PHYSIQUE CHIMIE

BCPST 2

EXERCICES INCONTOURNABLES

I. CÔTE | C. CARLIER | L. LEBRUN | N. SARD | M. DÉCOMBE VASSET

PHYSIQUE CHIMIE

BCPST 2

EXERCICES INCONTOURNABLES

2e édition

DUNOD

Conception graphique de la couverture : Hokus Pokus Créations

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-077957-4

Sommaire

Partie 1 : Thermodynamique

1 **Travail des forces pressantes** 7
2 **Description des systèmes fermés de composition constante** 21
3 **Description des systèmes fermés de composition variable** 37
4 **Changement d'état d'un corps pur** 57
5 **Changement d'état d'un mélange** 71
6 **Grandeurs standard de réaction et variance** 87
7 **Les principes appliqués à la réaction chimique** 97
8 **Déplacement d'équilibre** 111
9 **Complexation** 121
10 **Précipitation** 141
11 **Oxydoréduction** 162
12 **Diagrammes potentiel-pH** 178

Partie 2 : Phénomènes de transport

13 **Conduction électrique** 197
14 **Conduction thermique** 208
15 **Diffusion de particules** 229
16 **Transport de masse et d'énergie par convection** 243

Partie 3 : Signal et rayonnement

17 **Oscillateurs libres amortis** 259
18 **Régime sinusoïdal forcé** 272
19 **Analyse de signaux** 293

Partie 4 : Mécanique des fluides

20 **Statique des fluides** 309
21 **Introduction à la dynamique des fluides** 322
22 **Dynamique des fluides parfaits** 330
23 **Dynamique des fluides réels** 347

Partie 5 : Mécanique

24 Conditions d'équilibre d'un solide **367**
25 Forces conservatives. Énergie potentielle **380**

Partie 6 : Chimie organique

26 Réactions d'addition-élimination **397**
27 Création de liaisons C-C et C=C par substitution ou addition nucléophiles **415**
28 Chimie radicalaire **445**

Avant-propos

Cet ouvrage est destiné aux étudiants de BCPST2 et a pour but de les aider à préparer à la fois les écrits et les oraux des nouveaux concours BCPST.
Les exercices (dont le niveau de difficulté est repéré par une à plusieurs étoiles) s'inspirent de sujets de concours récents mais la plupart ont été adaptés pour s'inscrire dans l'esprit du nouveau programme de BCPST2. Les exercices sont progressifs et permettent aux étudiants de vérifier qu'ils maîtrisent complètement chaque chapitre.
Nous avons choisi de répartir les chapitres selon l'ordre du programme officiel. Les tableaux donnés en début de chapitre donnent des capacités exigibles du programme ainsi que d'autres capacités que nous avons jugées utiles pour aborder sereinement toutes les notions nécessaires à la réussite des écrits et oraux des concours.
Certains exercices demandent des connaissances du programme de première année, que les étudiants doivent maîtriser. Au sein d'une même partie, les chapitres sont organisés de telle sorte que les méthodes développées dans un chapitre doivent être assimilées avant d'aborder le suivant.
Nous proposons parfois des applications numériques très détaillées puisque, dans certains sujets de concours, la calculatrice est interdite : il est ainsi conseillé aux étudiants de s'entraîner le plus possible au calcul de tête et à la vérification des formules par analyse dimensionnelle.
Dans les chapitres sur les transports, les termes « permanents » et « stationnaires » sont confondus (car ils conduisent à la même résolution mathématique).
Nous tenons à remercier Anne Vidal pour sa relecture avisée.

Pour bien utiliser cet ouvrage :

: Signale une proposition de rédaction.

: Met en avant un piège ou une erreur à éviter.

Point méthode : Met en avant une méthode qu'il convient de maîtriser.

Remarque : Donne des précisions supplémentaires.

Explication : Détaille un développement qui peut se révéler délicat.

Rappel : Donne des notions vues en cours.

Point mathématique : Détaille des résolutions mathématiques qui ne sont pas indispensables dans la rédaction.

Bon travail, bon courage et bonne chance pour les concours ! Les Auteurs

« La chance ne sourit qu'aux esprits bien préparés » . Louis Pasteur

Partie 1

Thermodynamique

CHAPITRE 1

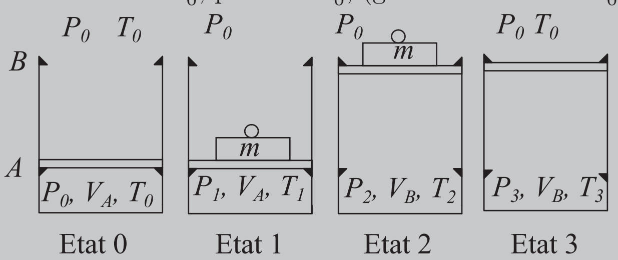
Travail des forces pressantes

Capacités à acquérir	Exercices
Établir un bilan de forces exercées sur la paroi d'un piston mobile.	1.1
Interpréter la condition d'équilibre mécanique.	
Calculer le travail par découpage en travaux élémentaires et sommation sur un chemin donné (monobare, isobare, isotherme d'un gaz parfait).	1.1, 1.2, 1.4 et 1.5
Interpréter géométriquement le travail des forces de pression dans un diagramme de Clapeyron.	1.1, 1.3 et 1.4

Point méthode : Pour exprimer le travail lors d'une transformation, si la transformation est irréversible, on part de $\delta W = -P_{\text{ext}} dV$, on regarde comment varie P_{ext} (nature de la transformation, par exemple monobare, P_{ext} est constante) puis on intègre. Si la transformation est réversible, le travail élémentaire s'écrit : $\delta W = -PdV$, on utilise l'équation d'état pour trouver l'expression de P, on intègre en ne faisant sortir de l'intégrale que les grandeurs constantes (nature de la transformation : par exemple, isotherme, T est constante et pourra sortir de l'intégrale).

Exercice 1.1 : Masse, piston et gaz parfait (ENSTIM) **

On imagine un cylindre aux parois diathermanes (perméables à la chaleur), fermé par un piston. Le piston, de masse négligeable, peut glisser sans frottement entre 2 cales A et B, sa section est S. Dans l'état initial, le piston est en A, le cylindre renferme un volume V_A d'air supposé gaz parfait, à la température de l'extérieur T_0, pression P_0, (gaz dans l'état 0 : P_0, V_A, T_0).



On place une masse m sur le piston et on chauffe très doucement le gaz par un moyen approprié, non représenté sur le schéma, jusqu'à ce que le piston décolle juste de la cale A (gaz dans l'état 1 : P_1, V_A, T_1). Puis, on maintient le chauffage jusqu'à ce que le piston arrive juste en B (gaz dans l'état 2 : P_2, V_B, T_2), le chauffage est alors arrêté. On ôte m et on laisse refroidir l'ensemble jusqu'à ce que le piston décolle juste de B (gaz dans l'état 3 : P_3, V_B, T_3). On laisse toujours refroidir jusqu'à la température T_0, alors, le piston revient en A (gaz dans l'état 0), le cycle est terminé.

Données : $V_B = 1,0$ L, $V_A = 330$ mL, $T_0 = 300$ K, $P_0 = 1,0$ bar, $m = 10$ kg, $S = 100$ cm^2, $g = 10$ N.kg^{-1}, $R = 8,3$ J.K^{-1}.mol^{-1}.

1. Quelle est la caractéristique commune à toutes les transformations ?
2. Quelle est la nature de la transformation de 0 à 1 subie par le gaz ?
3. Exprimer la pression P_1 et la température T_1 en fonction de P_0, T_0, m, g, S. Faire l'application numérique.
4. Quelle est la nature de la transformation 1 à 2 subie par le gaz ?
5. Exprimer la température T_2 en fonction de T_1, V_A, V_B. Faire l'application numérique.
6. Exprimer le travail W_1^2 reçu par le gaz au cours de cette transformation en fonction de P_1, V_B et V_A.
7. Quelles sont les natures des transformations 2 à 3 et 3 à 0 subies par le gaz ?
8. Exprimer les travaux W_2^3 et W_3^0 en fonction de P_0, V_B et V_A.
9. Exprimer le travail W échangé par le système avec l'extérieur, au cours du cycle, en fonction de m, g, V_A, V_B, S. Faire l'application numérique. Commenter le signe.
10. Tracer l'allure du diagramme de Clapeyron d'un cycle.
11. Retrouver, d'après le diagramme, le travail W calculé précédemment.

1. Le piston se déplace sans frottement, les transformations se font lentement. On peut donc supposer qu'elles sont toutes réversibles.

2. La transformation 0 à 1 subie par le gaz est isochore réversible.

La transformation n'est pas monobare : la pression extérieure n'est pas constante : lorsque le piston est en contact avec les cales, la réaction de celles-ci joue dans la pression extérieure puis lorsque le piston décolle, la réaction n'entre plus dans le bilan des forces s'exerçant sur le piston : la pression extérieure est alors différente.

3. Dans le référentiel d'étude supposé galiléen, on traduit l'équilibre du piston dans l'état 1, $\sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}} = \overrightarrow{0}$, ce piston étant soumis à son poids et aux forces pressantes dues à l'air enfermé dans le cylindre et à l'atmosphère. Lorsque l'on projette sur l'axe vertical ascendant, on a :

$$P_1 S - mg - P_0 S = 0.$$

On obtient ainsi :

$$P_1 = P_0 + \frac{mg}{S} = 1,0 \cdot 10^5 + \frac{10 \times 10}{100 \cdot 10^{-4}} = 1,1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Utilisons la loi des gaz parfaits dans l'état 0 et dans l'état 1 :

$$P_0 V_A = nRT_0 \quad et \quad P_1 V_A = nRT_1$$

En faisant le rapport membre à membre, nous obtenons :

$$T_1 = T_0 \frac{P_1}{P_0} = T_0 \left(1 + \frac{mg}{SP_0}\right) = 300 \times \left(1 + \frac{10 \times 10}{100 \cdot 10^{-4} \times 1,0 \cdot 10^5}\right) = 330 \text{ K}$$

4. La transformation 1 à 2 est réversible donc à chaque instant, la pression du gaz vaut P_1. La transformation est donc isobare réversible. On a ainsi $P_2 = P_1$.

5. Appliquons l'équation d'état des gaz parfaits à l'état 2 : $P_1 V_B = nRT_2$. On a de plus $P_1 V_A = nRT_1$ donc $\frac{T_2}{T_1} = \frac{V_B}{V_A}$ donc $T_2 = T_1 \frac{V_B}{V_A}$

$$T_2 = 330 \times \frac{1}{0,330} = 1000 \text{ K}$$

6. La transformation est réversible, $\delta W = -PdV$, et isobare, la pression du système vaut P_1 donc : $W_1^2 = -P_1(V_B - V_A)$.

7. La transformation 2 à 3 est isochore réversible. La transformation 3 à 0 est réversible et à chaque instant, la pression du système vaut P_0 donc la transformation 3 à 0 est isobare.

8. $W_2^3 = 0$ J car la transformation est isochore. Par analogie avec la question 5 : $W_3^0 = -P_0(V_A - V_B)$.

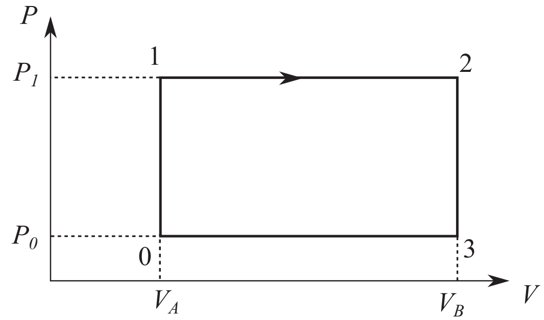
9. Le travail sur tout le cycle est la somme des travaux des différentes transformations : $W = W_0^1 + W_1^2 + W_2^3 + W_3^0$.

$$W = -P_1(V_B - V_A) - P_0(V_A - V_B) = (P_1 - P_0)(V_A - V_B) = \frac{mg}{S}(V_A - V_B)$$

$$W = \frac{10 \times 10}{100 \cdot 10^{-4}}(0,330 - 1,0) \cdot 10^{-3} = -6,7 \text{ J}$$

Le travail est négatif : le système cède du travail au milieu extérieur, c'est un moteur.

10. Le cycle est constitué de deux isochores et de deux isobares :



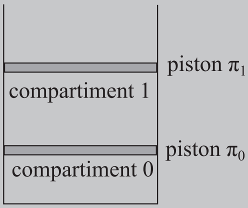
11. Le cycle est décrit dans le sens des aiguilles d'une montre, il est donc moteur. Le travail est l'opposé de l'aire du cycle :

$$W = -(P_1 - P_0)(V_B - V_A) = (P_1 - P_0)(V_A - V_B)$$

On retrouve bien la même expression que précédemment.

Exercice 1.2 : Transformations couplées (CCP) **

On considère un dispositif expérimental constitué d'un cylindre vertical ouvert dans l'atmosphère (la pression atmosphérique sera supposée constante), aux parois indéformables, de section S, dans lequel deux pistons de masse et d'épaisseur négligeables peuvent se déplacer librement. Ces deux pistons, notés π_0 et π_1, définissent deux compartiments étanches dans le cylindre. Le piston π_0 est le piston inférieur (voir figure ci-dessous). On utilisera le symbole 0 pour repérer les grandeurs relatives au compartiment inférieur et le symbole 1 pour repérer les grandeurs relatives au compartiment supérieur. On appellera longueur du compartiment 0 la distance qui sépare le fond du cylindre du piston π_0, et longueur du compartiment 1 la distance qui sépare les deux pistons.
On supposera dans toute la suite que les frottements lors du déplacement des pistons sont totalement négligeables du point de vue énergétique.



Par ailleurs, un système mécanique permet de bloquer ou de débloquer le mouvement de chacun des pistons sans modifier la géométrie du système.
Le compartiment inférieur contient du dioxygène assimilé à un gaz parfait. Le compartiment supérieur contient du diazote également assimilé à un gaz parfait. Les parois du cylindre et le piston π_1 sont perméables à la chaleur. Le piston π_0 est calorifugé.

Données : Section du cylindre : $S = 1,0$ cm^2 ; accélération de la pesanteur : $g = 10$ m.s^{-2} ; pression atmosphérique : $P_{\text{atm}} = 1,0 \cdot 10^5$ Pa ; constante des gaz parfaits : $R = 8,3$ J.K^{-1}.mol^{-1}.

On bloque le piston π_0. Le piston π_1 peut se déplacer librement. Le dispositif expérimental est alors dans l'état d'équilibre noté A.
Le dioxygène contenu dans le compartiment 0 est caractérisé par une pression $P_0^A = 1,0 \cdot 10^5$ Pa et une température $T_0^A = 300$ K. La longueur du compartiment 0 est alors $d_0^A = 0,20$ m.
Le diazote contenu dans le compartiment 1 est caractérisé par une pression

$P_1^A = 1,0 \cdot 10^5$ Pa et une température $T_1^A = 300$ K. La longueur du compartiment 1 est alors $d_1^A = 0,15$ m.
On place alors le cylindre au contact d'une source (thermostat) à la température $T_S = 600$ K. Chacun des sous-systèmes, constitué par chacun des gaz (repéré comme les compartiments par 0 et 1), atteint un nouvel état d'équilibre (B).
On note T_0^B, P_0^B et d_0^B respectivement la température du dioxygène (gaz 0), la pression du dioxygène et la hauteur du compartiment 0 dans cet état d'équilibre.
De la même façon T_1^B, P_1^B et d_1^B représentent la température du diazote (gaz 1), la pression du diazote et la hauteur du compartiment 1 dans son nouvel état d'équilibre.
1. Calculer la quantité de matière n_0 de dioxygène contenue dans le compartiment 0 et la quantité de matière n_1 de diazote contenue dans le compartiment 1.
2. Caractériser la transformation subie par le dioxygène. En déduire T_0^B, P_0^B et d_0^B.
3. Caractériser la transformation subie par le diazote. En déduire T_1^B, P_1^B et d_1^B.
4. Calculer la quantité d'énergie reçue par transfert mécanique (travail) par le dioxygène ($W^0_{A\to B}$), et par le diazote ($W^1_{A\to B}$) au cours de la transformation.

1. Le piston π_0 est bloqué. Les compartiments 0 et 1 sont des systèmes fermés. D'après la loi des gaz parfaits :

$$n_0 = \frac{P_0^A V_0^A}{RT_0^A} = \frac{P_0^B V_0^B}{RT_0^B}$$

$$n_1 = \frac{P_1^A V_1^A}{RT_1^A} = \frac{P_1^B V_1^B}{RT_1^B}$$

Dans l'état A, le compartiment 0 a pour volume : $V_0^A = d_0^A \times S$ ($= V_0^B$, le piston π_0 étant bloqué, le volume du compartiment 0 reste constant autour de la transformation).
Dans l'état A, le compartiment 1 a pour volume : $V_1^A = d_1^A \times S$.
En remplaçant dans les relations précédentes, il vient :

$$n_0 = \frac{P_0^A d_0^A S}{RT_0^A} = \frac{1,0 \cdot 10^5 \times 0,20 \times 1,0 \cdot 10^{-4}}{8,3 \times 300} = 8,0 \cdot 10^{-4} \text{ mol}$$

$$n_1 = \frac{P_1^A d_1^A S}{RT_1^A} = \frac{1,0 \cdot 10^5 \times 0,15 \times 1,0 \cdot 10^{-4}}{8,3 \times 300} = 6,0 \cdot 10^{-4} \text{ mol}$$

2. Pour O_2, dans le compartiment 0, le volume est constant, la transformation est isochore.

$$V_0^A = V_0^B \quad \Leftrightarrow \quad d_0^A \times S = d_0^B \times S \quad \Leftrightarrow \quad d_0^A = d_0^B$$

Le système est au contact d'un thermostat à la température T_S et, les parois du cylindre permettant les échanges thermiques, à l'équilibre en B on a :

$T_0^B = T_S = 600$ K.
Ainsi d'après la loi des gaz parfaits :

$$\frac{P_0^A V_0^A}{RT_0^A} = \frac{P_0^B V_0^B}{RT_0^B} \quad \Leftrightarrow \quad P_0^B = P_0^A \frac{T_0^B}{T_0^A}$$

$$P_0^B = 1,0 \cdot 10^5 \times \frac{600}{300} = 2,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

3. Pour N_2, dans le compartiment 1, le piston π_1 est libre de se mouvoir et la pression extérieure est égale à la pression atmosphérique donc $P_{\text{ext}} = P_{\text{atm}} = \text{cste}$. La transformation est monobare. Quand on traduit l'équilibre mécanique dans l'état A et dans l'état B, nous avons :

$$P_1^A = P_1^B = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Le système est au contact d'un thermostat à la température T_S et, les parois du cylindre et du piston π_1 permettant les échanges thermiques, à l'équilibre en B on a : $T_1^B = T_S = 600$ K.
Enfin d'après la loi des gaz parfaits :

$$\frac{P_1^A V_1^A}{RT_1^A} = \frac{P_1^B V_1^B}{RT_1^B} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{P_1^A d_1^A S}{RT_1^A} = \frac{P_1^B d_1^B S}{RT_1^B}$$

$$d_1^B = d_1^A \frac{T_1^B}{T_1^A} = 0,15 \times \frac{600}{300} = 0,30 \text{ m}$$

4. Expression du travail lors de la transformation $A \to B$:

$$W_{A\to B} = -\int_A^B P_{\text{ext}} dV$$

Pour O_2 dans le compartiment π_0 la transformation est isochore donc $V_0 = \text{cste}$ et ainsi $dV_0 = 0$:

$$W_{A\to B}^0 = 0 \text{ J}$$

Pour N_2, dans le compartiment π_1, la transformation est monobare donc :

$$P_{\text{ext}} = P_{\text{atm}} = \text{cste}$$

$$W_{A\to B}^1 = -\int_A^B P_{\text{ext}} dV_1 = -P_{\text{atm}} \int_A^B dV_1$$

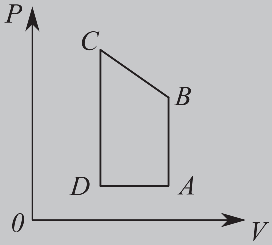
$$W_{A\to B}^1 = -P_{\text{atm}}(V_1^B - V_1^A)$$

$$W_{A\to B}^1 = -P_{\text{atm}} \times S(d_1^B - d_1^A)$$

$$W_{A\to B}^1 = -1,0 \cdot 10^5 \times 1,0 \cdot 10^{-2} \times (0,30 - 0,15) = -150 \text{ J}$$

Exercice 1.3 : Cœur et puissance mécanique (Agro-Véto) *

La circulation du sang dans l'organisme est assurée par le cœur, qui joue le rôle de pompe. Le cycle cardiaque, représenté dans un diagramme de Watt (P, V) concerne le ventricule gauche du cœur, principale partie active du cœur du point de vue mécanique ; ce cycle est représenté sur le graphe ci-dessous, qui décrit l'évolution de la pression et du volume du sang circulant dans ce ventricule :



$V_A = V_B = 150$ cm^3 ; $V_C = V_D = 90$ cm^3 ; $P_A - P_0 = P_D - P_0 = 10$ mmHg ; $P_B - P_0 = 80$ mmHg ; $P_C - P_0 = 120$ mmHg

où $P_0 = 760$ mmHg représente la pression atmosphérique.
On rappelle que 760 mmHg $= 1{,}013 \cdot 10^5$ Pa. On admettra qu'on peut considérer le cycle comme étant décrit de manière réversible.

1. Préciser, en justifiant rapidement la réponse, dans quel sens le cycle est décrit. La pression P_0 joue-t-elle un rôle dans le raisonnement ?
2. Déterminer littéralement, en fonction de V_A, V_C, P_A, P_B et P_C le travail fourni par le cœur au cours de chaque cycle.
3. Déterminer numériquement le travail fourni par le cœur au cours de chaque cycle.
4. Pour un cœur décrivant 70 cycles par minute, quelle est la puissance fournie par le cœur ?

1. Le système étudié est le sang dans le cœur, il s'agit d'un système récepteur, qui reçoit du travail afin de pouvoir circuler. Le cœur est une pompe qui permet au sang de circuler. Le cycle est donc récepteur, il est décrit dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. La pression atmosphérique n'a aucun rôle dans le rôle joué par le cœur car elle n'intervient pas dans le cycle décrit !

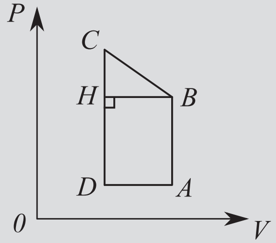
2. Comme les transformations sont réversibles, le travail reçu par le sang est égal à l'aire du cycle.

Ce raisonnement n'est vrai que si les transformations sont réversibles.

Le travail est donc égal à :

$$W = (P_B - P_A)(V_A - V_C) + \frac{1}{2}(P_C - P_B)(V_A - V_C)$$

Explication : L'aire a été décomposée en aire du rectangle et aire du triangle :



$$W = (V_A - V_C)\left((P_B - P_A) + \frac{1}{2}(P_C - P_B)\right)$$

3. L'énoncé donne des pressions différentielles, avec lesquelles on peut exprimer le travail :

$$W = (V_A - V_C)\left((P_B - P_0 - P_A + P_0) + \frac{1}{2}(P_C - P_0 - P_B + P_0)\right)$$

$$W = (150-90)\cdot 10^{-6} \times \left((80 - 10) + \frac{1}{2} \times (120 - 80)\right) \times \frac{1,013 \cdot 10^5}{760} = 0,72 \text{ J}$$

Bien mettre les pressions en Pa et les volumes en m^3 pour avoir un travail en joule.

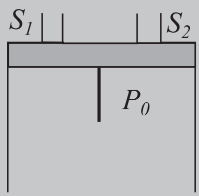
4. La puissance fournie par le cœur en 1 minute est égale à :

$$\mathcal{P} = \text{nombre de cycles} \times \frac{W}{\Delta t} = 70 \times \frac{0,72}{60} = 0,84 \text{ W}$$

La durée Δt s'exprime en seconde.

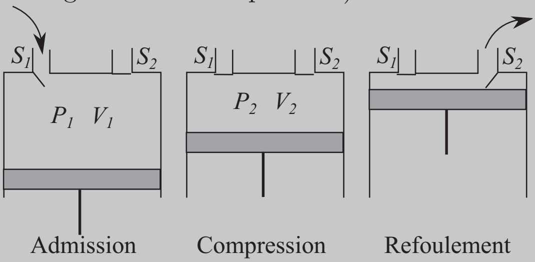
Exercice 1.4 : Compresseur à piston (ENGEES)*

Le compresseur à piston est constitué d'un cylindre, muni de deux soupapes S_1 et S_2, dans lequel coulisse un piston dont la face externe est soumise à une pression extérieure constante P_0.
À l'état initial, le piston est contre le fond du cylindre.



Dans le compresseur, de l'air décrit une transformation cyclique pouvant se décomposer en plusieurs étapes :

- *Phase d'entrée ou d'admission* : S_1 ouverte, S_2 fermée. Du gaz est injecté dans le cylindre à la pression P_1 et à la température T_1 constantes jusqu'au volume V_1 du cylindre (état A) ;
- *Phase de compression* : S_1 fermée, S_2 fermée. Le gaz admis est alors comprimé, de manière infiniment lente, à la pression P_2 et à la température T_2 jusqu'au volume V_2 du cylindre (état B) ;
- *Phase de refoulement ou de sortie* : S_1 fermée, S_2 ouverte. Le gaz, à la pression P_2 et à la température T_2 , s'échappe, le piston revient dans sa position initiale.
- *Phase de commutation* : S_1 ouverte, S_2 fermée. On revient dans l'état initial (entrée du gaz dans le compresseur).



1. Représenter le diagramme de Watt donnant la pression P du gaz dans le cylindre en fonction du volume V du cylindre qui lui est offert pour un cycle (aller-retour) du piston.
2. Calculer le travail W_0 de la pression extérieure.
3. Pour chacune des phases de fonctionnement du compresseur, exprimer le travail reçu par le fluide.
On appelle travail de transvasement W_{tr}, le travail total reçu par le gaz lors d'un aller-retour du piston.

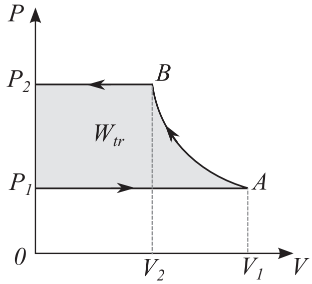
4. En utilisant l'intégration par partie de $\int_A^B d(PV)$, montrer que le travail de transvasement s'écrit : $W_{\text{tr}} = \int_A^B V dP$.

5. Quel est le signe de ce travail ? Comment peut-on le déterminer graphiquement ?

1. Les phases d'admission et de refoulement correspondent à des phases isobares.

Remarque : Le diagramme de Clapeyron donne la pression du fluide en fonction du volume du fluide pour un système fermé (de masse constante). Ici, dans le cylindre, la masse de fluide varie : le système est ouvert et on raisonne alors avec le diagramme de Watt.

Le gaz n'a pas effectué un cycle contrairement au piston qui a effectué un aller-retour.



2. Le travail de la pression extérieure est nul sur un aller-retour du piston :

$$W_0 = -P_0\,(V_1 - 0) - P_0\,(V_2 - V_1) - P_0\,(0 - V_2)$$
$$W_0 = 0 \text{ J}$$

3. Pour la phase d'admission, la pression du gaz reste constante et vaut P_1. L'expression du travail reçu par le gaz est :

$$W_{\mathrm{adm}} = -P_1\,(V_1 - 0) = -P_1 V_1$$

Pour la phase de compression, la transformation est réversible, la pression du gaz varie à chaque instant et on a $P_{\mathrm{ext}} = P$.
L'expression du travail reçu par le gaz est :

$$W_{\mathrm{comp}} = -\int_{V_1}^{V_2} PdV$$

Remarque : Lors de la phase de compression, le système est fermé.

Pour la phase de refoulement, la pression du gaz reste constante et vaut P_2. L'expression du travail reçu par le gaz est :

$$W_{\mathrm{ref}} = -P_2\,(0 - V_2) = P_2 V_2$$

4. Calculons le travail total W_{tr} reçu par le gaz :

$$W_{\mathrm{tr}} = W_{\mathrm{adm}} + W_{\mathrm{comp}} + W_{\mathrm{ref}}$$
$$W_{\mathrm{tr}} = -P_1 V_1 - \int_A^B PdV + P_2 V_2$$

Notons que $P_2 V_2 - P_1 V_1 = \displaystyle\int_A^B d(PV)$, ainsi l'expression précédente du travail de transvasement devient :

$$W_{\mathrm{tr}} = \int_A^B d(PV) - \int_A^B PdV$$

On utilise l'intégration par parties suivante :

$$\int_A^B d(PV) = \int_A^B VdP + \int_A^B PdV$$

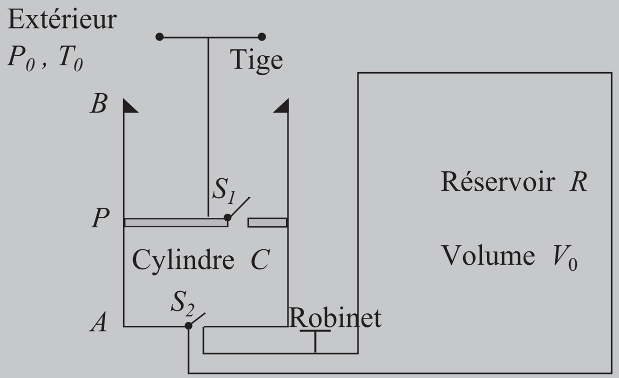
Le travail de transvasement a alors pour expression :

$$W_{\text{tr}} = \int_A^B V dP$$

5. Ce travail est positif puisqu'on somme des aires positives ($dP > 0$), il est donc reçu par le gaz.
Graphiquement il correspond à l'aire du cycle du piston dans le diagramme de Watt (voir diagramme dans la question 1).

Exercice 1.5 : Pompe à vide (ENSTIM)***

Le schéma suivant représente, en coupe, un réservoir R, un cylindre C (leurs parois sont diathermanes, c'est-à-dire perméables à la chaleur) et un piston P dont la course est limitée par le fond A et la cale B.



Quand le piston est en B, le volume du cylindre est V_B.
Le système est, de plus, muni de deux soupapes : S_1 permettant le passage du gaz uniquement de C vers l'extérieur, S_2 uniquement de R vers C, et ce, dès que S_1 est fermée.
Le cylindre est relié, par un tube de volume négligeable devant les autres volumes du système, au réservoir R de volume V_0, très supérieur à V_B, contenant de l'air, supposé gaz parfait, dans lequel on souhaite « faire le vide ».
Dans l'état initial, le piston est en B, le cylindre et le réservoir contiennent de l'air à la pression atmosphérique P_0 et à la température T_0. On pousse le piston jusqu'en A exactement contre le fond (on considère qu'ici $V_A = 0$) et on le ramène en B assez lentement pour que la température reste T_0.
1. Expliquer les différents transferts de gaz au cours de cet aller-retour. Montrer que la pression P_1 dans R quand le piston revient en B est :

$$P_1 = P_0 \frac{V_0}{V_0 + V_B}.$$

2. Exprimer le travail nécessaire pour cet aller-retour en distinguant le travail à l'aller et le travail au retour.

3. Si les transferts de gaz s'effectuent encore de la même façon, exprimer littéralement la pression P_2 après un deuxième aller-retour du piston.
4. Exprimer le travail nécessaire pour effectuer ce deuxième aller-retour.
5. Donner, dans ce cas, la forme générale de P_n après le n-ième aller-retour. Quelle est la limite de P_n quand $n \to \infty$?
6. Quel est, en supposant disposer d'une pompe idéale ($V_A = 0$), le travail théorique minimum nécessaire pour faire le vide parfait dans R ?
On donne $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{V_0}{V_0 + V_B} \right)^n = 1 + \frac{V_0}{V_B}$.
7. En réalité, quand le piston est en A, le volume V_A entre le piston et le fond n'est pas nul. La limite théorique précédente ne peut pas être atteinte. Pourquoi ? Déterminer la véritable limite théorique de cette pompe à vide. Pourquoi appelle-t-on V_A le « volume nuisible » ?

1. Lorsqu'on pousse le piston jusqu'en A, la totalité de l'air présent dans le cylindre C s'échappe par la soupape S_1.
Quand on ramène le piston en B, une partie du gaz du réservoir va dans le cylindre grâce à la soupape S_2.
On peut considérer alors que le gaz contenu dans l'ensemble {cylindre + réservoir} constitue un système fermé. Ce gaz est alors soumis à une détente isotherme (T_0) réversible passant de la pression P_0 à la pression P_1 dans un volume V_0 à un volume $V_0 + V_B$. On peut donc écrire :

$$P_0 V_0 = P_1 \left(V_0 + V_B \right)$$

$$P_1 = \frac{P_0 V_0}{V_0 + V_B}$$

2. À l'aller, la transformation est irréversible car de l'air s'échappe par S_1.
Le travail élémentaire s'exprime alors par la relation : $\delta W_{\text{aller}} = -P_{\text{ext}} dV$ avec $P_{\text{ext}} = P_0$.
Soit $W_{\text{aller}} = -P_0 \left(0 - V_B \right) = P_0 V_B$.
Au retour, la transformation est isotherme réversible dans le système fermé {cylindre + réservoir}. Le gaz passe de la pression P_0 à la pression P_1 et la quantité de matière de gaz dans le système fermé reste constante et vaut $\frac{P_0 V_0}{R T_0}$.
Le travail élémentaire reçu par le gaz s'écrit :

$$\delta W_{\text{retour}} = -P dV$$

$$\delta W_{\text{retour}} = -\frac{P_0 V_0}{R T_0} \times \frac{R T_0}{V} dV$$

En intégrant l'expression on trouve :

$$W_{\text{retour}} = -P_0 V_0 \int_{V_0}^{V_0 + V_B} \frac{dV}{V} = -P_0 V_0 \ln \left(\frac{V_0 + V_B}{V_0} \right)$$

Le travail de l'aller-retour a pour expression :

$$W_{\text{aller-retour}} = W_{\text{aller}} + W_{\text{retour}}$$
$$W_{\text{aller-retour}} = P_0 \left(V_B - V_0 \ln \left(\frac{V_0 + V_B}{V_0} \right) \right)$$

3. Si les transferts de gaz s'effectuent de la même façon que précédemment, on raisonne de la même manière qu'à la question 1. En considérant le système fermé {cylindre + réservoir} :

$$P_2 = \frac{P_1 V_0}{V_0 + V_B} \quad \text{soit :} \quad P_2 = P_0 \left(\frac{V_0}{V_0 + V_B} \right)^2$$

4. Par un raisonnement analogue à la question 2., on trouve :

$$W_{\text{aller}} = P_1 V_B \quad \text{et} \quad W_{\text{retour}} = -P_1 V_0 \int_{V_0}^{V_0+V_B} \frac{dV}{V} = -P_1 V_0 \ln \left(\frac{V_0 + V_B}{V_0} \right)$$
$$W_{2^{\text{e}}\text{aller-retour}} = P_1 \left(V_B - V_0 \ln \left(\frac{V_0 + V_B}{V_0} \right) \right)$$
$$W_{2^{\text{e}}\text{aller-retour}} = P_0 \left(\frac{V_0}{V_0 + V_B} \right) \left(V_B - V_0 \ln \left(\frac{V_0 + V_B}{V_0} \right) \right)$$

5. Par récurrence de l'expression trouvée au 3. on peut écrire :

$$P_n = P_0 \left(\frac{V_0}{V_0 + V_B} \right)^n$$

Comme $V_0 < V_0 + V_B$, lorsque $n \to \infty$ on a $\lim_{n \to \infty} P_n = 0$: la pression à l'intérieur du réservoir tend vers 0 (on vide entièrement le contenu du réservoir).

6. En s'appuyant sur le résultat trouvé aux questions 2. et 4., lorsque le réservoir sera entièrement vidé, le travail reçu par le gaz aura donc pour expression :

$$W_{\text{total}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[P_n \left(V_B - V_0 \ln \left(\frac{V_0 + V_B}{V_0} \right) \right) \right]$$
$$W_{\text{total}} = \left(V_B - V_0 \ln \left(\frac{V_0 + V_B}{V_0} \right) \right) \sum_{n=0}^{\infty} P_n$$

Or

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{V_0}{V_0 + V_B} \right)^n = P_0 \left(1 + \frac{V_0}{V_B} \right)$$

Ce qui conduit à :

$$W_{\text{total}} = P_0 \left(1 + \frac{V_0}{V_B} \right) \left(V_B - V_0 \ln \left(\frac{V_0 + V_B}{V_0} \right) \right)$$

7. Lorsque le piston est en A, il reste toujours $n = \dfrac{P_0 V_A}{RT_0}$ mol de gaz dans le cylindre.