j'intègre

FORMULAIRE

MPSI - MP - PSI

Daniel **Fredon**
Lionel **Porcheron**
Magali **Décombe Vasset**
Didier **Magloire**

Le Formulaire MPSI - MP - PSI

DUNOD

Conception et création de couverture : Atelier 3+

Collaboration technique : Thomas Fredon, ingénieur Télécom Bretagne

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-076978-0

Table des matières

Avant-propos

Ce nouveau formulaire reprend la présentation et les objectifs des anciens formulaires conçus par Lionel Porcheron. Mais il a été entièrement réécrit pour s'adapter aux nouveaux programmes, avec des auteurs nouveaux, et donc des choix nouveaux.

Cet ouvrage s'adresse aux étudiants de MPSI, puis de MP ou PSI. Pour chaque item, vous trouverez :

– la mention ❶ ou ❷ qui indique si c'est une notion de première année ou de deuxième année ;

– parfois la mention MP ou PSI pour indiquer une notion réservée à une seule section.

Le livre est scindé en quatre parties : mathématiques, informatique, physique, chimie. Dans chaque partie, vous trouverez l'essentiel du cours, les principaux résultats étant mis en valeur par un support tramé.

À la fin, un index très détaillé vous permettra d'accéder très vite à la notion que vous voulez réviser.

Des annexes font le bilan d'informations essentielles et parfois dispersées dans votre cours.

Ne vous trompez pas dans l'offre Dunod. Vous trouverez des livres de cours et d'exercices pour renforcer votre travail de classe.

Pour des révisions structurées, les Tout-en-fiches par classes (MPSI, MP, PSI) de la collection « J'assure » comportent l'essentiel du cours et quelques exercices d'entraînement.

Ce livre est un outil pédagogique adapté aux révisions rapides avant un devoir. C'est aussi un puissant remède contre l'anxiété du trou de mémoire. C'est en quelque sorte un anxiolytique sans risque sanitaire. Mais vous risquez l'accoutumance : quand vous aurez commencé à vous servir de ce livre, vous ne pourrez plus vous en passer, surtout à l'approche des concours (qui portent sur les deux années de prépa n'oubliez pas).

Un grand merci à Thomas Fredon et Roger Faure pour leur soutien technique indispensable et à Matthieu Daniel, puis à Jean-Luc Blanc et Brice Martin, pour la réalisation finale.

Pour cette sixième édition, nous avons éliminé les quelques erreurs de « copier-coller » qui avaient échappé à notre attention. À la demande de lecteurs, nous avons aussi rajouté deux annexes : formulaire de trigonométrie et séries de Fourier des signaux classiques. Ce qui montre que vos commentaires et suggestions sont les bienvenus.

Daniel FREDON daniel.fredon@laposte.net

Mathématiques

1. Analyse

1.1 Les nombres réels

❶ Parties denses dans $\mathbb{R}$

Une partie A est dense dans $\mathbb{R}$ si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide.

Une partie A est dense dans $\mathbb{R}$ si tout réel est limite d'une suite d'éléments de A.

❶ Borne supérieure

La borne supérieure de A est le plus petit élément (s'il existe) de l'ensemble des majorants de A.

$M = \sup A$ si :

$$\forall x \in A \quad x \leqslant M,$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad M - \varepsilon < x.$$

1.2 Continuité

❶ Continuité : définition

f est continue en a si elle est définie en a et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

❶ Théorème des valeurs intermédiaires

Si f est continue, pour tout y tel que $f(a) < y < f(b)$, il existe c tel que $y = f(c)$.

En particulier, si une fonction f est continue sur $[a, b]$, et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a; b]$.

❶ Continuité sur un segment

Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

1.3 Dérivation

❶ Dérivée en un point

Soit f une fonction définie sur D et x_0 un élément de D tel que f soit définie au voisinage de x_0. On appelle dérivée de f au point x_0 le nombre (lorsqu'il existe) :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

❶ Dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$x^n \quad (n \neq 0)$	nx^{n-1}	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	e^x	e^x	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

❶ Dérivée d'une fonction réciproque

La fonction réciproque f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} \, .$$

f est strictement monotone sur I, dérivable en $f(x_0)$ et $f'(x_0) \neq 0$.

❶ Théorème de Rolle

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et telle que $f(a) = f(b)$.
Alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

❶ Égalité des accroissements finis

Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Ce théorème ne se prolonge pas aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

❶ Inégalité des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.

Si $m \leqslant f' \leqslant M$, alors :

$$m\,(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M\,(b - a).$$

En particulier, si $|f'| \leqslant K$, alors, pour tous x et x' de $]a, b[$,

$$|f(x) - f(x')| \leqslant K\,|x - x'|.$$

❶ Limite de la dérivée

Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et si f' a une limite finie l en a, alors f est dérivable à droite en a et $f'_d(a) = l$.

Attention, il s'agit d'une condition suffisante de dérivabilité, mais elle n'est pas nécessaire. Il peut arriver que $f'_d(a)$ existe sans que f' ait une limite en a.

❷ MP Fonction convexe

f est convexe sur I :

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)\,.$$

$x_1, \dots, x_n \in I$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ avec $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$

Le graphique de toute fonction convexe est au-dessous de chacune de ses cordes.

❷ MP Fonction convexe dérivable

Si f est deux fois dérivable sur I :

$$f \text{ convexe} \iff f'' \geqslant 0$$

Le graphique de toute fonction convexe dérivable est au-dessus de chacune de ses tangentes.

❷ MP Inégalités dues à la convexité

$a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}^+ \qquad p > 0, q > 0$ avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1.$

Inégalité de Hölder

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\Big)^{\frac{1}{q}}$$

Si $p = q = 2$, il s'agit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Inégalité de Minkowski

$$\Big[\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^p\Big]^{\frac{1}{p}} \leqslant \Big[\sum_{i=1}^{n} a_i^p\Big]^{\frac{1}{p}} + \Big[\sum_{i=1}^{n} b_i^p\Big]^{\frac{1}{p}}$$

1.4 Suites numériques

❶ Suite convergente

La suite (u_n) est convergente vers l si :
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0$
$|u_n - l| \leqslant \varepsilon.$

Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Lorsqu'elle existe, la limite d'une suite est unique.

❶ Théorème d'encadrement

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant x_n \leqslant v_n$ et si (u_n) et (v_n) convergent vers la *même* limite l, alors la suite (x_n) est convergente vers l.

❶ Suite extraite

La suite (v_n) est extraite de la suite (u_n) s'il existe une application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, strictement croissante, telle que $v_n = u_{\varphi(n)}$.

On dit aussi que (v_n) est une sous-suite de (u_n).

Si une suite possède une limite (finie ou infinie), toute sous-suite possède la même limite.

❶ Théorème de la limite monotone

Toute suite de réels croissante et majorée est convergente.
Toute suite de réels décroissante et minorée est convergente.
Si une suite est croissante et non majorée, elle diverge vers $+\infty$.
Si une suite est décroissante et non minorée, elle diverge vers $-\infty$.

❶ Suites adjacentes

(u_n) et (v_n) sont adjacentes si :

(u_n) est croissante ;
(v_n) est décroissante ;
$\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0.$

Si deux suites sont adjacentes, elles convergent et ont la même limite.

Variante

Si (u_n) croissante, (v_n) décroissante et $u_n \leqslant v_n$ pour tout n, alors elles convergent vers l_1 et l_2. Il reste à montrer que $l_1 = l_2$ pour qu'elles soient adjacentes.

1.5 Intégration

❶ Valeur absolue

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

❶ Intégrales et ordre

- Si $a < b$, et si $f \leqslant g$ sur $[a, b]$, alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$
- Si f est continue et positive sur $[a, b]$, on a :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \iff \forall x \in [a, b] \quad f(x) = 0.$$

❶ Inégalité de la moyenne

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \times \int_a^b |g(x)|\,\mathrm{d}x.$$

❶ Sommes de Riemann

Si f est continue sur $[a;b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Les sommes de Riemann, dont on considère la limite, sont des sommes d'aires de rectangles.

❶ Intégration par parties

$$\int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t = \big[u(t)\,v(t)\big]_a^b - \int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

u et v sont deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle I, et a et b des réels de I.

❶ Intégration par changement de variable

$$\int_\alpha^\beta f\big(u(t)\big)\,u'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

u de classe C^1 de $[\alpha,\beta]$ dans $[a,b]$, et f continue sur $[a,b]$.

❶ Formule de Taylor avec reste intégral

Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur I, x_0 et x des points de I. On a :

$$f(x) = P_n(x) + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

où $P_n(x) = f(x_0) + \dfrac{(x-x_0)}{1!}\, f'(x_0) + \cdots + \dfrac{(x-x_0)^n}{n!}\, f^{(n)}(x_0)$

est l'approximation de Taylor à l'ordre n ;

et $R_n(x) = \displaystyle\int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$ est le reste intégral d'ordre n.

❷ Fonction intégrable

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe

$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge

$\displaystyle\int_a^{+\infty} \lvert f(t)\rvert \,\mathrm{d}t$ converge	f intégrable sur $[a, +\infty[$
$\displaystyle\int_a^{b} \lvert f(t)\rvert \,\mathrm{d}t$ converge	f intégrable sur $[a, b]$

❷ Règles d'intégrabilité (fonctions positives)

• Comparaison

Supposons $0 \leqslant f \leqslant g$ sur $[a, +\infty[$.
– Si g est intégrable sur $[a, +\infty[$, alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$.
– Si f n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$, alors g n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$.

• Domination

Si $f(x) \underset{+\infty}{=} O(g(x))$, l'intégrabilité de g sur $[a, +\infty[$ implique celle de f.

• Équivalence

Si $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$, l'intégrabilité de g sur $[a, +\infty[$ équivaut à celle de f.

❷ Situations de référence

• Pour $a > 0$, $\dfrac{1}{x^\alpha}$ intégrable sur $[a, +\infty[\iff \alpha > 1$.

• Pour $\alpha > 0$, $\mathrm{e}^{-\alpha x}$ intégrable sur $[0, +\infty[$.

• $\dfrac{1}{x^\alpha}$ intégrable sur $]0, a] \iff \alpha < 1$.

• $\ln x$ intégrable sur $]0, 1]$.

❷ Théorème de convergence dominée

Les fonctions f_n, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, sont continues par morceaux sur I ;
la suite (f_n) converge simplement sur I vers f continue par morceaux sur I ;
il existe une fonction g continue par morceaux sur I, positive et intégrable sur I, telle que, pour tout entier n, on ait $\lvert f_n\rvert \leqslant g$ (hypothèse de domination),

$\Longrightarrow$ les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et

$$\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n.$$

❷ Théorème de sommation L^1

Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes, continues par morceaux et intégrables sur I, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement vers f continue par morceaux sur I et telle que la série $\sum \int_I |f_n|$ converge.

$\Longrightarrow f$ est intégrable sur I et

$$\int_I \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n.$$

❷ Intégrales à paramètre (existence et continuité)

On considère A une partie d'un espace normé de dimension finie,
I un intervalle de $\mathbb{R}$,
f une fonction définie sur $A \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que f est continue par rapport à la première variable, continue par morceaux par rapport à la seconde.

On suppose également qu'il existe une fonction φ, intégrable sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, telle que, pour tout x de A, on ait $|f(x, .)| \leqslant \varphi$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in A \qquad \forall t \in I \qquad f(x,t)| \leqslant \varphi(t).$$

Alors la fonction $x \mapsto g(x) = \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.

❷ Intégrales à paramètre (dérivabilité)

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $J \times I$. On suppose :

– f est continue par morceaux par rapport à la seconde variable,

– pour tout x de J, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I,

– $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est définie sur $J \times I$, continue par rapport à la première variable, continue par morceaux par rapport à la seconde,

– il existe une fonction φ intégrable sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telle que, pour tout x de J, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, .)\right| \leqslant \varphi$.

Alors la fonction g est de classe C^1 sur J et vérifie :

$$\forall x \in J \qquad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

❷ Transformation de Laplace

$$\mathcal{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t$$

pour $\mathrm{Re}\,(p) > a$

f fonction causale, soit $f(t) = 0$ pour $t < 0$

a abscisse d'intégrabilité de f

❷ Propriétés de la transformation de Laplace

Linéarité
$\mathcal{L}[\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2](p)$
$= \lambda_1 \mathcal{L}[f_1](p) + \lambda_2 \mathcal{L}[f_2](p).$

Changement d'échelle
$\mathcal{L}[f(kt)](p) = \dfrac{1}{k}\,\mathcal{L}[f(t)]\left(\dfrac{p}{k}\right)$
avec $k > 0$.

Retard sur la fonction

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)](p) = \mathrm{e}^{-t_0 p}\mathcal{L}[f](p).$$

Retard sur la transformée
$\mathcal{L}[f](p-p_0) = \mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{p_0 t} f(t)\right](p)$

Théorème de la valeur initiale

$$\lim_{x\to+\infty} x\mathcal{L}[f](x) = f(0^+).$$

Théorème de la valeur finale

$$\lim_{x\to 0^+} x\mathcal{L}[f](x) = l.$$

1.6 Développements limités

❶ Formule de Taylor-Young

Soit f une fonction dérivable sur I jusqu'à l'ordre n. Alors la fonction ε définie au voisinage de 0 par :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + h^n \varepsilon(h)$$

est telle que $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0.$

❶ Développements limités usuels

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha\frac{x}{1!} + \cdots + \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

avec les cas particuliers :

$$\alpha = \frac{1}{2} \qquad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$\alpha = -1 \qquad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$

$$\mathrm{ch}\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{p-1}\frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + o(x^{2p})$$

$$\mathrm{sh}\, x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + o(x^{2p})$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$$

$$\mathrm{th}\, x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^p}{2p+1}x^{2p+1} + o(x^{2p+2})$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)$$

1.7 Équations différentielles

❶ Équations différentielles linéaires du premier ordre

De la forme :

$$y' + a(x)\,y = b(x) \qquad \textbf{(1)}$$

Équation homogène associée :

$$y' + a(x)\,y = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Solution générale de (1)
= Solution générale y_S de (2)
+ Solution particulière de (1)

❶ Résolution de l'équation homogène (2)

Les solutions de l'équation **(2)** sont du type :

$$y_S(x) = K\,\mathrm{e}^{-A(x)} \quad \text{où} \quad A(x) = \int_{t_0}^{x} a(u)\,\mathrm{d}u \text{ est une primitive de } a(x)$$

avec K constante arbitraire et x_0 élément quelconque de I.

❶ Recherche d'une solution particulière de (1)

y_1 étant une solution non nulle de **(2)**, on introduit une fonction auxiliaire inconnue $K(x)$ telle que $y(x) = K(x)\,y_1(x)$ soit solution de **(1)**.

Ceci conduit à $K'(x) = \dfrac{b(x)}{y_1(x)}$ et permet de calculer $K(x)$ puis $y(x)$.

Cette méthode s'appelle aussi méthode de variation de la constante.

❶ Équations du second ordre à coefficients constants

De la forme :

$$y'' + ay' + by = f(x) \qquad \textbf{(1)}$$

Équation homogène associée :

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Solution générale de (1)
= Solution générale y_S de (2)
+ Solution particulière de (1)

❶ Résolution de l'équation homogène (2)

• $\Delta > 0$ deux racines r_1 et r_2.

$$y_S(x) = K_1\,e^{r_1 x} + K_2\,e^{r_2 x}$$

• $\Delta = 0$ une racine double r_0.

$$y_S(x) = (K_1\,x + K_2)\,e^{r_0 x}$$

• $\Delta < 0$ deux racines $\alpha \pm i\beta$.

$$y_S(x) = e^{\alpha x}\,(K_1 \cos\beta x + K_2 \sin\beta x)$$

Cas a, b, c réels.

Équation caractéristique :

$$r^2 + ar + b = 0.$$

$\Delta = a^2 - 4b$.

K_1 et K_2 sont des constantes réelles quelconques.

❶ Recherche d'une solution particulière de (1)

• **Cas où $f(x)$ est un polynôme $P(x)$ de degré n**

Il existe une solution particulière de **(1)** sous la forme d'un polynôme de degré :

n si $b \neq 0$;
$n + 1$ si $b = 0$ et $a \neq 0$;
$n + 2$ si $a = b = 0$.

La recherche de cette solution se fait par identification.

• **Cas où $f(x) = e^{kx}\,P(x)$ avec P polynôme et k constante**

On effectue le changement de fonction inconnue

$$y(x) = e^{kx}\,z(x)$$

où z est une nouvelle fonction inconnue.

En reportant y, y' et y'' dans **(1)**, on est conduit à une équation en z du type précédent.

• **Cas où $f(x) = e^{\alpha x}\,\cos\beta x\,P(x)$ ou $f(x) = e^{\alpha x}\,\sin\beta x\,P(x)$ avec α et β réels, et P polynôme à coefficients réels**

On cherche une solution particulière (à valeurs complexes) obtenue pour l'équation de second membre $e^{(\alpha+i\beta)\,x}P(x)$.

Une solution particulière est la partie réelle, ou la partie imaginaire, de la solution ainsi obtenue.

❷ MP Équation différentielle linéaire

$x'(t) = a(t)\,x(t) + b(t) \quad \textbf{(1)}$	a est une application continue de I dans $\mathcal{L}(E)$ et b une application continue de I dans E.
$x'(t) = a(t)\,x(t) \quad \textbf{(2)}$	Équation homogène associée

❷ PSI Équation différentielle linéaire

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t) \quad \textbf{(1)}.$$

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0 \quad \textbf{(2)}.$$

❷ Système différentiel d'ordre n

$$(S)\ \left\{\begin{array}{ccc} x_1'(t) & = & a_{11}\,x_1(t) + \cdots + a_{1p}\,x_p(t) + b_1(t) \\ & \vdots & \\ x_p'(t) & = & a_{p1}\,x_1(t) + \cdots + a_{pp}\,x_p(t) + b_p(t) \end{array}\right.$$

$$X'(t) = A(t)\,X(t) + B(t) \quad \textbf{(1)}.$$

$$X'(t) = A(t)\,X(t) \quad \textbf{(2)}.$$

❷ Solutions d'une équation différentielle linéaire

La solution générale de **(1)** est la somme de la solution générale de **(2)** et d'une solution particulière de **(1)**.

❷ MP Variation de la constante

Si x_1 est une solution de **(2)**, ne s'annulant pas sur I, on peut chercher les solutions de **(1)** sous la forme :

$$x(t) = u(t)\,x_1(t)$$

où u est une fonction inconnue qui vérifie l'équation différentielle linéaire du premier ordre en u' obtenue en reportant dans **(1)**.

❷ MP Système fondamental de solutions (n=2)

Si x_1 et x_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de **(2)**, on peut chercher la solution de **(1)** sous la forme :

$$x(t) = u(t)\, x_1(t) + v(t)\, x_2(t)$$

où u et v sont des fonctions inconnues soumises à la condition :

$$u'(t)\, x_1(t) + v'(t)\, x_2(t) = 0\ .$$

Les fonctions u et v sont obtenues en résolvant le système :

$$\begin{cases} u'\, x_1 + v'\, x_2 = 0 \\ u'\, x_1' + v'\, x_2' = f \end{cases}$$

dont le déterminant

$$w(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}$$

appelé wronskien de x_1 et x_2, ne s'annule pas sur I lorsque x_1 et x_2 sont linéairement indépendantes. On obtient :

$$u'(t) = -\frac{x_2(t)\, f(t)}{w(t)} \quad \text{et} \quad v'(t) = \frac{x_1(t)\, f(t)}{w(t)}\ \cdot$$

❷ MP Exponentielle d'une matrice

$$\mathrm{e}^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

convergence normale sur tout compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Propriétés algébriques

$\mathrm{e}^0 = I_n$; $\mathrm{e}^{\alpha A}\mathrm{e}^{\beta A} = \mathrm{e}^{(\alpha+\beta)A}$; $\mathrm{e}^A\mathrm{e}^{-A} = I_n$; $\det(\mathrm{e}^A) = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}A}$.

Si $AB = BA$ $\mathrm{e}^A\, \mathrm{e}^B = \mathrm{e}^{A+B}$; Si P inversible, $\mathrm{e}^{PAP^{-1}} = P\, \mathrm{e}^A P^{-1}$.

Dérivabilité

L'application $t \mapsto \mathrm{e}^{tA}$ est dérivable et a pour dérivée $A\mathrm{e}^{tA}$.

Utilisation

En multipliant par e^{-At} les deux membres de $X'(t) = AX(t) + B(t)$, on se ramène à : $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{-At}X(t)\right] = \mathrm{e}^{-At}B(t)$.