Le beau livre des
MATHS

Clifford Pickover

Inventeur prolifique, journaliste à la tête de son propre site Internet aux millions de visiteurs, il est également l'auteur d'une quarantaine d'ouvrages de vulgarisation traduits en de nombreuses langues, sur des sujets allant des mathématiques à la religion, l'art et l'histoire. Il est aussi titulaire d'un doctorat de biochimie et biophysique obtenu à l'université de Yale et propriétaire de quarante brevets d'invention. Ses recherches ont attiré l'attention de nombreux médias, dont CNN, *Wired* et le *New York Times*.

Jean-Pierre Escofier

Enseignant-chercheur à l'université Rennes I, **Jean-Pierre Escofier** a revisé et actualisé cette nouvelle édition française. Il est par ailleurs l'auteur, aux éditions Dunod, de l'ouvrage : *Petites histoires des mathématiques*.

Clifford A. Pickover

Le beau livre des MATHS

De Pythagore aux fractales
250 découvertes qui ont changé le monde

Traduit de l'anglais (États-Unis) par
Xavier Guesnu

Nouvelle édition française actualisée par
Jean-Pierre Escofier

DUNOD

L'ouvrage original a été publié en anglais (États-Unis) en 2009
par Sterling publishing Co., Inc., à New York.

Titre original :
The Math Book: From Pythagoras to the 57th dimension, 250 milestones in the history of math

Révision scientifique de la traduction et actualisation : Jean-Pierre Escofier.

Maquette de couverture : Élisabeth Hébert.

Mise en pages : Nord Compo

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN : 978-2-10-079720-2

« Les mathématiques, lorsque correctement considérées, possèdent non seulement la vérité mais aussi la beauté suprême – une beauté froide et austère, comme celle d'une statue. »

Bertrand Russell, Mysticism and Logic, 1918

« Les mathématiques sont un sujet fou et merveilleux, plein d'imagination, de fantaisie et de créativité jamais limitées par les détails mesquins du monde physique, seulement par la force de notre lumière intérieure. »

Gregory Chaitin, "Less Proof, More Truth,"
New Scientist, 28 juillet 2007

« Peut-être un ange du Seigneur arpentait-il une mer infinie de chaos, qu'il troubla délicatement de son doigt. Alors, dans ce tourbillon d'équations, minuscule et temporaire, notre cosmos prit forme. »

Martin Gardner, Order and Surprise, 1950

« Les grandes équations de la physique moderne sont une part permanente du savoir scientifique, qui pourrait survivre même aux belles cathédrales des temps passés. »

Steven Weinberg, cité par Graham Farmelo dans
It Must Be Beautiful, 2002

Table des matières

Introduction

De la beauté et de l'utilité des mathématiques

> *« Un observateur doué de raison pourrait conclure, en voyant des mathématiciens au travail, qu'il s'agit d'adeptes d'une secte, étranges, à la recherche des clés ésotériques de l'univers. »*
>
> Philip Davis et Reuben Hersh, *The Mathematical Experience*

Les mathématiques se sont infiltrées dans tous les domaines de l'aventure scientifique et jouent un rôle inestimable en biologie, physique, chimie, économie, sociologie et ingénierie. Elles peuvent servir à expliquer les couleurs d'un coucher de soleil ou l'architecture de nos cerveaux. Elles aident à construire aussi bien les avions supersoniques que les montagnes russes, à simuler le flux des ressources naturelles de la Terre, à explorer les réalités quantiques et à représenter par l'image les galaxies éloignées. Les mathématiques ont changé notre façon de regarder le cosmos.

J'espère que cet ouvrage donnera aux lecteurs le goût des mathématiques, même les plus inédites, tout en leur offrant la possibilité d'exercer et de développer leur imagination. Cependant, les rubriques proposées ne sont pas de simples curiosités, qui n'auraient guère de valeur pour le lecteur moyen. Nombre d'enquêtes montrent que de bonnes études mathématiques dans le secondaire permettent, par la suite, un meilleur cursus universitaire.

Les mathématiques ont pour utilité, entre autres, de faciliter la construction de navettes spatiales et d'examiner la géométrie de notre univers. Il se peut que les nombres soient, un jour, notre premier moyen de communication avec les éventuels extraterrestres ! Certains physiciens ont même émis l'hypothèse que notre compréhension des dimensions supérieures et de la topologie – étude des formes et de leurs relations – nous autorise un jour à nous échapper de notre univers, auquel cas la totalité de l'espace-temps deviendrait notre demeure.

Il est souvent arrivé en mathématiques qu'une découverte soit effectuée simultanément par deux savants. En 1858, le mathématicien allemand August Möbius (1790 – 1868) découvrit le ruban de Möbius (magnifique objet ne présentant qu'un seul côté) à la même époque qu'un autre mathématicien allemand Johann Benedict Listing (1808 – 1882). Cette découverte simultanée, au même titre que celle du calcul infinitésimal par Isaac Newton (1643 – 1727) et Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), me conduit à m'interroger sur les raisons pour lesquelles tant de découvertes scientifiques se sont produites simultanément et indépendamment les unes des autres. Autres exemples de développement parallèle, celui de la théorie de l'Évolution par les savants britanniques Charles Darwin (1809 – 1882) et Alfred Wallace (1823 – 1913), ou celui de la géométrie hyperbolique par le mathématicien hongrois János Bolyai (1802 – 1860) et le mathématicien russe Nikolaï Lobatchevski (1793 – 1856).

Très vraisemblablement, ces découvertes simultanées se sont produites parce que l'époque était mûre, au regard des connaissances accumulées jusque-là par l'humanité. Il arrive que deux savants soient stimulés par les mêmes recherches préliminaires de l'un de leurs contemporains. Certains savants attribuent même une signification plus profonde à de telles coïncidences. « Nous aboutissons ainsi à l'image d'un kaléidoscope cosmique, qui, en dépit d'une réorganisation permanente, veille à regrouper les similitudes », écrit ainsi le biologiste autrichien Paul Kammerer (1880 – 1926). Il compara les événements de notre monde aux crêtes des vagues de l'océan, qui paraissent sans lien entre elles. Selon sa théorie controversée, nous observons les crêtes des vagues, mais, sous la surface de la Terre, existerait un mécanisme de synchronisation qui connecterait mystérieusement les événements et provoquerait leur regroupement.

Georges Ifrah (1947 –), dans son *Histoire universelle des chiffres*, évoque aussi la simultanéité quand il écrit à propos des mathématiques mayas :

> « Ainsi, nous constatons une fois de plus que, dans leurs recherches et dans leurs tâtonnements, des hommes, fort éloignés dans le temps ou dans l'espace, ont quelquefois emprunté les mêmes voies pour parvenir à des résultats sinon identiques, du moins similaires. Dans certains cas, l'explication tient à des contacts et à des influences. Mais il serait évidemment erroné de penser que les Mayas aient pu copier sur les peuples de l'Ancien Monde ; l'explication tient ici à ce que nous avons appelé plus haut l'unité profonde de la culture humaine : l'intelligence de l'homme étant universelle et ses potentialités remarquablement constantes en tout point de la Terre, les Mayas s'étaient tout simplement trouvés placés dans des conditions initiales favorables, rigoureusement identiques à celles des individus qui ont obtenu les mêmes résultats… »

Les peuples de l'Antiquité, comme les Grecs, avaient une profonde fascination pour les nombres. Serait-ce parce qu'en une époque troublée, les nombres constituaient la seule permanence dans un monde en perpétuel changement ? Aux yeux de la secte des Pythagoriciens, les nombres étaient tangibles, inaltérables, pratiques et éternels – plus fiables que des amis, moins menaçants qu'Apollon ou Zeus.

Nombre de pages du présent ouvrage traitent des nombres entiers. Le très brillant mathématicien Paul Erdös (1913 – 1996) était fasciné par la théorie des nombres – l'étude des entiers – et n'éprouvait aucune difficulté à poser des problèmes, à l'aide d'entiers, qui étaient souvent simples à formuler, mais notoirement difficiles à résoudre. Erdös estimait que si l'on élabore un problème mathématique qui demeure non résolu pendant plus d'un siècle, alors il s'agit d'un problème de la théorie des nombres.

Bien des aspects de l'univers peuvent être exprimés par les entiers. Les modèles numériques décrivent la disposition des pétales de marguerite, la reproduction des lapins, l'orbite des planètes, les harmonies musicales et les relations entre les éléments du tableau périodique. Léopold Kronecker (1823 – 1891), algébriste et théoricien des nombres, tint un jour le propos suivant : « Les entiers sont la création de Dieu, et tout le reste vient de l'homme ». Il impliquait de ce fait que les entiers représentaient la source principale de toutes les mathématiques.

Depuis l'époque de Pythagore, le rôle des rapports d'entiers dans les échelles musicales a été largement reconnu. Plus important, les entiers ont joué un rôle crucial dans l'évolution de la compréhension scientifique de l'humanité. Par exemple, le chimiste Antoine Lavoisier (1743 – 1794) a découvert que les composés chimiques contenaient des proportions fixes d'éléments correspondant aux rapports d'entiers de petite taille. Il s'agissait là d'une preuve puissante en faveur de l'existence des atomes. En 1925, certaines relations d'entiers entre les longueurs d'onde des lignes spectrales émises par les atomes en mouvement donnèrent les premiers indices sur la structure des atomes. Les rapports, proches de nombres entiers, des masses atomiques étaient la preuve que le noyau atomique se composait d'un nombre entier de nucléons similaires (protons et neutrons). Les écarts conduisirent à la découverte des isotopes élémentaires (comportement chimique pratiquement identique, mais nombre de neutrons différent).

De légères divergences dans les masses atomiques des isotopes purs par rapport aux entiers exacts confirmèrent la fameuse formule d'Einstein $E = mc^2$, ainsi que la possibilité de la bombe atomique. Les entiers sont partout en physique atomique. Les relations entre entiers constituent une dimension fondamentale des mathématiques ou, pour reprendre les propres mots du mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), « les mathématiques sont la reine des sciences – et la théorie des nombres, la reine des mathématiques ».

Notre description mathématique de l'univers ne cesse de s'étendre, mais nos cerveaux et nos compétences linguistiques demeurent par trop retranchés dans leurs habitudes. De nouvelles sortes de mathématiques sont découvertes ou créées en permanence, mais de nouvelles façons de penser et de comprendre nous sont nécessaires. Par exemple, au cours des toutes dernières années, des preuves ont été proposées pour de célèbres problèmes de l'histoire des mathématiques, mais elles sont bien trop longues et complexes pour que les experts soient certains de leur validité. Le mathématicien Thomas Hales dut attendre cinq ans avant que l'article sur la géométrie qu'il avait soumis à la revue *Annals of Mathematics* soit considéré comme ne comportant pas d'erreurs et sa preuve publiée, mais uniquement avec un dégagement de responsabilité ! En outre, des mathématiciens comme Keith Devlin ont reconnu dans le *New York Times* que « l'histoire des mathématiques atteint un tel degré d'abstraction que les spécialistes eux-mêmes sont dans l'incapacité de comprendre nombre de problèmes frontières ». Si les experts rencontrent des difficultés, vous imaginez les obstacles qu'il peut y avoir à proposer ce type d'informations à un public général. Nous faisons du mieux que nous pouvons. Les mathématiciens peuvent construire des théories et effectuer des calculs, mais ne pas être réellement à même de comprendre, d'expliquer ou de communiquer leurs idées.

Une analogie avec la physique s'impose ici. Tandis que Werner Heisenberg s'inquiétait que les êtres humains ne parviendraient peut-être jamais à réellement comprendre les atomes, Niels Bohr se montrait un peu plus optimiste, en 1920 : « Je pense qu'ils y arriveront, mais nous nous devons de bien savoir ce que signifie le mot comprendre ». Aujourd'hui, nous nous aidons d'ordinateurs pour raisonner au-delà des limites de notre propre intuition. De fait, les expériences réalisées avec les ordinateurs conduisent les mathématiciens à des découvertes et des idées qui auraient été impensables auparavant. Ordinateurs et graphiques informatiques permettent aux mathématiciens de découvrir des résultats bien avant de pouvoir les prouver formellement et d'ouvrir de nouvelles perspectives mathématiques. Même de simples outils comme les feuilles de calcul fournissent aux mathématiciens un pouvoir que Carl Friedrich Gauss, Leonhard Euler et Isaac Newton leur auraient envié. Juste un exemple : à la fin des années 1990, les programmes informatiques conçus par David Bailey et Helaman Ferguson aidèrent à produire de nouvelles formules reliant π à log 5 et deux autres constantes. Comme Erica Klarreich le rapporte dans Science News, une fois que l'ordinateur avait établi la formule, il devenait extrêmement facile de prouver qu'elle était correcte. Souvent, la seule connaissance de la réponse constitue le principal obstacle à surmonter lors de la formulation d'une preuve.

Les théories mathématiques ont parfois été utilisées pour prévoir des phénomènes qui ne furent confirmés que bien des années plus tard. Par exemple, les équations de Maxwell, du nom du physicien James Clerk Maxwell, prédirent les ondes radioélectriques. Les équations d'Einstein suggérèrent que l'univers était en expansion. Le physicien Paul Dirac remarqua que les mathématiques abstraites nous offraient un aperçu de ce que serait la physique. De fait, ses équations prévoyaient l'existence de l'antimatière, découverte ultérieurement. De même, le mathématicien Nikolaï Lobatchevski déclara « qu'il n'existe aucune branche des mathématiques, aussi abstraite soit-elle, qui ne s'appliquera pas un jour ou l'autre aux phénomènes du monde réel ».

Dans cet ouvrage, vous rencontrerez diverses géométries intéressantes considérées comme détenant les clés de l'univers. Galilée (1564 – 1642) pensait que le grand livre de la Nature était écrit en symboles mathématiques. Johannes Kepler (1571 – 1630) modélisa le système solaire avec les solides de Platon, tels que le dodécaèdre. Dans les années 1960, le physicien Eugene Wigner (1902 – 1995) fut impressionné par l'« incroyable efficacité des mathématiques dans les sciences naturelles ». Les groupes de Lie tels que le groupe E_8 nous permettront peut-être un jour de créer une théorie unifiée de la physique. En 2007, le cosmologiste Max Tegmark publia des articles sur l'hypothèse de l'univers mathématique, qui suppose que notre réalité physique est une structure mathématique – autrement dit, que notre univers n'est pas seulement décrit par les mathématiques, mais qu'il est mathématique.

> « *À chaque étape majeure, la physique a nécessité, et fréquemment stimulé, l'introduction de nouveaux outils et concepts mathématiques. Notre compréhension actuelle des lois de la physique, avec leur universalité et leur précision extrême, n'est possible qu'en termes mathématiques.* »
>
> —Michael Atiyah, « Pulling the Strings », *Nature*

L'une des caractéristiques communes à tous les mathématiciens est leur volonté d'être aussi complets que possible, comme une nécessité de retourner aux principes premiers pour expliquer leurs travaux. Aussi, les lecteurs de textes mathématiques doivent-ils bien souvent lire de nombreuses pages décrivant le contexte avant d'arriver enfin aux conclusions essentielles. Pour éviter cette situation, chaque entrée du livre a été conçue de manière concise et ne comporte au plus que quelques paragraphes. Ce format permet aux lecteurs d'accéder en quelque sorte au cœur du sujet. Vous souhaitez des informations sur l'infini ? Accédez directement aux entrées « Nombres transfinis de Cantor » (1874) ou « Grand Hôtel de Hilbert » (1925). Vous vous intéressez à la première calculatrice ayant connu un réel succès commercial et développée par un déporté dans un camp de concentration nazi ? Accédez à l'entrée « Calculateur Curta » (1948) pour en avoir une brève présentation.

Vous vous demandez comment un étonnant théorème a pu un jour aider les savants à créer des nanofils pour les appareils électroniques ? Dans ce cas lisez l'entrée « Théorème de la bouche chevelue » (1912). Pourquoi les nazis obligèrent-ils le président de la Société polonaise de mathématiques à laisser des poux se nourrir de son sang ? Pourquoi la première femme mathématicienne fut-elle assassinée ? Est-il réellement possible de faire passer l'intérieur d'une sphère à l'extérieur, et inversement ? Qui était le « pape des nombres » ? Quand les humains nouèrent-ils leurs premiers nœuds ? Pourquoi n'utilisons-nous plus les chiffres romains ? Quel est le premier nom de l'histoire des mathématiques ? Une surface peut-elle n'avoir qu'un seul côté ? Nous nous efforcerons de répondre à ces questions stimulantes et à bien d'autres dans les pages suivantes.

Bien sûr, mon approche présente certains inconvénients. En quelques paragraphes à peine, je ne peux pas réellement approfondir un sujet. Toutefois, je fournis des suggestions complémentaires de lecture dans la section « Notes et Bibliographie ». Bien que, parfois, je mentionne les sources principales, j'ai souvent répertorié d'excellentes références secondaires auxquelles les lecteurs peuvent avoir plus facilement accès qu'aux sources principales plus anciennes. Les lecteurs intéressés par un thème peuvent utiliser les références proposées comme un point de départ utile.

Mon objectif en écrivant ce livre est de fournir à un large public une introduction aux idées et aux penseurs mathématiques, avec des entrées assez brèves pour être assimilées en quelques minutes. La plupart des entrées sont celles qui m'intéressent personnellement. Malheureusement, toutes les grandes étapes mathématiques ne sont pas incluses dans ce livre, faute de place. J'ai nécessairement été contraint d'omettre de véritables merveilles mathématiques. Néanmoins, je crois avoir inclus la majorité de celles et ceux qui revêtent une importance historique et qui ont eu une influence déterminante sur les mathématiques, la société ou la pensée. Certaines entrées ont un aspect essentiellement pratique, comme celles consacrées aux règles à calcul, aux dômes géodésiques et à l'invention du zéro. Le cas échéant, j'ai inséré des moments plus légers, mais néanmoins significatifs, comme l'apparition du Rubik's Cube ou la résolution du problème des draps de lit. Parfois, certaines informations sont répétées pour que chaque entrée puisse se lire de façon autonome. Quand certains mots sont en caractères gras, cela signifie qu'ils renvoient à une entrée de l'ouvrage. En outre, les références précédées de la mention « VOIR AUSSI », en bas de chaque page, permettent de tisser une toile entre les différentes entrées et aideront le lecteur, je l'espère, à parcourir le livre de façon ludique et constructive.

L'ouvrage reflète mes propres limites intellectuelles ; bien que je m'efforce d'étudier autant de domaines scientifiques et mathématiques que possible, il est difficile de tous les maîtriser. Le livre indique clairement mes propres intérêts, mais aussi mes points forts et mes points faibles. Je suis responsable du choix des entrées, ainsi que, bien sûr, des éventuelles erreurs et imperfections. Mon but n'était pas de proposer un exposé exhaustif ou savant, mais de m'adresser, sous forme récréative, aux étudiants et au grand public. Les commentaires et les suggestions seront les bienvenus !

Ce livre est organisé de façon chronologique, en fonction de l'année d'une découverte ou d'une étape mathématique importante. Dans certains cas, la littérature mathématique fait état de légères différences de dates, car certaines sources donnent la date de publication comme date de la découverte, alors que d'autres sources fournissent la date réelle à laquelle un principe mathématique a été découvert, indépendamment de la date de publication. En cas de doute sur la date exacte de la découverte, j'ai souvent privilégié la date de publication.

Les dates peuvent aussi être une question d'estimation quand plusieurs individus ont leur part dans une découverte. Souvent, j'ai utilisé la date la plus ancienne, lorsque cela était possible, mais parfois j'ai interrogé mes collègues et choisi de retenir la date où un concept a été particulièrement mis en évidence. Quoi qu'il en soit, j'ai tenté de fournir aux lecteurs un aperçu de l'étendue des dates possibles dans la section « Notes et Bibliographie ».

Les savants sont parfois en désaccord quant à la personne à laquelle telle ou telle découverte doit être attribuée. Par exemple, Heinrich Dörrie cite quatre scientifiques pour lesquelles une certaine version donnée du problème des bœufs d'Archimède ne peut être attribuée à Archimède, et quatre auteurs qui sont d'un avis contraire. De même, il existe un désaccord quant à la paternité du paradoxe de la roue d'Aristote. Chaque fois que possible, j'évoque ces divergences dans le texte même de l'entrée correspondante ou, à défaut, dans la section « Notes et Bibliographie ».

Vous remarquerez qu'un grand nombre de résultats importants furent établis dans les toutes dernières décennies. Par exemple, on a montré en 2002 que, dans le jeu de l'Awalé, si les deux adversaires ne commettent aucune erreur, la partie se termine par un résultat nul. On a obtenu le même résultat en 2007 pour le jeu de dames. Comme je l'ai déjà souligné, une part des progrès aussi récents que rapides des mathématiques s'explique par l'utilisation de l'ordinateur comme outil d'expérimentation. Dans le cas de la solution du jeu de dames, l'analyse commença en 1989 et nécessita des dizaines d'ordinateurs. Le jeu de dames possède approximativement 500 milliards de milliards de positions possibles.

Parfois, je cite certains journalistes scientifiques dans les entrées elles-mêmes, mais, pour des raisons de brièveté exclusivement, je ne mentionne pas la source de la citation. Je prie par avance le lecteur de m'excuser de cette approche ; cependant, les références en fin d'ouvrage devraient permettre d'identifier plus aisément l'auteur des citations.

Il arrive que la dénomination elle-même d'un théorème se révèle épineuse. Par exemple, le mathématicien Keith Devlin tient en 2005, dans sa rubrique pour la Mathematical Association of America, les propos suivants :

> La plupart des mathématiciens prouvent de nombreux théorèmes durant leur existence, et le processus par lequel un théorème porte leur nom est souvent le fruit du hasard. Par exemple, Euler, Gauss et Fermat prouvèrent chacun des centaines de théorèmes, souvent importants, et pourtant leurs noms ne sont associés qu'à quelques-uns d'entre eux. Il arrive que les appellations soient elles-mêmes incorrectes. Le cas le plus notoire est celui de Fermat qui, presque certainement, ne prouva pas le « dernier théorème de Fermat » ; plus vraisemblablement, son nom fut, après sa mort, attribué par un autre mathématicien à une conjecture que Fermat avait gribouillée dans les marges d'un carnet. De même, le théorème de Pythagore fut connu bien avant que Pythagore lui-même n'entrât en scène.

Pour conclure, notons que les découvertes mathématiques offrent une structure grâce à laquelle il est possible d'explorer la nature de la réalité, et que les outils mathématiques permettent aux savants de se livrer à des prévisions sur l'univers ; les découvertes proposées dans ce livre figurent ainsi parmi les plus grands succès de l'humanité.

À première vue, cet ouvrage peut sembler être un long catalogue de concepts et d'individus pris isolément, sans réel lien les unissant. Cependant, au fur et à mesure de votre lecture, je pense que vous commencerez à entrevoir un certain nombre de relations. De toute évidence, l'objectif final des scientifiques et des mathématiciens n'est pas la simple accumulation de faits et de formules, mais de chercher à comprendre les modèles, les principes d'organisation et les relations entre ces faits pour créer de nouveaux théorèmes et des branches entièrement nouvelles de la pensée humaine. À mes yeux, les mathématiques cultivent un état permanent d'émerveillement sur la nature de l'esprit, les limites de la pensée et notre place dans le cosmos.

Notre cerveau, qui a évolué de façon à nous permettre d'échapper aux lions de la savane africaine, n'est peut-être pas à même de percer l'infini secret de la réalité. Il se peut que nous ayons besoin des mathématiques, de la science, des ordinateurs, du développement de notre cerveau et même de la littérature, de l'art et de la poésie. Pour celles et ceux qui s'apprêtent à lire l'ouvrage de bout en bout, recherchez les liens, contemplez avec admiration l'évolution des idées et naviguez sur l'océan illimité de l'imagination.

Remerciements

Je remercie Teja Krašek, Dennis Gordon, Nick Hobson, Pete Barnes et Mark Nandor pour leurs remarques et leurs suggestions. J'aimerais aussi, tout particulièrement, remercier Meredith Hale, l'éditrice de ce livre, ainsi que Jos Leys, Teja Krašek et Paul Nylander pour m'avoir autorisé à inclure leurs œuvres d'art inspirées par les mathématiques.

Lors de ma réflexion sur les étapes importantes et les périodes charnière présentées dans ce livre, j'ai étudié un vaste ensemble de travaux de référence et de sites Web remarquables, dont la plupart ont été recensés en fin d'ouvrage, dans la section « Notes et Bibliographie ». Parmi ces références, je citerai « The MacTutor History of Mathematics Archive » (*www-history.mcs.st-and.ac.uk*), « Wikipédia : L'encyclopédie libre » (*fr.wikipedia.org*), « MathWorld » (*mathworld.wolfram.com*), *Mathematics: From the Birth of Numbers* de Jan Gullberg, *The Universal Book of Mathematics* de David Darling, « Math Trek Archives » d'Ivars Peterson (*www.maa.org/mathland/mathland_archives.html*), *Mathematical Games* de Martin Gardner (CD-ROM disponible auprès de The Mathematical Association of America) et certains de mes propres ouvrages, tels que *A Passion for Mathematics*.

À propos de cette nouvelle édition

La seconde édition française de cet ouvrage propose, avec l'accord de l'auteur, une douzaine de nouveaux événements particulièrement marquants de l'histoire des mathématiques, allant de l'invention de la perspective (1435) ou du calcul littéral (1591) à l'usage de la lunette astronomique (1623) et au calcul du rayon de la Terre (1670) ou, plus proches de nous, la météorologie et les ordinateurs (1952) et les travaux de Maryam Mirzakhani (2014). D'autres événements, déjà présentés dans la première édition, ont été actualisés en fonction de développements récents parfois spectaculaires et l'iconographie a été partiellement renouvelée.

Fourmi et podomètre

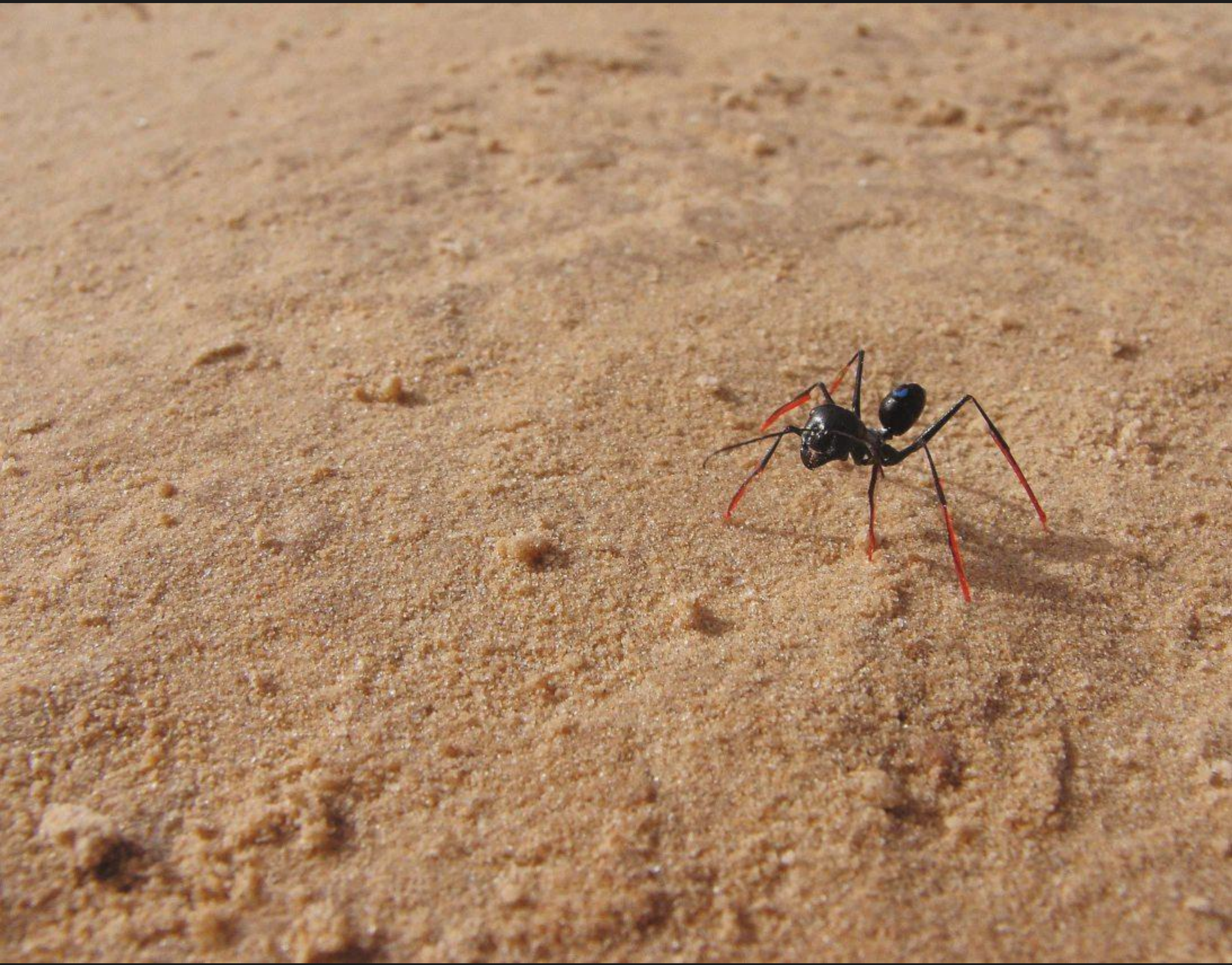
Les fourmis, insectes sociaux, se développèrent à partir d'insectes de type guêpe, au milieu de l'ère crétacée, il y a 150 millions d'années environ. Après l'expansion des plantes à fleurs, 50 millions d'années plus tard environ, les fourmis se diversifièrent en de nombreuses espèces.

La fourmi du Sahara (*Cataglyphis fortis*) parcourt d'immenses distances sur le sable du désert, dépourvue du moindre repère, à la recherche de nourriture. Elle est à même de retourner dans son nid en suivant une route directe au lieu d'emprunter l'itinéraire aller. Non seulement la fourmi s'aide d'indices célestes pour en déduire sa direction, mais elle semble posséder un « ordinateur » intégré qui, tel un podomètre, compte son nombre de pas et lui permet de mesurer exactement les distances. Une fourmi peut parcourir 50 mètres pour trouver un insecte mort. Une fois qu'elle l'a réduit en morceaux, elle le transporte sur son dos jusqu'à son nid, auquel elle accède via un trou dont le diamètre dépasse rarement un millimètre.

En intervenant sur la longueur des pattes des fourmis et en leur permettant soit un pas plus long soit un pas plus court, une équipe de chercheurs suisses et allemands découvrit que les fourmis « comptent » leur pas pour évaluer la distance. Par exemple, une fois que les fourmis avaient atteint leur destination, leurs pattes étaient partiellement amputées ou prolongées de minuscules « échasses ». Puis, les fourmis entamaient le trajet retour. Les fourmis montées sur échasses parcoururent une trop grande distance et dépassèrent l'entrée de leur nid, tandis que les fourmis aux pattes coupées ne purent l'atteindre. En revanche, si les fourmis entamaient leur déplacement depuis le nid avec les pattes amputées, elles parvenaient à calculer les distances exactes à parcourir. Un tel phénomène laisse à penser que la longueur du pas constitue le facteur déterminant. De plus, grâce à l'ordinateur extrêmement sophistiqué dont est pourvu son cerveau, la fourmi sait rapporter une quantité liée à la projection horizontale de son pas, de telle sorte qu'elle ne se perd jamais même si, au cours de son déplacement, le paysage de sable se transforme en montées et descentes.

VOIR AUSSI Capacités numériques des primates (Il y a 30 millions d'années) et Cigales et nombres premiers (Il y a 1 million d'années).

Les fourmis du Sahara semblent posséder un podomètre interne qui leur permet de calculer leur nombre de pas et d'évaluer les distances avec précision. Les fourmis auxquelles on a fixé des « échasses » (en rouge, ci-contre) parcourent une trop grande distance et dépassent l'entrée du nid, ce qui laisse penser que la longueur du pas intervient dans le calcul de la distance.



Capacités numériques des primates

Il y a quelque 60 millions d'années, les petits primates, semblables aux lémuriens, s'étaient répandus dans de nombreuses régions du monde et, 30 millions d'années plus tard, les primates, aux caractéristiques identiques à celles des singes, existaient. Ces animaux savent-ils compter ? La signification du mot calcul chez les animaux est l'objet de vives polémiques parmi les experts du comportement animal. Cependant, selon nombre de scientifiques, les animaux possèdent une certaine idée de la notion de nombre, comme l'écrit H. Kalmus, dans un article intitulé *Animals as Mathematicians* et publié par la revue *Nature* :

> Il n'existe désormais guère de doute qu'il est possible d'apprendre à compter à certains animaux, comme les écureuils et les perroquets… La présence de capacités numériques a été signalée chez les écureuils, les rats et les insectes pollinisateurs. Certains animaux savent différencier les nombres à partir de modèles visuels d'apparence similaire, tandis que d'autres apprennent à identifier et même à reproduire diverses séquences de signaux acoustiques. Quelques animaux sont capables de frapper sur un support le nombre exact d'éléments d'un motif visuel…

Des expériences ont également montré que les rats savaient compter et exécuter une activité le nombre exact de fois demandé en échange d'une récompense. Les chimpanzés sont quant à eux capables d'appuyer sur les touches d'un ordinateur qui correspondent au nombre de bananes contenues dans une boîte. Testsuro Matsuzawa, du *Primate Research Institute* (université de Kyoto, Japon) enseigna à un chimpanzé femelle les nombres 1 à 6. L'animal appuyait sur la touche appropriée quand apparaissait sur l'écran un nombre variable d'objets. De son côté, Michael Beran, chercheur à l'université de Géorgie (États-Unis), montra aux chimpanzés comment se servir d'un écran d'ordinateur et d'une manette. L'écran affichait un chiffre, puis un ensemble de points, et le chimpanzé devait faire correspondre les deux informations. Lorsque, trois années plus tard, les capacités des chimpanzés furent à nouveau testées, les deux savaient encore assortir les nombres, mais avec un taux d'erreur deux fois plus grand.

Otto Köhler, enfin, a montré dans les années 1950 que les perruches savaient reconnaître, parmi plusieurs disques comportant 1 à 6 points, celui ayant le même nombre de points qu'un disque qu'on leur présentait (posé sur un bol contenant quelques graines de récompense).

VOIR AUSSI Fourmi et podomètre (Il y a 150 millions d'années) et Os d'Ishango (18 000 av. J.-C.).

Les primates possèdent certaines capacités numériques et les plus évolués d'entre eux peuvent apprendre à identifier les chiffres en appuyant sur la touche appropriée quand apparaît à l'écran un certain nombre d'objets.

Cigales et nombres premiers

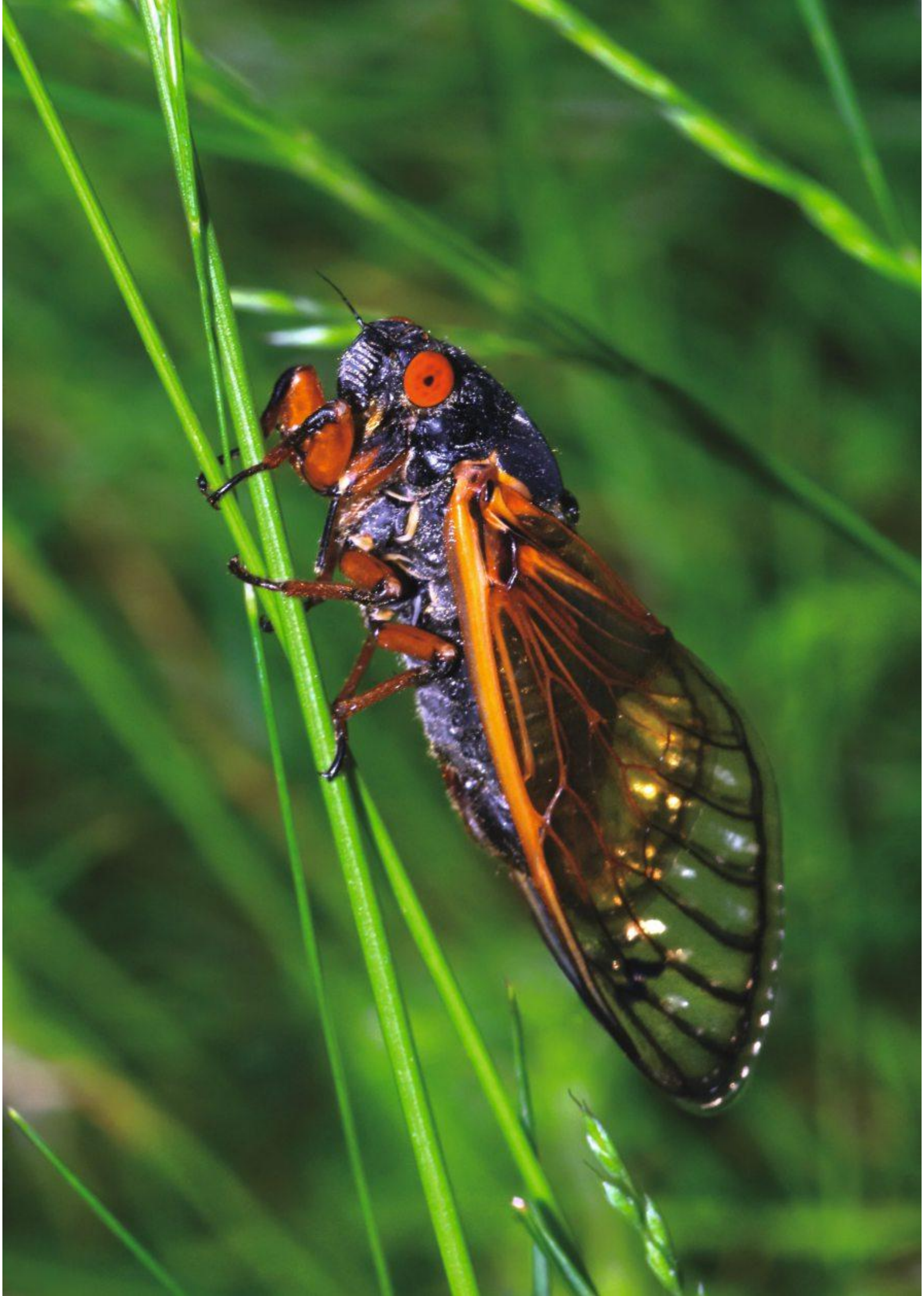
Les cigales sont des insectes ailés dont l'évolution s'est déroulée il y a près de 2 millions d'années, à l'ère pléistocène, lors du déplacement des glaciers à travers l'Amérique du Nord. Les cigales dites *Magicicada* passent la plus grande partie de leur vie sous terre, se nourrissant du jus des racines, puis apparaissent au grand jour, s'accouplent et meurent rapidement. Ces créatures manifestent un comportement étonnant : leur apparition est synchronisée avec des périodes annuelles associées généralement aux nombres premiers 13 et 17. (Un nombre premier est un entier tel que 11, 13 ou 17, par exemple, qui n'admet que deux diviseurs entiers : 1 et lui-même.) Durant le printemps de leur 13e ou 17e année, les cigales creusent un tunnel de sortie. Parfois, ce sont plus d'un million et demi de cigales qui émergent sur la moitié d'un hectare ; il se peut que cette prolifération ait une valeur de survie, dans la mesure où elle surpasse le nombre de prédateurs, tels que les oiseaux, qui se retrouvent dans l'incapacité de manger toutes les cigales.

Selon certains chercheurs, l'évolution de cycles de vie corrélés aux nombres premiers pourrait s'expliquer par le fait que les cigales augmentent ainsi leur chance d'échapper aux parasites et aux prédateurs à la vie plus courte. Par exemple, si le cycle de vie était de 12 ans, tous les prédateurs dont les cycles seraient de 2, 3, 4 ou 6 années, trouveraient plus aisément les cigales. Mario Markus, de l'*Institut Max Planck* de physiologie moléculaire, à Dortmund (Allemagne) et ses collaborateurs ont mis en évidence que ces cycles correspondant à des nombres premiers résultent naturellement de modèles mathématiques d'interactions entre le prédateur et la proie. À des fins d'expérimentation, ils ont attribué des durées de cycle aléatoires à leurs populations d'individus simulées par ordinateur. Après un certain temps, les mutations des cigales obéissaient toujours à un cycle stable d'un nombre premier d'années.

Bien sûr, ces recherches en sont encore à leur début et nombre de questions subsistent. Quelle particularité offrent les nombres 13 et 17 ? Quels prédateurs ou parasites ayant réellement existé ont conduit les cigales à se soumettre à de telles périodes ? De même, la raison pour laquelle, sur les 1 500 espèces de cigales existant à travers le monde, seul un petit nombre du genre *Magicicada* a la réputation d'obéir à une périodicité, demeure mystérieuse.

VOIR AUSSI Fourmi et podomètre (Il y a 150 millions d'années), Os d'Ishango (18 000 av. J.-C.), Crible d'Ératosthène (240 av. J.-C.), Conjecture de Goldbach (1742), Construction d'un heptadécagone régulier (1796), *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss (1801), Preuve du théorème des nombres premiers (1896), Conjecture de Gilbreath (1958), Nombres de Sierpinski (1960), Spirale d'Ulam (1963), Erdös et la collaboration extrême (1971) et Conjecture d'Andrica (1985).

Certaines cigales manifestent un comportement étonnant : leur apparition coïncide avec des périodes associées aux nombres premiers 13 et 17. Parfois, plus d'un million et demi de cigales émergent sur la moitié d'un hectare en un très bref intervalle de temps.



~100 000 av. J.-C.

Nœuds

Il se pourrait que l'invention des nœuds soit antérieure à *Homo sapiens*. Des coquillages, colorés d'ocre et percés de trous, découverts au Maroc, datent d'il y a 82 000 ans. D'autres traces archéologiques laissent penser à une utilisation des perles beaucoup plus ancienne. Le percement implique l'emploi d'une ficelle et d'un nœud pour maintenir les objets dans une boucle, telle qu'un collier.

La quintessence des nœuds ornementaux est illustrée par *Le livre de Kells*, bible remarquablement décorée et manuscrite par des moines celtes vers l'an 800. De nos jours, l'étude des nœuds, tels que le nœud de trèfle à trois croisements, forme une branche des mathématiques. En 1914, le mathématicien allemand Max Dehn (1878 – 1952) montre que les images en miroir d'un nœud de trèfle ne sont pas équivalentes.

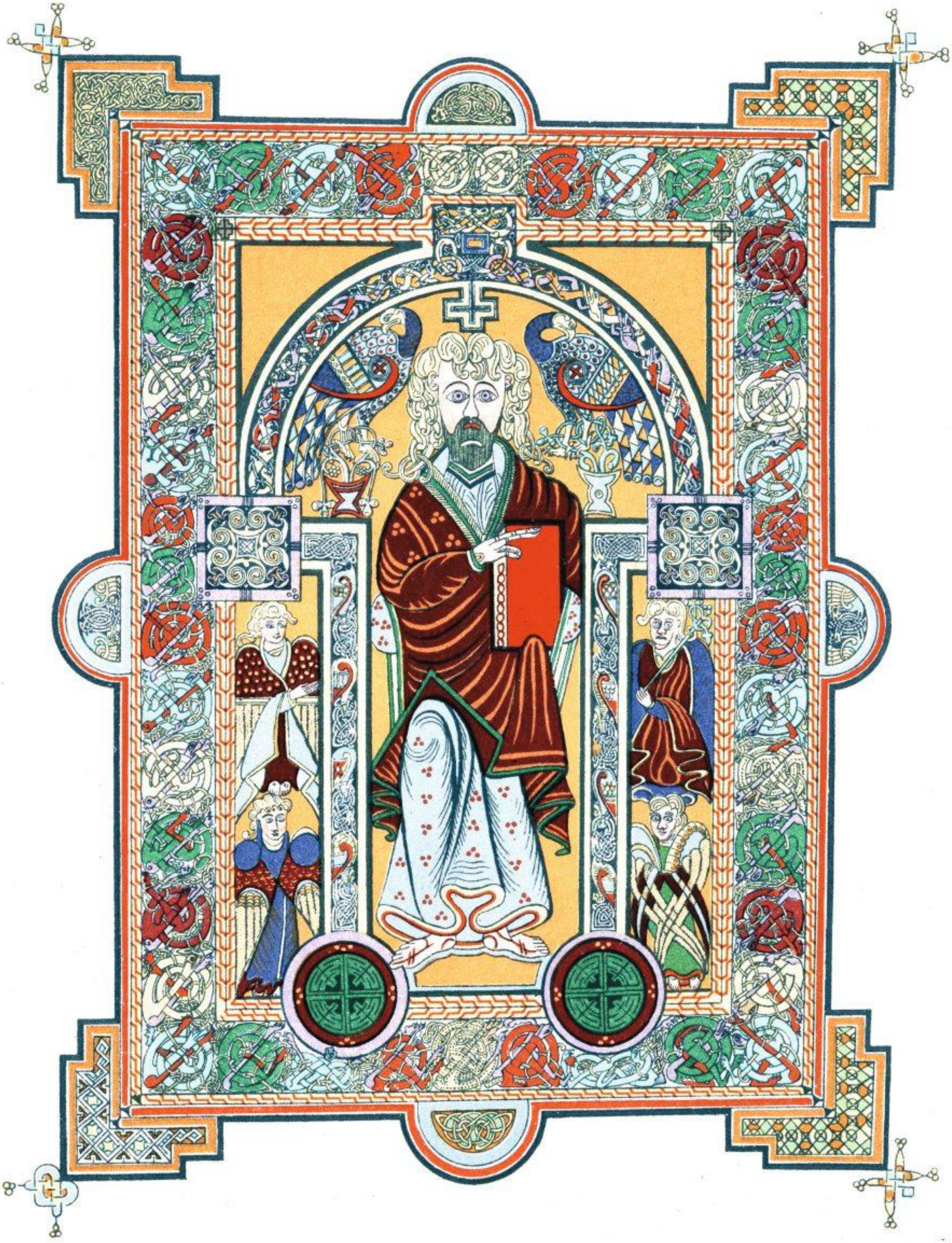
Pendant des siècles, les mathématiciens ont essayé de développer des solutions pour distinguer les écheveaux qui s'apparentent à des nœuds (appelés non-nœuds) des véritables nœuds et ceux-ci les uns des autres. Au fil des ans, ils ont créé des tableaux en apparence interminables de nœuds distincts. Jusqu'à présent, plus de 1,7 million de nœuds différents, dont les images comportent 16 croisements au plus, ont été identifiés.

Des conférences sont entièrement consacrées aux nœuds. Les scientifiques étudient les nœuds aussi bien en génétique moléculaire, pour nous aider à comprendre comment démêler une boucle d'ADN, qu'en physique des particules, afin d'essayer de représenter la nature fondamentale des particules élémentaires.

Les nœuds ont joué un rôle crucial dans le développement de la civilisation, où ils ont été utilisés pour nouer les vêtements, bien attacher les armes au corps, créer des abris et permettre la navigation et, ainsi, l'exploration du monde. Aujourd'hui, la théorie des nœuds en mathématiques a évolué à tel point que la compréhension de ses applications les plus profondes est devenue un véritable défi. En quelques milliers d'années, les humains ont transformé les nœuds de simples attaches de colliers en modèles du tissu même de la réalité.

VOIR AUSSI Quipu (3000 av. J.-C.), Anneaux borroméens (834), Nœuds de Perko (1974), Polynôme de Jones (1984) et Nœuds et loi de Murphy (1988).

La quintessence des nœuds ornementaux est illustrée par Le livre de Kells*, bible remarquablement décorée et manuscrite par des moines celtes vers l'an 800. L'illustration ci-contre propose différents exemples de formes apparentées à des nœuds.*



~18 000 av. J.-C.

Os d'Ishango

En 1960, l'archéologue belge Jean de Heinzelin de Braucourt (1920 – 1998) découvre un os de babouin comportant plusieurs incisions, dans l'actuelle République démocratique du Congo. L'os d'Ishango, avec ses groupes d'entailles, est d'abord interprété comme étant un simple bâton servant à compter et utilisé en Afrique à l'Âge de pierre. Cependant, selon certains scientifiques, les marques laissent penser à des aptitudes mathématiques allant bien au-delà de la simple comptabilisation d'objets.

L'os est trouvé à Ishango, près des sources du Nil, qui abrita une importante population d'hommes et femmes du Paléolithique supérieur avant qu'une éruption volcanique ne recouvre la région. L'une des colonnes commence par trois entailles, qui se multiplient en six. Quatre entailles se multiplient en huit. Dix entailles se divisent en cinq. Nous pourrions penser qu'il s'agit là de la simple connaissance de la multiplication ou de la division par deux. Plus étonnant, le fait que les nombres des autres colonnes sont tous impairs (9, 11, 13, 17, 19 et 21). L'une des colonnes regroupe les nombres premiers entre 10 et 20, tandis que la somme des nombres de chaque colonne est égale à 60 ou à 48, tous deux multiples de 12.

Un certain nombre de bâtons du même type, antérieurs à l'os d'Ishango, ont également été découverts. Par exemple, l'os de Lebombo, au Swaziland, est un péroné de babouin, daté d'environ 37 000 années et comportant 29 encoches. Un tibia de loup, vieux de 32 000 ans et gravé de 57 entailles, regroupées par cinq, a été retrouvé dans l'ex-Tchécoslovaquie. Certains chercheurs ont émis l'hypothèse que les marques sur l'os d'Ishango composaient un calendrier lunaire permettant à une femme de l'Âge de pierre de garder la trace de ses cycles menstruels. De là le slogan selon lequel « la menstruation aurait donné naissance aux mathématiques ». Même si l'os d'Ishango n'était qu'un simple dispositif comptable, ces marques nous distinguent des espèces animales et représentent les premières étapes vers les mathématiques symboliques. Une grande partie du mystère de l'os d'Ishango subsistera tant que d'autres os similaires n'auront pas été retrouvés.

On peut toutefois douter de ces spéculations de scientifiques non mathématiciens supposant que nos ancêtres avaient déjà des notions sur les nombres impairs ou les nombres premiers ! L'ethnomathématicienne Claudia Zaslavsky raconte, dans un de ses textes, que des femmes africaines actuelles font aussi des encoches dans des bâtons, mais pour compter les fois où leurs compagnons les brutalisent. Quand les bâtons sont remplis, elles les quittent.

VOIR AUSSI Capacités numériques des primates (Il y a 30 millions d'années), Cigales et nombres premiers (Il y a 1 million d'années) et Crible d'Ératosthène (240 av. J.-C.).

L'os d'Ishango, avec ses groupes d'entailles, est d'abord interprété comme étant un simple bâton servant à compter et utilisé en Afrique à l'âge de pierre. Cependant, selon certains scientifiques, les marques laissent penser à des aptitudes mathématiques allant bien au-delà de la simple comptabilisation d'objets.

Quipu

Les Incas utilisaient les *quipus* (prononcez quipou), véritable système de consignation des données, composés de cordelettes et de nœuds et destinés à former des nombres. Jusqu'à il y a peu, les quipus les plus anciens remontaient à l'an 650. Cependant, en 2005, un quipu retrouvé dans la ville côtière de Caral, au Pérou, a été estimé vieux de 5 000 ans.

Les Incas d'Amérique du Sud se sont distingués par une civilisation complexe, avec une même religion et une même langue. Même s'ils ne connaissaient pas l'écriture, ils ont développé un système logico-numérique grâce aux quipus dont la complexité variait de trois à un millier de cordelettes. Malheureusement, quand les Espagnols occupèrent l'Amérique du Sud, ils assimilèrent les quipus à l'œuvre du Diable et les détruisirent au nom de Dieu. Il ne subsiste à ce jour que 600 quipus.

Les types de nœuds et leurs positions, les directions des cordelettes, ainsi que leur alignement, leur couleur et leur espacement, représentent des nombres associés à des objets réels. Divers groupes de nœuds étaient utilisés pour les différentes puissances de 10. Ces nœuds servaient probablement à consigner des ressources humaines et matérielles, au même titre que des informations calendaires. Il se peut que les quipus aient permis d'enregistrer d'autres données, telles que plans de construction, modèles de danse, voire événements historiques. Le quipu revêt une grande importance, car il dissipe l'idée que les mathématiques ne prospèrent qu'après qu'une civilisation a développé l'écriture ; cependant, les sociétés peuvent atteindre un état avancé sans même avoir développé un système écrit d'enregistrement. Aujourd'hui, les gestionnaires de fichiers de certains systèmes informatiques sont appelés quipus, en hommage à ce très utile et ancien dispositif.

Le quipu était aussi utilisé par les Incas à des fins plus sinistres, en tant que calculateur de morts ! Chaque année, un certain nombre d'adultes et de jeunes enfants étaient massacrés et l'opération était préparée à l'aide d'un quipu. Certains quipus symbolisaient l'empire, où les cordelettes représentaient les routes et les nœuds les victimes sacrificielles.

VOIR AUSSI Nœuds (100 000 av. J.-C.) et Abaque (1200).

Les Incas utilisaient des quipus composés de cordelettes et de nœuds pour stocker les données quantitatives. Les types de nœuds et leurs positions, les directions des cordelettes, ainsi que leur alignement et leur couleur, représentent des dates et des comptabilisations de personnes ou d'objets.

~ 3 000 av. J.-C.

Dés

Imaginez un monde sans nombres aléatoires. Dans les années 1940, la génération de nombres statistiquement aléatoires a joué un rôle important pour les physiciens simulant les explosions thermonucléaires et, de nos jours, la plupart des réseaux informatiques ont recours aux nombres aléatoires pour acheminer le trafic Internet et éviter les goulots d'étranglement. Les instituts de sondage politique utilisent aussi les nombres aléatoires pour sélectionner des échantillons impartiaux d'électeurs potentiels.

Les dés, fabriqués à l'origine à partir de l'astragale des animaux à sabot, ont été l'un des premiers moyens utilisés pour obtenir des nombres aléatoires. Les anciennes civilisations prêtaient aux dieux la capacité de contrôler le résultat d'un jet de dés ; ainsi, les dés intervenaient lors de prises de décision essentielles, depuis le choix de gouverneurs jusqu'à la répartition d'un terrain en cas d'héritage. Aujourd'hui encore, la métaphore selon laquelle les dés sont contrôlés par Dieu est vivace, comme l'exprime ce propos de l'astrophysicien Stephen Hawking : « Non seulement Dieu joue aux dés, mais il Lui arrive de nous embrouiller en les lançant où personne ne les verra ».

Les dés les plus anciens connus ont été retrouvés en même temps qu'un jeu ancêtre du backgammon, vieux de 5 000 ans, dans la légendaire Cité brûlée, au sud-est de l'Iran. La cité a connu quatre stades de civilisation, détruits à tour de rôle par des incendies, avant qu'elle ne soit abandonnée en 2100 av. J.-C. Sur ce même site, les archéologues ont découvert l'œil artificiel le plus ancien à ce jour, appartenant à une prêtresse ou un augure dont le regard hypnotique obligeait à baisser les yeux.

Pendant des siècles, les jets de dés ont servi à enseigner les probabilités. Pour un seul jet d'un dé à n faces, chacune d'elles portant un chiffre différent, la probabilité d'obtenir n'importe quelle valeur est égale à $1/n$. La probabilité d'obtenir une suite particulière de i nombres est égale à $1/n^i$. Par exemple, la probabilité d'obtenir le chiffre 1 suivi du chiffre 4 sur un dé traditionnel est égale à $1/6^2$, soit 1/36. Si nous lançons deux dés, la probabilité d'obtenir une somme donnée équivaut au nombre de façons de l'obtenir divisé par le nombre total de combinaisons, ce qui explique que la probabilité d'obtenir le nombre total 7 soit plus élevée que celle d'obtenir le nombre 2.

VOIR AUSSI Loi des grands nombres (1713), Aiguille de Buffon (1777), Méthode des moindres carrés (1795), *Théorie analytique des probabilités* (1812), Khi deux (1900), Perdu dans l'hyperespace (1921), L'émergence des machines aléatoires (1938), Stratégie du jeu des cochons (1945) et Générateur de carrés médians (1946).

Les dés, fabriqués à l'origine à partir de l'astragale des animaux à sabot, ont été l'un des premiers moyens utilisés pour obtenir des nombres aléatoires. Dans les anciennes civilisations, les dés servaient à prédire l'avenir, car les dieux étaient censés influer sur le résultat du lancer.