

*l'intégrale*

FORMULAIRE

**MPSI - MP - PSI**

---

DANIEL **FREDON**

LIONEL **PORCHERON**

MAGALI **DÉCOMBE VASSET**

DIDIER **MAGLOIRE**

# Le Formulaire MPSI - MP - PSI

DUNOD

## Conception et création de couverture : Atelier 3+

Collaboration technique : Thomas Fredon, ingénieur Télécom Bretagne

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1<sup>er</sup> juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du

Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 2017

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

[www.dunod.com](http://www.dunod.com)

ISBN 978-2-10-076978-0

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

# Table des matières

Avant-propos	11
<b>Mathématiques</b>	<b>12</b>
<b>1. Analyse</b>	<b>12</b>
1.1 Les nombres réels	12
1.2 Continuité	12
1.3 Dérivation	13
1.4 Suites numériques	15
1.5 Intégration	16
1.6 Développements limités	20
1.7 Équations différentielles	22
1.8 Espaces vectoriels normés	26
1.9 Séries numériques	29
1.10 Suites et séries de fonctions	32
1.11 Calcul différentiel	36
<b>2. Algèbre générale</b>	<b>38</b>
2.1 Ensembles et applications	38
2.2 Relations	39
2.3 Calculs algébriques	40
2.4 Nombres complexes	41
2.5 Structures algébriques	42
2.6 Arithmétique	46
2.7 Polynômes	49
<b>3. Algèbre linéaire et multilinéaire</b>	<b>52</b>
3.1 Espaces vectoriels	52
3.2 Applications linéaires	56
3.3 Matrices, déterminants	58
3.4 Réduction des endomorphismes	61
3.5 Espaces vectoriels euclidiens	63

## 6 Table des matières

<b>4. Calcul des probabilités</b>	68
4.1 Événements et probabilités	68
4.2 Variables aléatoires	71
<b>Informatique</b>	77
<b>1. Environnement informatique</b>	77
<b>2. Algorithmique</b>	78
<b>3. Programmation en Python</b>	79
3.1 Généralités	79
3.2 Méthodes numériques	82
3.3 Algorithmique avancée	83
<b>4. Bases de données</b>	85
<b>Physique</b>	89
<b>1. Étude du signal</b>	89
1.1 Oscillateur harmonique non amorti (ressort horizontal)	89
1.2 Propagation du signal	90
1.3 Circuits électriques	93
<b>2. Électronique</b>	102
2.1 Stabilité des systèmes linéaires (PSI)	102
2.2 L'amplificateur linéaire intégré et la rétroaction (PSI)	103
2.3 L'A.L.I. et la réaction positive (PSI)	106
2.4 Les oscillateurs (PSI)	109
2.5 L'échantillonnage	111
2.6 Filtrage numérique du signal	113
2.7 Introduction à la transmission des signaux	114
<b>3. Optique</b>	116
3.1 Optique géométrique	116
3.2 Modèle scalaire des ondes lumineuses (MP)	118
3.3 Déphasage et chemin optique (MP)	120
3.4 Les sources lumineuses (MP)	122
3.5 Les détecteurs de lumière (MP)	123
3.6 Superpositions d'ondes lumineuses (MP)	125
3.7 Interférences(MP)	126

<b>4. Mécanique</b>	128
4.1 Cinématique d'un point	128
4.2 Cinématique d'un solide	131
4.3 Dynamique du point - étude énergétique	132
4.4 Dynamique de particules chargées	136
4.5 Dynamique du solide - étude énergétique	137
4.6 Mouvement dans un champ de force centrale conservative	140
4.7 Référentiels non galiléens - cinématique (MP)	143
4.8 Référentiels non galiléens - dynamique (MP)	145
4.9 Lois de Coulomb du frottement solide (MP)	147
<b>5. Mécanique des fluides (PSI)</b>	148
5.1 Fluides en écoulement	148
5.2 Écoulement incompressible et homogène	149
5.3 Bilans macroscopiques	151
<b>6. Thermodynamique</b>	153
6.1 Description d'un système à l'équilibre	153
6.2 Changement d'état d'un corps pur	154
6.3 Travail, transfert thermique et transformations	155
6.4 Premier et second principes	157
6.5 Machines thermiques	159
6.6 Systèmes ouverts	160
<b>7. Statique des fluides</b>	162
<b>8. Électromagnétisme</b>	164
8.1 Action d'un champ magnétique	164
8.2 Induction, auto-induction et couplage	166
8.3 Conversion de puissance électromécanique	168
8.4 Conservation de la charge électrique	169
8.5 Distributions de charge et champ électrostatique	172
8.6 Équations de Maxwell dans le vide	174
8.7 Propriétés du champ électrostatique	174
8.8 Champs électrostatiques de distributions particulières	177
8.9 Analogie pour le champ de gravitation	179
8.10 Dipôles électriques (MP)	180
8.11 Champs magnétostatiques	183
8.12 Dipôles magnétiques	186
8.13 L'approximation des régimes quasi stationnaires	188

## 8 Table des matières

<b>9. Milieux ferromagnétiques (PSI)</b>	190
9.1 Description	190
9.2 Circuits magnétiques	192
<b>10. Ondes électromagnétiques</b>	194
10.1 Les équations de propagation des champs	194
10.2 Énergie du champ électromagnétique	195
10.3 Le champ électromagnétique dans le vide sans charges ni courants électriques	196
10.4 Propagation du champ électromagnétique dans un plasma	197
10.5 Champ électromagnétique dans le plasma	199
10.6 Propagation du champ électromagnétique en présence d'un milieu conducteur ohmique	200
<b>11. Ondes mécaniques (PSI)</b>	203
11.1 Ondes sur une corde	203
11.2 Ondes acoustiques	204
<b>12. Mécanique quantique (MP)</b>	207
<b>13. Éléments de physique statistique (MP)</b>	212
13.1 Le facteur de Boltzmann	212
13.2 Statistique sur le système	214
13.3 Équipartition de l'énergie	215
<b>14. Conversions de puissances (PSI)</b>	217
14.1 Conversion statique	217
14.2 Conversion électro-mécanique	219
<b>Chimie</b>	225
<b>1. Thermodynamique</b>	225
1.1 États de la matière	225
1.2 Description d'un système physico-chimique	227
1.3 Étude thermodynamique d'une transformation	229
1.4 Diagrammes binaires (PSI)	231
1.5 Application du premier principe à la transformation chimique	233
1.6 Application du second principe à la transformation chimique	234
<b>2. Cinétique</b>	238
2.1 Cinétique formelle	238
2.2 Mécanismes réactionnels	241

<b>3. Architecture de la matière</b>	242
3.1 Classification périodique des éléments	242
3.2 Édifices chimiques	245
<b>4. État solide</b>	248
4.1 Modèle du cristal parfait	248
4.2 Types de cristaux	250
<b>5. Solutions aqueuses</b>	251
5.1 Réaction d'oxydo-réduction	251
5.2 Réaction acido-basique	254
5.3 Réaction de complexion	255
5.4 Réaction de précipitation	257
5.5 Diagrammes potentiel-pH et potentiel-pL	257
<b>6. Électrochimie</b>	258
6.1 Courbes intensité - potentiel	258
6.2 Corrosion	260
6.3 Conversion et stockage d'énergie	261
<b>Annexe A : Formulaire de trigonométrie</b>	262
1. Angles associés	262
2. Formules d'addition	262
3. Formules de duplication	262
4. Formules de linéarisation	263
5. Transformation de sommes en produits	263
6. Expressions en fonction de $\tan \frac{\alpha}{2}$	263
7. Équations trigonométriques	263
<b>Annexe B : Champs scalaires - champs vectoriels</b>	265
1. Coordonnées cartésiennes	265
2. Propriétés	265
3. Coordonnées cylindriques	266
4. Coordonnées sphériques	267

<b>Annexe C : Unités et constantes fondamentales</b>	268
1. Unités du système international	268
2. Constantes fondamentales	269
3. Ordres de grandeur	270
<b>Annexe D : Séries de Fourier des signaux classiques</b>	271
1. Signal 1 : rampe	271
2. Signal 2 : triangle	271
3. Signal 3 : sinus redressé (double alternance)	271
4. Signal 4 : sinus redressé (monoalternance)	271
5. Signal 5 : porte	272
6. Signal 6 : impulsion	272
<b>Annexe E : Classification périodique</b>	273
<b>Annexe F : Constantes chimiques</b>	276
1. Constantes acido-basiques	276
2. Potentiels standards redox	277
3. Zone de virage des principaux indicateurs colorés	278
<b>Index des mathématiques</b>	279
<b>Index de la physique</b>	282
<b>Index de la chimie</b>	287



# Avant-propos

Ce nouveau formulaire reprend la présentation et les objectifs des anciens formulaires conçus par Lionel Porcheron. Mais il a été entièrement réécrit pour s'adapter aux nouveaux programmes, avec des auteurs nouveaux, et donc des choix nouveaux.

Cet ouvrage s'adresse aux étudiants de MPSI, puis de MP ou PSI. Pour chaque item, vous trouverez :

- la mention **①** ou **②** qui indique si c'est une notion de première année ou de deuxième année ;
- parfois la mention **MP** ou **PSI** pour indiquer une notion réservée à une seule section.

Le livre est scindé en quatre parties : mathématiques, informatique, physique, chimie. Dans chaque partie, vous trouverez l'essentiel du cours, les principaux résultats étant mis en valeur par un support tramé.

À la fin, un index très détaillé vous permettra d'accéder très vite à la notion que vous voulez réviser.

Des annexes font le bilan d'informations essentielles et parfois dispersées dans votre cours.

Ne vous trompez pas dans l'offre Dunod. Vous trouverez des livres de cours et d'exercices pour renforcer votre travail de classe.

Pour des révisions structurées, les Tout-en-fiches par classes (MPSI, MP, PSI) de la collection « J'assure » comportent l'essentiel du cours et quelques exercices d'entraînement.

Ce livre est un outil pédagogique adapté aux révisions rapides avant un devoir. C'est aussi un puissant remède contre l'anxiété du trou de mémoire. C'est en quelque sorte un anxiolytique sans risque sanitaire. Mais vous risquez l'accoutumance : quand vous aurez commencé à vous servir de ce livre, vous ne pourrez plus vous en passer, surtout à l'approche des concours (qui portent sur les deux années de prépa n'oubliez pas).

Un grand merci à Thomas Fredon et Roger Faure pour leur soutien technique indispensable et à Matthieu Daniel, puis à Jean-Luc Blanc et Brice Martin, pour la réalisation finale.

Pour cette sixième édition, nous avons éliminé les quelques erreurs de « copier-coller » qui avaient échappé à notre attention. À la demande de lecteurs, nous avons aussi rajouté deux annexes : formulaire de trigonométrie et séries de Fourier des signaux classiques. Ce qui montre que vos commentaires et suggestions sont les bienvenus.

# Mathématiques

## 1. Analyse

### 1.1 Les nombres réels

#### ① Parties denses dans $\mathbb{R}$

Une partie  $A$  est dense dans  $\mathbb{R}$  si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide.

Une partie  $A$  est dense dans  $\mathbb{R}$  si tout réel est limite d'une suite d'éléments de  $A$ .

#### ① Borne supérieure

La borne supérieure de  $A$  est le plus petit élément (s'il existe) de l'ensemble des majorants de  $A$ .

$M = \sup A$  si :

$$\forall x \in A \quad x \leq M,$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad M - \varepsilon < x.$$

### 1.2 Continuité

#### ① Continuité : définition

$f$  est continue en  $a$  si elle est définie en  $a$  et si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

#### ① Théorème des valeurs intermédiaires

Si  $f$  est continue, pour tout  $y$  tel que  $f(a) < y < f(b)$ , il existe  $c$  tel que  $y = f(c)$ .

En particulier, si une fonction  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , et si  $f(a)$  et  $f(b)$  sont de signes contraires, l'équation  $f(x) = 0$  admet au moins une solution dans  $[a, b]$ .

#### ① Continuité sur un segment

Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

## 1.3 Dérivation

### 1 Dérivée en un point

Soit  $f$  une fonction définie sur  $D$  et  $x_0$  un élément de  $D$  tel que  $f$  soit définie au voisinage de  $x_0$ . On appelle dérivée de  $f$  au point  $x_0$  le nombre (lorsqu'il existe) :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

### 1 Dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$x^n$ ( $n \neq 0$ )	$nx^{n-1}$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$e^x$	$e^x$	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

### 1 Dérivée d'une fonction réciproque

La fonction réciproque  $f^{-1}$  est dérivable en  $f(x_0)$  et

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

$f$  est strictement monotone sur  $I$ , dérivable en  $f(x_0)$  et  $f'(x_0) \neq 0$ .

### 1 Théorème de Rolle

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$ , et telle que  $f(a) = f(b)$ .

Alors il existe au moins un point  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

**1 Égalité des accroissements finis**

Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ , il existe au moins un point  $c \in ]a, b[$  tel que :

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Ce théorème ne se prolonge pas aux fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ .

**1 Inégalité des accroissements finis**

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$ .

Si  $m \leq f' \leq M$ , alors :

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a).$$

En particulier, si  $|f'| \leq K$ , alors, pour tous  $x$  et  $x'$  de  $]a, b[$ ,

$$|f(x) - f(x')| \leq K|x - x'|.$$

**1 Limite de la dérivée**

Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$ , et si  $f'$  a une limite finie  $l$  en  $a$ , alors  $f$  est dérivable à droite en  $a$  et  $f'_d(a) = l$ .

Attention, il s'agit d'une condition suffisante de dérivabilité, mais elle n'est pas nécessaire. Il peut arriver que  $f'_d(a)$  existe sans que  $f'$  ait une limite en  $a$ .

**2 MP Fonction convexe**

$f$  est convexe sur  $I$  :

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

$$x_1, \dots, x_n \in I$$

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+ \text{ avec } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

Le graphique de toute fonction convexe est au-dessous de chacune de ses cordes.

**2 MP Fonction convexe dérivable**

Si  $f$  est deux fois dérivable sur  $I$  :

$$f \text{ convexe} \iff f'' \geq 0$$

Le graphique de toute fonction convexe dérivable est au-dessus de chacune de ses tangentes.

## ② MP Inégalités dues à la convexité

$a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}^+$   $p > 0, q > 0$  avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

Inégalité de Hölder

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Si  $p = q = 2$ , il s'agit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Inégalité de Minkowski

$$\left[ \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[ \sum_{i=1}^n a_i^p \right]^{\frac{1}{p}} + \left[ \sum_{i=1}^n b_i^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

## 1.4 Suites numériques

### ① Suite convergente

La suite  $(u_n)$  est convergente vers  $l$  si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0$$

$$|u_n - l| \leq \varepsilon.$$

Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Lorsqu'elle existe, la limite d'une suite est unique.

### ① Théorème d'encadrement

Si, à partir d'un certain rang,  $u_n \leq x_n \leq v_n$  et si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent vers la même limite  $l$ , alors la suite  $(x_n)$  est convergente vers  $l$ .

### ① Suite extraite

La suite  $(v_n)$  est extraite de la suite  $(u_n)$  s'il existe une application  $\varphi$  de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ , strictement croissante, telle que  $v_n = u_{\varphi(n)}$ .

On dit aussi que  $(v_n)$  est une sous-suite de  $(u_n)$ .

Si une suite possède une limite (finie ou infinie), toute sous-suite possède la même limite.

**1 Théorème de la limite monotone**

Toute suite de réels croissante et majorée est convergente.

Toute suite de réels décroissante et minorée est convergente.

Si une suite est croissante et non majorée, elle diverge vers  $+\infty$ .

Si une suite est décroissante et non minorée, elle diverge vers  $-\infty$ .

**1 Suites adjacentes**

$(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes si :

$(u_n)$  est croissante ;

$(v_n)$  est décroissante ;

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0.$$

Si deux suites sont adjacentes, elles convergent et ont la même limite.

Variante

Si  $(u_n)$  croissante,  $(v_n)$  décroissante et  $u_n \leq v_n$  pour tout  $n$ , alors elles convergent vers  $l_1$  et  $l_2$ . Il reste à montrer que  $l_1 = l_2$  pour qu'elles soient adjacentes.

**1.5 Intégration****1 Valeur absolue**

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

**1 Intégrales et ordre**

• Si  $a < b$ , et si  $f \leq g$  sur  $[a, b]$ , alors :  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ .

• Si  $f$  est continue et positive sur  $[a, b]$ , on a :

$$\int_a^b f(x) dx = 0 \iff \forall x \in [a, b] \quad f(x) = 0.$$

**1 Inégalité de la moyenne**

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \times \int_a^b |g(x)| dx.$$

**1** Sommes de Riemann

Si  $f$  est continue sur  $[a; b]$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Les sommes de Riemann, dont on considère la limite, sont des sommes d'aires de rectangles.

**1** Intégration par parties

$$\begin{aligned} \int_a^b u'(t) v(t) dt \\ = [u(t) v(t)]_a^b - \int_a^b u(t) v'(t) dt. \end{aligned}$$

$u$  et  $v$  sont deux fonctions de classe  $C^1$  sur un intervalle  $I$ , et  $a$  et  $b$  des réels de  $I$ .

**1** Intégration par changement de variable

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(u(t)) u'(t) dt = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x) dx.$$

$u$  de classe  $C^1$  de  $[\alpha, \beta]$  dans  $[a, b]$ , et  $f$  continue sur  $[a, b]$ .

**1** Formule de Taylor avec reste intégral

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^{n+1}$  sur  $I$ ,  $x_0$  et  $x$  des points de  $I$ . On a :

$$f(x) = P_n(x) + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt,$$

$$\text{où } P_n(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

est l'approximation de Taylor à l'ordre  $n$  ;

$$\text{et } R_n(x) = \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \text{ est le reste intégral d'ordre } n.$$

**2** Fonction intégrable

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt \text{ existe}$$

$$\left| \int_a^{+\infty} f(t) dt \text{ converge} \right.$$

$$\int_a^{+\infty} |f(t)| dt \text{ converge} \quad \left| \quad f \text{ intégrable sur } [a, +\infty[ \right.$$

$$\int_a^b |f(t)| dt \text{ converge} \quad \left| \quad f \text{ intégrable sur } [a, b] \right.$$

## 2 Règles d'intégrabilité (fonctions positives)

- Comparaison

Supposons  $0 \leq f \leq g$  sur  $[a, +\infty[$ .

- Si  $g$  est intégrable sur  $[a, +\infty[$ , alors  $f$  est intégrable sur  $[a, +\infty[$ .
- Si  $f$  n'est pas intégrable sur  $[a, +\infty[$ , alors  $g$  n'est pas intégrable sur  $[a, +\infty[$ .

- Domination

Si  $f(x) = O_{+\infty}(g(x))$ , l'intégrabilité de  $g$  sur  $[a, +\infty[$  implique celle de  $f$ .

- Équivalence

Si  $f(x) \sim_{+\infty} g(x)$ , l'intégrabilité de  $g$  sur  $[a, +\infty[$  équivaut à celle de  $f$ .

## 2 Situations de référence

- Pour  $a > 0$ ,  $\frac{1}{x^\alpha}$  intégrable sur  $[a, +\infty[ \iff \alpha > 1$ .
- Pour  $\alpha > 0$ ,  $e^{-\alpha x}$  intégrable sur  $[0, +\infty[$ .
- $\frac{1}{x^\alpha}$  intégrable sur  $]0, a] \iff \alpha < 1$ .
- $\ln x$  intégrable sur  $]0, 1]$ .

## 2 Théorème de convergence dominée

Les fonctions  $f_n$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , sont continues par morceaux sur  $I$  ; la suite  $(f_n)$  converge simplement sur  $I$  vers  $f$  continue par morceaux sur  $I$  ; il existe une fonction  $g$  continue par morceaux sur  $I$ , positive et intégrable sur  $I$ , telle que, pour tout entier  $n$ , on ait  $|f_n| \leq g$  (hypothèse de domination),

$\implies$  les fonctions  $f_n$  et  $f$  sont intégrables sur  $I$  et

$$\int_I f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n.$$



## ② Théorème de sommation $L^1$

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes, continues par morceaux et intégrables sur  $I$ , telle que la série  $\sum f_n$  converge simplement vers  $f$  continue par morceaux sur  $I$  et telle que la série  $\sum \int_I |f_n|$  converge.

$\Rightarrow f$  est intégrable sur  $I$  et

$$\int_I \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n.$$

## ② Intégrales à paramètre (existence et continuité)

On considère  $A$  une partie d'un espace normé de dimension finie,

$I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,

$f$  une fonction définie sur  $A \times I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

On suppose que  $f$  est continue par rapport à la première variable, continue par morceaux par rapport à la seconde.

On suppose également qu'il existe une fonction  $\varphi$ , intégrable sur  $I$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , telle que, pour tout  $x$  de  $A$ , on ait  $|f(x, \cdot)| \leq \varphi$ , c'est-à-dire :

$$\forall x \in A \quad \forall t \in I \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t).$$

Alors la fonction  $x \mapsto g(x) = \int_I f(x, t) dt$  est définie et continue sur  $A$ .

## ② Intégrales à paramètre (dérivabilité)

Soit  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction définie sur  $J \times I$ . On suppose :

- $f$  est continue par morceaux par rapport à la seconde variable,
- pour tout  $x$  de  $J$ ,  $t \mapsto f(x, t)$  est intégrable sur  $I$ ,
- $\frac{\partial f}{\partial x}$  est définie sur  $J \times I$ , continue par rapport à la première variable, continue par morceaux par rapport à la seconde,
- il existe une fonction  $\varphi$  intégrable sur  $I$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  telle que, pour tout  $x$  de  $J$ ,  $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot) \right| \leq \varphi$ .

Alors la fonction  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $J$  et vérifie :

$$\forall x \in J \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

## 2 Transformation de Laplace

$$\mathcal{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

pour  $\text{Re}(p) > a$

$f$  fonction causale, soit  $f(t) = 0$  pour  $t < 0$

$a$  abscisse d'intégrabilité de  $f$

## 2 Propriétés de la transformation de Laplace

Linéarité

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2](p) \\ = \lambda_1 \mathcal{L}[f_1](p) + \lambda_2 \mathcal{L}[f_2](p). \end{aligned}$$

Changement d'échelle

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(kt)](p) = \frac{1}{k} \mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{p}{k}\right) \\ \text{avec } k > 0. \end{aligned}$$

Retard sur la fonction

$$\mathcal{L}[f(t - t_0)](p) = e^{-t_0 p} \mathcal{L}[f](p).$$

Retard sur la transformée

$$\mathcal{L}[f](p - p_0) = \mathcal{L}[e^{p_0 t} f(t)](p)$$

Théorème de la valeur initiale

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \mathcal{L}[f](x) = f(0^+).$$

Théorème de la valeur finale

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \mathcal{L}[f](x) = l.$$

### 1.6 Développement limités

#### 1 Formule de Taylor-Young

Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $I$  jusqu'à l'ordre  $n$ . Alors la fonction  $\varepsilon$  définie au voisinage de 0 par :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + h^n \varepsilon(h)$$

est telle que  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ .

## 1 Développements limités usuels

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha \frac{x}{1!} + \cdots + \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1) \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

avec les cas particuliers :

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$\alpha = -1 \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{p-1} \frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + o(x^{2p})$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + o(x^{2p})$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^p}{2p+1} x^{2p+1} + o(x^{2p+2})$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)$$

## 1.7 Équations différentielles

**1 Équations différentielles linéaires du premier ordre**

De la forme :

$$y' + a(x)y = b(x) \quad (1)$$

Équation homogène associée :

$$y' + a(x)y = 0 \quad (2)$$

Solution générale de (1)

= Solution générale  $y_S$  de (2)

+ Solution particulière de (1)

**1 Résolution de l'équation homogène (2)**

Les solutions de l'équation (2) sont du type :

$$y_S(x) = K e^{-A(x)} \quad \text{où} \quad A(x) = \int_{t_0}^x a(u) du \text{ est une primitive de } a(x)$$

avec  $K$  constante arbitraire et  $x_0$  élément quelconque de  $I$ .**1 Recherche d'une solution particulière de (1)**

$y_1$  étant une solution non nulle de (2), on introduit une fonction auxiliaire inconnue  $K(x)$  telle que  $y(x) = K(x)y_1(x)$  soit solution de (1).

Ceci conduit à  $K'(x) = \frac{b(x)}{y_1(x)}$  et permet de calculer  $K(x)$  puis  $y(x)$ .

Cette méthode s'appelle aussi méthode de variation de la constante.

**1 Équations du second ordre à coefficients constants**

De la forme :

$$y'' + ay' + by = f(x) \quad (1)$$

Équation homogène associée :

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (2)$$

Solution générale de (1)

= Solution générale  $y_S$  de (2)

+ Solution particulière de (1)

## 1 Résolution de l'équation homogène (2)

- $\Delta > 0$  deux racines  $r_1$  et  $r_2$ .

$$y_S(x) = K_1 e^{r_1 x} + K_2 e^{r_2 x}$$

- $\Delta = 0$  une racine double  $r_0$ .

$$y_S(x) = (K_1 x + K_2) e^{r_0 x}$$

- $\Delta < 0$  deux racines  $\alpha \pm i\beta$ .

$$y_S(x) = e^{\alpha x} (K_1 \cos \beta x + K_2 \sin \beta x)$$

Cas  $a, b, c$  réels.

Équation caractéristique :

$$r^2 + ar + b = 0.$$

$$\Delta = a^2 - 4b.$$

$K_1$  et  $K_2$  sont des constantes réelles quelconques.

## 1 Recherche d'une solution particulière de (1)

- **Cas où  $f(x)$  est un polynôme  $P(x)$  de degré  $n$**

Il existe une solution particulière de (1) sous la forme d'un polynôme de degré :

$$\begin{aligned} n & \text{ si } b \neq 0; \\ n + 1 & \text{ si } b = 0 \text{ et } a \neq 0; \\ n + 2 & \text{ si } a = b = 0. \end{aligned}$$

La recherche de cette solution se fait par identification.

- **Cas où  $f(x) = e^{kx} P(x)$  avec  $P$  polynôme et  $k$  constante**

On effectue le changement de fonction inconnue

$$y(x) = e^{kx} z(x)$$

où  $z$  est une nouvelle fonction inconnue.

En reportant  $y, y'$  et  $y''$  dans (1), on est conduit à une équation en  $z$  du type précédent.

- **Cas où  $f(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x P(x)$  ou  $f(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x P(x)$  avec  $\alpha$  et  $\beta$  réels, et  $P$  polynôme à coefficients réels**

On cherche une solution particulière (à valeurs complexes) obtenue pour l'équation de second membre  $e^{(\alpha+i\beta)x} P(x)$ .

Une solution particulière est la partie réelle, ou la partie imaginaire, de la solution ainsi obtenue.

**② MP Équation différentielle linéaire**

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \quad (1)$$

$a$  est une application continue de  $I$  dans  $\mathcal{L}(E)$  et  $b$  une application continue de  $I$  dans  $E$ .

$$x'(t) = a(t)x(t) \quad (2)$$

Équation homogène associée

**② PSI Équation différentielle linéaire**

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t) \quad (1).$$

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0 \quad (2).$$

**② Système différentiel d'ordre  $n$** 

$$(S) \begin{cases} x'_1(t) = a_{11}x_1(t) + \dots + a_{1p}x_p(t) + b_1(t) \\ \vdots \\ x'_p(t) = a_{p1}x_1(t) + \dots + a_{pp}x_p(t) + b_p(t) \end{cases}$$

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \quad (1).$$

$$X'(t) = A(t)X(t) \quad (2).$$

**② Solutions d'une équation différentielle linéaire**

La solution générale de (1) est la somme de la solution générale de (2) et d'une solution particulière de (1).

**② MP Variation de la constante**

Si  $x_1$  est une solution de (2), ne s'annulant pas sur  $I$ , on peut chercher les solutions de (1) sous la forme :

$$x(t) = u(t)x_1(t)$$

où  $u$  est une fonction inconnue qui vérifie l'équation différentielle linéaire du premier ordre en  $u'$  obtenue en reportant dans (1).

## ② MP Système fondamental de solutions (n=2)

Si  $x_1$  et  $x_2$  sont deux solutions linéairement indépendantes de (2), on peut chercher la solution de (1) sous la forme :

$$x(t) = u(t)x_1(t) + v(t)x_2(t)$$

où  $u$  et  $v$  sont des fonctions inconnues soumises à la condition :

$$u'(t)x_1(t) + v'(t)x_2(t) = 0.$$

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont obtenues en résolvant le système :

$$\begin{cases} u'x_1 + v'x_2 = 0 \\ u'x_1' + v'x_2' = f \end{cases}$$

dont le déterminant

$$w(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}$$

appelé wronskien de  $x_1$  et  $x_2$ , ne s'annule pas sur  $I$  lorsque  $x_1$  et  $x_2$  sont linéairement indépendantes. On obtient :

$$u'(t) = -\frac{x_2(t)f(t)}{w(t)} \quad \text{et} \quad v'(t) = \frac{x_1(t)f(t)}{w(t)}.$$

## ② MP Exponentielle d'une matrice

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

convergence normale sur tout compact de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

### Propriétés algébriques

$$e^0 = I_n \quad ; \quad e^{\alpha A} e^{\beta A} = e^{(\alpha+\beta)A} \quad ; \quad e^A e^{-A} = I_n \quad ; \quad \det(e^A) = e^{\text{tr}A}.$$

$$\text{Si } AB = BA \quad e^A e^B = e^{A+B} \quad ; \quad \text{Si } P \text{ inversible, } e^{PAP^{-1}} = P e^A P^{-1}.$$

### Dérivabilité

L'application  $t \mapsto e^{tA}$  est dérivable et a pour dérivée  $Ae^{tA}$ .

### Utilisation

En multipliant par  $e^{-At}$  les deux membres de  $X'(t) = AX(t) + B(t)$ , on se ramène

$$\text{à : } \frac{d}{dt} [e^{-At} X(t)] = e^{-At} B(t).$$