisamment raréfié pour que les interactions entre les particules n'y interviennent pas. Montrer que les forces magnétiques exercées sur les particules de plasma peuvent être négligées.

**NB :**  $\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{\mathcal{E}}$  ;  $\frac{\omega}{k} = \frac{c}{\eta}$ ,  $\eta \leq 1$  étant l'indice de réfraction du milieu. Les trois vecteurs indiqués sont, dans l'ordre : le champ magnétique, le vecteur d'onde et le champ électrique de l'onde hertzienne.

### Solution

La force exercée sur une particule est donnée par l'Éq. (1.2). Or,  $\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{\mathcal{E}}$ .  
 Ainsi,  $\frac{\|q\vec{v} \wedge \vec{B}\|}{\|q\vec{\mathcal{E}}\|} = \eta \frac{v}{c} \sin \angle(\vec{k}, \vec{\mathcal{E}}) \sin \angle(\vec{v}, \vec{B}) \ll 1$ .

### EXERCICE

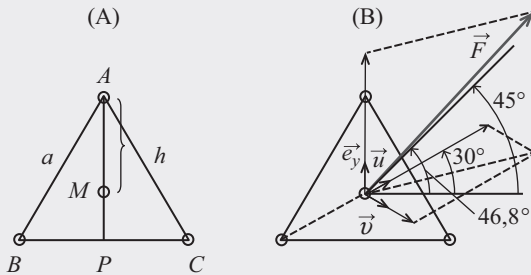


Figure 1.2 – (A) énoncé et (B) résultat graphique

Trois charges ponctuelles de magnitudes 5,  $-5$  et 2 C sont fixées aux sommets, respectivement,  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'un triangle équilatéral de côté  $a = 10$  cm. On cherche à calculer la force exercée sur une charge ponctuelle de  $-1$  C placée au centre  $M$  du triangle.

1. Exprimer la distance  $AM$  en fonction de  $a$  (Fig. 1.2A).
2. Calculer la force en coordonnées cartésiennes puis en coordonnées polaires. L'illustrer graphiquement.

## Solution

- Soit  $h$  la distance  $(AM) = (BM) = (CM)$ . Le théorème de Pythagore appliqué au triangle  $APB$  donne  $AP = \sqrt{(AB)^2 - (BP)^2} = \sqrt{a^2 - (\frac{a}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ . Appliqué au triangle  $MPB$ , ce même théorème fournit  $MP = \sqrt{(MB)^2 - (BP)^2} = \sqrt{h^2 - \frac{a^2}{4}}$ . Or,  $(AM) = (AP) - (MP)$  ce qui donne  $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a - \sqrt{h^2 - \frac{a^2}{4}}$ . En élevant au carré cette expression, on a  $h^2 = \frac{3}{4}a^2 + h^2 - \frac{a^2}{4} - \sqrt{3}a\sqrt{h^2 - \frac{a^2}{4}}$ , soit  $\frac{a}{2} = \sqrt{3}\sqrt{h^2 - \frac{a^2}{4}}$ . En élevant de nouveau au carré, il vient  $h = \frac{a}{\sqrt{3}}$ . Pour calculer  $h$ , il existe aussi des méthodes qui s'affranchissent du théorème de Pythagore. Pour un approfondissement sur deux d'entre elles, rendez-vous sur [dunod.com](http://dunod.com).
- Soit  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ , un repère dont l'origine est au centre du triangle et dont les axes  $x$  et  $y$  sont dirigés respectivement vers la droite et le haut. La force  $\vec{F}(M)$  est  $\vec{F}_{AM} + \vec{F}_{BM} + \vec{F}_{CM}$ , soit :

$$\vec{F}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 h^2} (|q_A||q_M|\vec{e}_y + |q_B||q_M|\vec{u} + |q_C||q_M|\vec{v}) \quad (1.5)$$

En effet, la force qu'exerce sur  $q_M$  la charge située en  $A$  est attractive car  $q_A$  et  $q_M$  ont des signes opposés ; ainsi,  $\vec{F}_{AM}$  se dirige selon l'axe des ordonnées. Par un raisonnement similaire, les vecteurs unitaires  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ont pour point d'application le centre  $M$  et se dirigent respectivement selon  $\vec{BM}$  et  $\vec{MC}$ . Après analyse vectorielle  $\vec{u} = \cos \frac{\pi}{6} \vec{e}_x + \sin \frac{\pi}{6} \vec{e}_y = \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_x + \frac{1}{2} \vec{e}_y$  et  $\vec{v} = \cos \frac{\pi}{6} \vec{e}_x - \sin \frac{\pi}{6} \vec{e}_y = \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_x - \frac{1}{2} \vec{e}_y$ , puis substitution  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0 h^2} = 27 \times 10^{11}$  SI, on en déduit  $F_x = 27 \times 10^{11} \times \frac{7}{2} \sqrt{3} \text{ N} = 1,64 \times 10^{13} \text{ N}$  et  $F_y = 27 \times 10^{11} \times \frac{13}{2} \text{ N} = 1,75 \times 10^{13} \text{ N}$ . En coordonnées polaires,  $\|\vec{F}(M)\| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$  et  $\theta = \arctan \frac{F_y}{F_x}$ . Il vient :

$$\|\vec{F}(M)\| = 2,40 \times 10^{13} \text{ N} ; \quad \theta = \frac{1,75}{1,64} = 46,8^\circ$$

$\vec{F}$  et la façon de l'obtenir sont illustrés en Fig. 1.2B.