C. DESCHAMPS | F. MOULIN | N. CLEIREC | J.-M. CORNIL |
Y. GENTRIC | F. LUSSIER | C. MULLAERT | S. NICOLAS

MATHS MPSI

TOUT-EN-UN

5e édition

DUNOD

Conception et création de couverture : Hokus Pokus Créations

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-077659-7

Préface

La réforme du lycée, qui a suivi celle du collège, a débuté par la classe de seconde en septembre 2010 et elle s'est achevée, en 2012, avec la mise en œuvre des nouvelles classes de terminale. Les étudiants qui entreprennent des études en classes préparatoires en septembre 2013 ont bénéficié, durant toute leur scolarité, de programmes rénovés, en particulier en mathématiques. Afin d'assurer une continuité avec ces programmes, de nouveaux programmes de classes préparatoires étaient donc indispensables.
En mathématiques, en 1995, lors de la mise en place des programmes de l'époque, les Éditions Dunod nous avaient confié la tâche de fournir aux étudiants un ouvrage de référence clair et précis complétant le cours, irremplaçable, du professeur. Nous avions alors tenté un pari : faire tenir exposés et exercices, avec corrigés, en un seul volume, le premier « tout-en-un » (depuis, très largement imité), qui a remporté un grand succès. Aujourd'hui, avec une équipe partiellement renouvelée et de grande qualité, nous publions ce nouveau « tout-en-un ». Tout en gardant les grands principes de l'ancien ouvrage, ce nouveau « tout-en-un » a l'ambition, en mettant en œuvre de nouvelles méthodes d'acquisition des connaissances, de proposer à l'étudiant une démarche pour s'approprier les théories du programme, théories indispensables tant aux mathématiques qu'aux autres disciplines.
L'esprit qui a guidé l'équipe tout au long de son travail a été de ne pas se contenter d'un « toilettage » de l'ouvrage existant mais bien de concevoir et proposer un cours en conformité avec le texte, mais aussi avec l'esprit, du nouveau programme.
Dans ce but, par exemple, la première partie « Techniques de calcul » est là pour aider les étudiants à réaliser la transition entre les programmes rénovés du lycée et les objectifs de la « formation mathématique » en classes préparatoires. Ces premiers chapitres ont pour mission de consolider et d'élargir les acquis du secondaire, en particulier dans la pratique du calcul, afin d'aborder dans les meilleures conditions le cœur du programme ; à dessein, certaines définitions précises et constructions rigoureuses ont donc été différées à des chapitres
922 ultérieurs (avec un pictogramme comme ci-contre indiquant la page à laquelle se référer).

En pratique :

- Le livre débute par un chapitre 0 : « Pour commencer » ; il ne s'agit pas d'un cours de logique mais d'une acquisition, à minima, de notions fondamentales (assertions, ensembles, quantificateurs), chacune étant très largement illustrée.
- De très nombreux exemples, souvent simples et issus de connaissances du lycée, illustrent chaque définition.

- Les propositions et théorèmes sont énoncés, suivis immédiatement d'exemples élémentaires d'applications, et leurs démonstrations sont l'occasion d'un travail personnel de l'étudiant. Nous avons choisi de ne pas faire figurer systématiquement à la suite de l'énoncé la rédaction complète de ces démonstrations mais plutôt d'indiquer à l'étudiant le principe de celles-ci avec les éléments qui lui permettront de la construire par lui-même et ainsi de mieux s'approprier la propriété. Évidemment, guidé par un renvoi précis en fin du chapitre, il pourra ensuite consulter la démonstration complète et vérifier (ou compléter) son travail personnel.
- Lorsque plusieurs preuves étaient possibles, nous avons choisi de ne pas privilégier systématiquement la plus courte, souvent au profit de constructions explicites. C'est volontaire ; durant leurs études au lycée nos étudiants n'ont en général pas construit les objets mathématiques qu'ils ont utilisés : ils se sont contentés d'en admettre les propriétés. Or construire un objet, comme le fait un artisan, c'est se l'approprier, connaître parfaitement ses propriétés et les limites de ces propriétés.
- Au cours du déroulement de chaque chapitre, l'étudiant trouvera, pour illustrer immédiatement l'usage des propositions et théorèmes, de très nombreux exercices simples qu'il doit évidemment chercher et dont il pourra consulter une solution en fin de chapitre afin de vérifier son propre travail.
- Régulièrement l'étudiant trouvera des « point méthode » qui, pour une situation donnée, lui offrent une ou deux possibilités d'approche de la résolution de son problème. Évidemment il trouvera après ce « point méthode » un ou plusieurs exemples ou exercices l'illustrant.
- Enfin, à l'issue de chaque chapitre, il trouvera des exercices plus ambitieux demandant plus de réflexion, à chercher une fois le chapitre totalement maitrisé. Certains plus difficiles sont signalés par des étoiles ; les solutions de tous ces exercices complémentaires sont données, mais parfois de façon plus succincte que les solutions des exercices fondamentaux figurant dans le déroulement du cours.
- Bien entendu nous sommes très intéressés par toute remarque que les étudiants, nos collègues, tout lecteur... seraient amenés à nous communiquer. Cela nous permettra, le cas échéant, de corriger certaines erreurs nous ayant échappé et surtout ce contact nous guidera pour une meilleure exploitation des choix pédagogiques que nous avons faits aujourd'hui dans cet ouvrage.

Claude Deschamps et François Moulin

Le site
les-maths-en-prepas.fr

Ce livre est prolongé par un site web qui vous aidera à assimiler efficacement le programme de première année. Ce site, en synergie complète avec l'ouvrage mais qu'il ne remplace absolument pas, a été développé par certains des auteurs du livre pour offrir des compléments pédagogiques impossibles à mettre dans un ouvrage papier sous peine de le rendre illisible. Ces compléments portent à la fois sur les exercices et sur le cours.

- En ce qui concerne les **exercices**, il ne s'agit pas juste d'une série supplémentaire d'exercices corrigés. Au contraire, l'interactivité que permet l'ordinateur ou la tablette est mise à profit pour vous fournir des niveaux d'explication bien plus détaillés que ceux d'un livre, pour vous proposer des pistes, voire de fausses pistes qu'il est bon d'avoir explorées afin de bien comprendre pourquoi elles ne mènent à rien. C'est vous-même qui choisirez, en fonction des problèmes de compréhension que vous rencontrerez, d'accéder ou non à ces différents niveaux d'explication, avant d'aboutir à une solution exhaustive et complètement rédigée.
- En ce qui concerne le **cours**, la présentation des chapitres vous aidera à réviser plus efficacement en vue d'une colle ou d'une interrogation écrite. Après avoir étudié et travaillé votre cours sur papier avec le livre, la forme interactive du site vous permettra d'évaluer l'état exact de vos connaissances. Plutôt que de relire des pages de cours (ou des fiches, par nature incomplètes) au risque de vous y endormir, vous pourrez bénéficier de la présentation inversée des chapitres : partant de la table des matières et affinant par étapes successives, elle est conçue pour vous inciter à vous demander ce qu'il peut y avoir dans chaque partie qui n'est pas encore développée, quel théorème ou quelle propriété peut bien s'y trouver, quel en est l'énoncé exact, et quels exemples, contre-exemples ou cas particuliers peuvent vous fournir une aide précieuse pour « assurer » ce résultat. Cette démarche, privilégiée par les auteurs du site, est exactement celle dont vous aurez besoin lors d'une interrogation orale ou écrite.

Que ce soit pour les exercices ou pour le cours, il ne faut pas chercher sur ce site des questions ou des exercices pointus issus des oraux des écoles les plus prestigieuses. Le but poursuivi est avant tout pédagogique : permettre à chacun, quel que soit son niveau, d'acquérir les bases et les réflexes indispensables pour effectuer une bonne première année, et de ne plus avoir d'angoisse sur les notions au programme. L'idée essentielle est qu'en allant voir un peu plus loin que le simple énoncé d'un théorème ou d'une formule, en assimilant en même temps le principe de la démonstration, des exemples et des contre-exemples, il est plus facile d'en avoir une connaissance précise.

Enfin, bon nombre de questions sont enrichies de **graphiques interactifs animés** qui vous faciliteront l'assimilation de certaines notions en les visualisant et les manipulant plus facilement.

Table des matières

Préface iii

Le site `les-maths-en-prepas.fr` complémentaire du livre v

Table des matières vi

Chapitre 0. Pour commencer 1

I Assertions, ensembles et prédicats 3
II Quantificateurs 7
Démonstrations et solutions des exercices du cours 14

Partie I. Techniques de calcul

Chapitre 1. Droite numérique, fonctions à valeurs réelles 19

I Ensemble des nombres réels 20
II Fonctions réelles 29
III Dérivabilité – Rappels de Terminale 40
IV Fonctions trigonométriques 51
Démonstrations et solutions des exercices du cours 66
Exercices 85

Chapitre 2. Calculs algébriques 93

I Symboles $\sum$ et $\prod$ 94
II Coefficients binomiaux, formule du binôme 109
III Systèmes linéaires, méthode du pivot 113
Démonstrations et solutions des exercices du cours 128
Exercices 141

Chapitre 3. Nombres complexes 149

I L'ensemble des nombres complexes 151
II Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$ 164
III Applications géométriques 170
Démonstrations et solutions des exercices du cours 174
Exercices 189

Chapitre 4. Fonctions usuelles 203

I Fonctions logarithmes et exponentielles 204
II Fonctions puissances 208
III Fonctions circulaires réciproques 212
IV Fonctions hyperboliques 218
V Fonctions à valeurs complexes 220
Démonstrations et solutions des exercices du cours 224
Exercices 233

Chapitre 5. Primitives et équations différentielles linéaires 245

I Primitives 246
II Équations différentielles linéaires du premier ordre 259
III Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants 268
Démonstrations et solutions des exercices du cours 274
Exercices 291

Partie II. Raisonnement et vocabulaire

Chapitre 6. Raisonnement, opérations sur les ensembles 309

I Implication et équivalence 310
II Opérations sur les ensembles 315
III Pratique de la démonstration 321
Démonstrations et solutions des exercices du cours 327

Chapitre 7. Applications, relations, entiers naturels 333

I Applications, fonctions 334
II Relations binaires 347
III L'ensemble des entiers naturels 356
IV Notions sur les ensembles finis 362
Démonstrations et solutions des exercices du cours 366
Exercices 381

Partie III. Analyse

Chapitre 8. Nombres réels, suites numériques 391

I L'ensemble des nombres réels 393
II Généralités sur les suites réelles 400
III Limite d'une suite réelle 403
IV Opérations sur les limites 409
V Résultats d'existence de limites 414
VI Intermède : comment démontrer la convergence d'une suite ? . 417
VII Traduction séquentielle de certaines propriétés 418
VIII Suites complexes 420
IX Suites récurrentes 424
X Relations de comparaison sur les suites 429
Démonstrations et solutions des exercices du cours 438
Exercices 468

Chapitre 9. Limites et continuité 483

I L'aspect ponctuel : limites, continuité 484
II L'aspect global : fonctions continues sur un intervalle 508
III Extension aux fonctions à valeurs complexes 519
Démonstrations et solutions des exercices du cours 522
Exercices 540

Chapitre 10. Dérivation 551

I Dérivée 552
II Théorèmes de Rolle et des accroissements finis 560
III Fonctions continument dérivables 571
IV Extension aux fonctions à valeurs complexes 578
Démonstrations et solutions des exercices du cours 583
Exercices 599

Chapitre 11. Intégration 611

I Intégrale des fonctions en escalier 613
II Intégrale des fonctions continues par morceaux 617
III Inégalités 622
IV Extension aux fonctions à valeurs complexes 624
V Sommes de Riemann 625
Démonstrations et solutions des exercices du cours 627
Exercices 636

Chapitre 12. Calcul intégral 643

I Notation $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 644
II Intégration et dérivation 647
III Calcul d'intégrales 650
IV Formules de Taylor 657
V Application aux méthodes numériques 660
Démonstrations et solutions des exercices du cours 664
Exercices 682

Chapitre 13. Analyse asymptotique 691

I Fonctions dominées, fonctions négligeables 692
II Fonctions équivalentes 696
III Développements limités : généralités 706
IV Opérations sur les développements limités 718
V Applications des développements limités 732
VI Développements asymptotiques 737
Démonstrations et solutions des exercices du cours 740
Exercices 764

Chapitre 14. Séries 777

I Séries numériques 778
II Séries à termes réels positifs 783
III Séries absolument convergentes 790
IV Représentation décimale d'un réel 792
Démonstrations et solutions des exercices du cours 796
Exercices 807

Partie IV. Algèbre

Chapitre 15. Arithmétique dans $\mathbb{Z}$ 823

I Divisibilité dans $\mathbb{Z}$ 824
II PGCD, PPCM 826
III Nombres premiers 837
IV Congruences 842
Démonstrations et solutions des exercices du cours 845
Exercices 855

Chapitre 16. Structures algébriques usuelles 863

I Lois de composition interne 864
II Groupes 869

III Anneaux 871
IV Espaces vectoriels 876
V Exemple : une construction de $\mathbb{C}$ 876
Démonstrations et solutions des exercices du cours 879

Chapitre 17. Polynômes 885

I Anneau des polynômes à une indéterminée 886
II Divisibilité et division euclidienne 894
III Fonctions polynomiales et racines 896
IV Dérivation 906
V Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$ 910
VI Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$ 912
VII Une preuve du théorème de d'Alembert 922
Démonstrations et solutions des exercices du cours 924
Exercices 943

Chapitre 18. Fractions rationnelles 955

I Corps des fractions rationnelles 956
II Décomposition en éléments simples 962
III Primitives d'une fonction rationnelle 971
Démonstrations et solutions des exercices du cours 974
Exercices 983

Chapitre 19. Espaces vectoriels 997

I Espaces vectoriels 999
II Sous-espaces vectoriels 1001
III Applications linéaires 1007
IV Sous-espaces affines d'un espace vectoriel 1012
V Retour sur les sous-espaces engendrés 1016
Démonstrations et solutions des exercices du cours 1019
Exercices 1029

Chapitre 20. Décompositions en algèbre linéaire 1035

I Familles et parties génératrices 1037
II Familles et parties libres 1040
III Bases d'un espace vectoriel 1047
IV Sommes de sous-espaces vectoriels 1052
V Formes linéaires et hyperplans 1064
Démonstrations et solutions des exercices du cours 1067
Exercices 1083

Chapitre 21. Dimension finie 1089

I Dimension d'un espace vectoriel 1090
II Relations entre les dimensions 1097
III Applications linéaires et dimension finie 1102
IV Formes linéaires et hyperplans 1106
Démonstrations et solutions des exercices du cours 1110
Exercices 1127

Chapitre 22. Matrices 1133

I Calcul matriciel 1134
II Représentations matricielles 1145
III Écriture par blocs 1156
IV Rang d'une matrice 1159
Démonstrations et solutions des exercices du cours 1162
Exercices 1178

Chapitre 23. Opérations élémentaires, Systèmes linéaires 1195

I Opérations élémentaires 1196
II Systèmes linéaires 1201
III Systèmes de Cramer 1205
Démonstrations et solutions des exercices du cours 1209
Exercices 1215

Chapitre 24. Déterminants 1225

I Groupe symétrique 1226
II Formes p–linéaires alternées 1232
III Déterminant d'une famille de vecteurs 1237
IV Déterminant d'un endomorphisme 1241
V Déterminant d'une matrice carrée 1242
VI Calcul des déterminants 1246
VII Comatrice 1251
Démonstrations et solutions des exercices du cours 1252
Exercices 1269

Chapitre 25. Espaces euclidiens 1285

I Produit scalaire 1286
II Orthogonalité 1293
III Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie 1298
Démonstrations et solutions des exercices du cours 1303
Exercices 1312

Chapitre 26. Isométries et matrices orthogonales 1317

I Isométries vectorielles 1318
II Matrices orthogonales 1320
III Isométries vectorielles en dimension 2 1326
Démonstrations et solutions des exercices du cours 1330
Exercices 1335

Chapitre 27. Géométrie affine et euclidienne 1341

I Sous–espaces affines 1343
II Parallélisme et intersection 1351
III Géométrie euclidienne 1354
Démonstrations et solutions des exercices du cours 1359

Partie V. Probabilités

Chapitre 28. Dénombrement 1367

I Ensembles finis 1368
II Dénombrement 1374
Démonstrations et solutions des exercices du cours 1383
Exercices 1393

Chapitre 29. Probabilités sur un univers fini 1403

I Univers finis 1404
II Espaces probabilisés 1407
III Probabilités conditionnelles 1413
IV Indépendance 1421
Démonstrations et solutions des exercices du cours 1427
Exercices 1440

Chapitre 30. Variables aléatoires sur un univers fini 1455

I Une application liée à une expérience aléatoire : la variable aléatoire 1456
II Couples de variables aléatoires 1467
III Indépendance de variables aléatoires 1474
IV Espérance d'une variable aléatoire 1480
V Variance 1486
VI Covariance 1491
Démonstrations et solutions des exercices du cours 1496
Exercices 1522

Chapitre 0 : Pour commencer

I Assertions, ensembles et prédicats 3

1 Assertions 4

2 Ensembles 4

3 Prédicats 5

4 Connecteurs élémentaires « NON », « OU », « ET » 5

II Quantificateurs 7

1 Quantificateur universel et existentiel 7

2 Négation et quantificateurs 10

3 Succession de quantificateurs 11

4 De la bonne utilisation des symboles 13

Démonstrations et solutions des exercices du cours . . 14

Pour commencer 0

L'activité mathématique se développe suivant trois axes principaux :

- la *construction* d'objets mathématiques, qui peuvent être des nombres, des figures géométriques, des fonctions, ..., ainsi que la caractérisation à l'aide de *définitions* de certains d'entre eux ; ces objets servant souvent de modèles pour étudier les phénomènes physiques, chimiques, biologiques, etc ;
- la *recherche de propriétés* que peuvent posséder ces objets, ce qui amène à énoncer des **conjectures** c'est-à-dire des propriétés que l'on pense vraies car on a pu les vérifier sur plusieurs cas particuliers, par observation de dessins ou encore par utilisation de moyens informatiques ;
- la *démonstration* de certaines propriétés énoncées précédemment ; une fois démontrées, ces propriétés prennent le nom de théorèmes, propositions, lemmes, corollaires, etc.

Dans ce livre, pour distinguer les différents résultats que nous allons démontrer, nous leur donnons les noms de :

- **proposition** pour la plupart des résultats,
- **théorème** pour les résultats les plus fondamentaux,
- **corollaire** pour les conséquences immédiates de résultats précédents,
- **lemme** pour certains résultats préliminaires, utiles pour la suite, mais dont l'intérêt intrinsèque est assez limité.

I Assertions, ensembles et prédicats

Vous avez certainement déjà rencontré des affirmations telles que :

$\boxed{1}$ « 7 est un entier pair » ;

$\boxed{2}$ « $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$ » ;

$\boxed{3}$ « f est une fonction affine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ » ;

$\boxed{4}$ « toute fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est continue » ;

$\boxed{5}$ « toute fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dérivable » ;

$\boxed{6}$ « on a $(a+b)^2 = a^2+b^2$ » ;

$\boxed{7}$ « on a $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$ » ;

$\boxed{8}$ « le nombre x est un carré » ;

$\boxed{9}$ « un triangle est rectangle si, et seulement si, le carré de l'un des côtés est égal à la somme des carrés des deux autres côtés ».

Parmi les affirmations précédentes, vous pouvez justifier, ou vous savez :

- que certaines, comme $\boxed{2}$, $\boxed{4}$, et $\boxed{9}$, sont vraies ;
- que d'autres, comme $\boxed{1}$ et $\boxed{5}$, sont fausses.

Mais il en existe plusieurs qui dépendent de variables plus ou moins explicitées et qui peuvent être vraies dans certains cas et fausses dans d'autres.

- L'affirmation $\boxed{3}$ est vraie lorsque f est la fonction $x \mapsto 2x+1$, mais elle est fausse lorsque f est la fonction $x \mapsto x^2$.
- L'affirmation $\boxed{6}$ est vraie pour quelques (rares) valeurs de a et b, mais elle est fausse dans une grande majorité de cas.
- L'affirmation $\boxed{7}$ est vraie lorsque a et b sont des complexes quelconques, mais elle n'est pas toujours vraie si a et b désignent des matrices 2×2.
- L'affirmation $\boxed{8}$ dépend évidemment de x, mais elle dépend aussi de la nature des valeurs que peut prendre cette variable x :
  * si l'on travaille avec des entiers naturels, elle n'est est vraie que pour certaines valeurs de x : lorsque x est « un carré parfait » ;
  * si l'on travaille avec des nombres réels, elle est vraie lorsque x est un nombre positif ;
  * si l'on travaille avec des nombres complexes, elle est vraie pour tout x.

Par suite, lorsque les affirmations dépendent de variables, il est indispensable de préciser dans quels *ensembles* on prendra ces variables.

1 Assertions

La notion d'assertion sera considérée comme une notion première, que nous ne définirons pas rigoureusement : il faut bien partir de quelque chose !

- Intuitivement, une **assertion** est une phrase mathématique, sans variable, à laquelle on peut donner un sens.
- Dans le cadre de notre étude, on admet qu'une telle assertion est soit **vraie** soit **fausse**, et qu'elle ne peut être simultanément vraie et fausse : c'est ce que l'on appelle le **principe du tiers exclu**.

Exemples

1. « 2 est un entier impair » est une assertion fausse.
2. « $(1000+1)^2 = 1000^2 + 2000 + 1$ » est une assertion vraie.
3. « $1 = 2+$ » n'est pas une assertion ; d'ailleurs, sur une telle entrée, l'analyseur syntaxique de tout langage informatique, voire celui de votre calculatrice, retournerait alors un message de type « `syntax error` ».

Conventions Si P est une assertion :

- on écrit la plupart du temps « on a P » ou « ... donc P » au lieu de « P est vraie » ou « donc P est vraie » ;
- de même on écrit « supposons P » au lieu de « supposons P vraie ».

2 Ensembles

La théorie des ensembles a vu le jour dans le dernier quart du XIX^e siècle. Il n'est pas question dans cette section d'en faire une étude axiomatique abstraite, mais plutôt d'en donner le vocabulaire et les règles d'utilisation. Les notions d'**ensemble** et d'**élément** sont ici considérées comme des notions premières ; un ensemble correspond intuitivement à une « collection d'objets » qui sont les « éléments » de cet ensemble.

Notations

- Lorsque a est un élément et E un ensemble :
  * l'assertion $a \in E$, qui se lit « a appartient à E » ou « E contient a », est vraie si a est élément de E, et elle est fausse dans le cas contraire ;
  * lorsque a n'est pas élément de E, on écrit $a \notin E$.
- Les notions d'*ensemble* et d'*élément* sont relatives puisque nous verrons dans la suite qu'un ensemble peut être élément d'un autre ensemble (*cf.* définition 7 de la page 318).
- L'usage veut que, lorsque l'on choisit les notations, on désigne habituellement les éléments par des lettres minuscules et les ensembles par des lettres majuscules : on écrira donc plutôt $a \in E$ pour signifier que « l'élément a appartient à l'ensemble E » mais, comme toujours, il y a des exceptions (comme par exemple pour les éléments de $\mathcal{P}(E)$ que nous verrons page 318).

Description d'un ensemble Lorsque p est un entier naturel non nul et que l'on dispose de p éléments distincts notés a_1, …, a_p, alors on admet qu'il existe un unique ensemble E contenant ces p éléments et aucun autre, ensemble que l'on note alors $E = \{a_1, \ldots, a_p\}$.

Exemples

- $E = \{1, 3, 5, 7\}$ est l'ensemble contenant les quatre premiers entiers impairs.
- On peut parfois être amené à utiliser la notation $\{a_1, \ldots, a_p\}$ avec des éléments pas tous distincts : par exemple, si $a_1 = a_2$, alors on a $\{a_1, a_2\} = \{a_1\}$.

3 Prédicats

On appelle **prédicat** toute phrase mathématique faisant intervenir (au moins) une variable et telle que, dès que l'on attribue une valeur à chaque variable y figurant, on obtienne une assertion qui est donc soit vraie soit fausse.

Exemples

1. « $x^2 - 1 = 0$ » est un prédicat qui est vrai si l'on donne au réel x les valeurs ± 1, et qui est faux dans tous les autres cas.
2. « $x^2 - 1 \geqslant 0$ » est un prédicat dont la variable x peut appartenir à $\mathbb{R}$ mais pas à $\mathbb{C}$ puisque l'on n'utilise pas d'inégalité sur $\mathbb{C}$.
3. « $x^2 + x + 1 + y^2 = 0$ » est un prédicat à deux variables, chacune d'entre elles pouvant appartenir à $\mathbb{C}$.

4 Connecteurs élémentaires « NON », « OU », « ET »

En Mathématiques, il est utile de nier certaines relations ou d'en relier d'autres par « et », « ou » voire « si …, alors ». Toutefois dans le langage courant ces mots de liaison, ces **connecteurs**, n'ont pas une signification unique :

- Le « *ou* » peut être utilisé avec des sens différents, comme par exemple :
  - *ou* exclusif — ex : fromage *ou* dessert,
  - *ou* mathématique — ex : s'il pleut *ou* s'il fait du vent, je ne sors pas,
  - *ou* conditionnel — ex : mange ta soupe *ou* tu seras puni(e).
- De même le « *et* » peut avoir le sens temporel de « puis », lorsque l'on dit « je prends un livre sur l'étagère et je le lis ».

Une telle multiplicité de significations est évidemment impensable lorsque l'on fait des mathématiques, ce qui justifie les définitions suivantes qui ne font que codifier une partie du langage courant le plus usuel.

Définitions

Définition 1

- Si P est une assertion alors $\textsc{non}\,P$, appelée **négation** de P, est une assertion qui est vraie lorsque P est fausse et uniquement dans ce cas.
- si P et Q sont deux assertions alors $P\ \textsc{ou}\ Q$ est une assertion qui est vraie lorsqu'au moins l'une des deux est vraie.
- si P et Q sont deux assertions alors $P\ \textsc{et}\ Q$ est une assertion qui est vraie lorsque les deux assertions sont vraies et uniquement dans ce cas.

Remarque Dans le texte de ce chapitre nous noterons ces connecteurs « NON », « OU », « ET », pour les distinguer de ceux du langage courant, mais rapidement ensuite, nous utiliserons les graphismes classiques « non », « ou », « et ».

Exemples

1. Si a est un élément et si E est un ensemble, alors l'assertion « $\textsc{non}\,(a \in E)$ » se note aussi « $a \notin E$ » .
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, l'assertion « $\textsc{non}\,(x = 0)$ » se note aussi « $x \neq 0$ ».
3. Si x est un nombre réel quelconque, l'assertion « $x^2 - 1 = 0$ » et l'assertion « $(x = 1)\ \textsc{ou}\ (x = -1)$ » sont simultanément vraies ou simultanément fausses.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'assertion « $(x-1)^2+y^2 = 0$ » et l'assertion « $(x = 1)\ \textsc{et}\,(y = 0)$ » sont simultanément vraies ou simultanément fausses.

   Il n'en est évidemment pas de même si $x \in \mathbb{C}$ ou $y \in \mathbb{C}$, puisque, par exemple, si $x = 0$ et $y = i$ la première assertion est vraie mais pas la seconde.
5. Pour $x \in \mathbb{R}$, l'assertion « $-1 \leqslant x \leqslant +1$ » devrait se noter :
   $$(-1 \leqslant x)\ \textsc{et}\ (x \leqslant +1).$$
   Bien que tout humain comprenne la première forme, c'est sous la seconde qu'il faut l'écrire dans n'importe quel langage de programmation.
6. Si P est une assertion alors :
   - $P\ \textsc{et}\,(\textsc{non}\,P)$ est fausse, c'est le **principe du tiers exclu**,
   - $P\ \textsc{ou}\,(\textsc{non}\,P)$ est vraie, puisque toute assertion est vraie ou fausse.

Rappelons qu'en Mathématiques, ce n'est pas parce que l'on a écrit une assertion qu'elle est vraie. Il arrive donc souvent d'avoir à nier une assertion, et vous avez certainement déjà dû faire une démonstration par l'absurde où, pour démontrer une propriété P, vous avez supposé $(\textsc{non}\,P)$ vraie.

Règles de négation

Exemple Si x est un réel, on visualise immédiatement sur l'axe réel que :

- la négation de « $x \geqslant -1$ » est « $x < -1$ » ;
- la négation « $x \leqslant 1$ » est « $x > 1$ » ;
- l'assertion « $(x \geqslant -1)\,\textsc{et}\,(x \leqslant 1)$ » et l'assertion « $(x < -1)\,\textsc{ou}\,(x > 1)$ » sont, chacune, la négation de l'autre.

Conformément à l'usage courant et aux exemples précédents, on utilise les règles suivantes pour nier une assertion de type P ET Q ou de type P OU Q.

Règles de négation du « ET » et du « OU »

Si P et Q sont deux assertions, alors :

- l'assertion NON (P ET Q) s'écrit aussi (NON P) OU (NON Q) ;
- l'assertion NON (P OU Q) s'écrit aussi (NON P) ET (NON Q).

Remarque Il est indispensable de savoir utiliser ces règles automatiquement, et sans hésiter, pour nier une assertion des types précédents.

p.14 **Exercice 1** Soit A, B et C trois points du plan formant un triangle $\mathcal{T}$.

1. Écrire une assertion portant sur AB, BC et CA, et exprimant que $\mathcal{T}$ est un triangle équilatéral.
2. En déduire une assertion exprimant que $\mathcal{T}$ n'est pas équilatéral.
3. Comment exprimer que $\mathcal{T}$ n'est pas isocèle ?

II Quantificateurs

1 Quantificateur universel et existentiel

Soit $A(x)$ un prédicat à une variable x défini sur E, c'est-à-dire tel que pour tout élément $x_0 \in E$, l'écriture $A(x_0)$ soit une assertion. On peut alors construire :

- l'assertion : $\forall x \in E \quad A(x)$
  - ∗ qui se lit « pour tout x de E, on a $A(x)$ » ,
  - ∗ qui, par définition, est vraie lorsque l'assertion $A(x_0)$ est vraie pour tout élément x_0 de l'ensemble E ;

  le symbole « $\forall$ » est appelé **quantificateur universel** ;
- l'assertion : $\exists x \in E \quad A(x)$
  - ∗ qui se lit « il existe un x de E tel que $A(x)$ »,
  - ∗ qui, par définition, est vraie lorsqu'il existe (au moins) un élément x_0 de l'ensemble E tel que l'assertion $A(x_0)$ soit vraie ;

  le symbole « $\exists$ » est appelé **quantificateur existentiel**.

Exemples

1. L'assertion « $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 + 1 \geqslant 0$ » est vraie. En effet pour tout nombre réel x_0 choisi, les règles de calcul sur les nombres réels nous disent que $x_0^2 + 1$ est supérieur (ou égal) à 1, et donc positif.
2. L'assertion « $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 1 \geqslant 0$ » est fausse puisque, si l'on donne à x la valeur $x_0 = 0$, alors on a $x_0^2 - 1 < 0$.
3. L'assertion « $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 1 \geqslant 0$ » est vraie, puisque le nombre réel $x_0 = 1$ vérifie bien $x_0^2 - 1 \geqslant 0$.

p.14 **Exercice 2** Que pensez-vous de « $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2+1=0$ » ?

p.14 **Exercice 3** Que pensez-vous de « $\exists x \in \mathbb{C} \quad x^2+1=0$ » ?

Remarques

- Malgré les apparences, « $\forall x \in E \quad A(x)$ » ne dépend d'aucun x !

  La lettre x figurant dans cette assertion a le statut de **variable muette**. En effet cette assertion peut aussi être écrite : « $\forall y \in E \quad A(y)$ », ou encore « $\forall z \in E \quad A(z)$ », sans en modifier le sens.

- Il en est de même de l'assertion « $\exists x \in E \quad A(x)$ » : elle affirme qu'il existe (au moins) un élément x de E tel que $A(x)$ soit vrai, mais n'en définit aucun en particulier.

Exemples Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- L'assertion « $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geqslant 0$ », qui pourrait tout aussi bien s'écrire « $\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) \geqslant 0$ », traduit « la fonction f est positive » ;
- L'assertion « $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x)=0$ » se traduit par « la fonction f s'annule ».

Dans aucune de ces phrases en français, il n'y a la moindre trace du moindre x !

Point méthode (quand on a une conclusion du type « $\forall x \in E \quad A(x)$ »)

Pour démontrer une assertion de ce type, on commence la plupart du temps par fixer un élément quelconque x de E, avec lequel on doit alors travailler pour démontrer que l'assertion $A(x)$ est vraie. Une telle démonstration doit donc commencer par *« Soit x un élément de E »* ou encore *« Soit $x \in E$ »*.

Point méthode (quand on a une conclusion du type « $\exists x \in E \quad A(x)$ »)

Pour démontrer une assertion de ce type, la première méthode à laquelle penser est de construire un élément x de E tel que $A(x)$ soit vraie.

Exemples Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=x^2+x+1$.
- Démonstration de l'assertion $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x)>0$.

  Soit $x \in \mathbb{R}$. On a alors :
  $$f(x)=\Big(x+\frac{1}{2}\Big)^2+\frac{3}{4},$$
  et donc $f(x) \geqslant \frac{3}{4} > 0$. On a ainsi prouvé $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x)>0$.

- Démonstration de l'assertion $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x)>2$.

  En prenant $x=1$, on a $f(x)=3$. Par suite, on a prouvé $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x)>2$.

Point méthode (quand on a une hypothèse du type « $\forall x \in E \quad A(x)$ »)

Si l'on sait que « $\forall x \in E \quad A(x)$ » est vraie, alors on peut évidemment utiliser $A(x)$ avec n'importe quel élément $x \in E$ mais, la plupart du temps, il suffit de choisir un « bon élément », un « élément judicieux », dépendant du but que l'on veut atteindre.

Point méthode (quand on a une hypothèse du type « $\exists x \in E \quad A(x)$ »)

Si l'on sait que « $\exists x \in E \quad A(x)$ » est vraie, alors on peut prendre un élément $x \in E$ tel que $A(x)$ soit vrai, mais il est indispensable d'introduire un tel élément par une phrase du type *« Prenons $x \in E$ tel que $A(x)$ »*; il faut alors faire avec cet élément qui nous est donné, offert, et l'on ne peut pas, sans justification supplémentaire, lui attribuer d'autres propriétés.

Exemples Étant donné deux réels a et b, on considère ici la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout x réel, par $f(x) = a\,x^2 + b$.

- Montrons que si l'on a $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0$, alors on a $a = b = 0$.

  Supposons donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad a\,x^2 + b = 0$.

  * En utilisant cette hypothèse avec $x = 0$, on obtient $b = 0$.
  * Puis, en utilisant alors l'hypothèse avec $x = 1$, on obtient $a = 0$.

  On en déduit $a = b = 0$, ce qui termine la démonstration.

  Remarque Parmi l'infinité des valeurs possibles pour x, on n'en a utilisé que deux ; mais cela a suffi pour établir ce que l'on voulait !

- On suppose $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Montrons que si l'on a $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0$, alors les réels a et b vérifient $a\,b < 0$.

  Par hypothèse, on peut trouver un réel x tel que $a\,x^2 + b = 0$. Prenons un tel x.

  * Comme $b \neq 0$ on a $x \neq 0$ et donc $x^2 > 0$.
  * On a alors $a\,b = a\,(-a\,x^2) = -a^2\,x^2$.

  On en déduit $a\,b < 0$, ce qui termine la démonstration.

  Remarque
  Le nombre réel x fourni par l'hypothèse « $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0$ » étant, *a priori*, quelconque, nous avons dû justifier $x \neq 0$ pour pouvoir utiliser la relation $x^2 > 0$.

p.14 **Exercice 4** Soit a et b deux entiers naturels. On suppose :

$$(\exists x \in \mathbb{N} \quad a = b\,x) \quad \text{et} \quad (\exists x \in \mathbb{N} \quad b = a\,x). \qquad (*)$$

Montrer que $a = b$.

Remarque L'hypothèse $(*)$ ci-dessus nous dit qu'il existe un réel x tel que $a = b\,x$ et qu'il existe un réel x tel que $b = a\,x$. Rien ne dit qu'il s'agit du même réel. La variable x figurant dans $(*)$ est muette, et $(*)$ aurait pu aussi s'écrire :

$$(\exists x_1 \in \mathbb{N} \quad a = b\,x_1) \quad \text{et} \quad (\exists x_2 \in \mathbb{N} \quad b = a\,x_2).$$

On ne peut donc pas commencer la résolution de l'exercice précédent en disant : « Prenons un réel x tel que $a = b\,x$ et $b = a\,x$ ».

2 Négation et quantificateurs

Exemples

1. L'assertion « $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 1 = 0$ » peut se traduire en français par la phrase : « pour tout réel x, on a $x^2 - 1 = 0$ ». Elle est évidemment fausse.

   Sa négation, « on peut trouver un réel x tel que $x^2 - 1 \neq 0$ », qui est donc vraie, s'écrit mathématiquement « $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 1 \neq 0$ » .
2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   - Pour écrire que f est la fonction nulle, c'est-à-dire que toutes les valeurs qu'elle prend sont nulles, on écrit « $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0$ ».
   - La négation de cette affirmation est « la fonction f prend des valeurs non nulles », ce qui donne l'assertion « $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) \neq 0$ ».
   - Attention de ne pas confondre cette assertion avec « $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \neq 0$ »
     * qui exprime que f ne s'annule pas,
     * dont la négation (f s'annule) est « $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0$ ».

Conformément à l'usage courant et aux exemples précédents, on utilise les règles suivantes pour nier une assertion commençant par un quantificateur.

Règles de négation des quantificateurs

Soit E un ensemble et $A(x)$ un prédicat de la variable x définie sur E.

- La négation de « $\forall x \in E \; A(x)$ » est « $\exists x \in E \; \text{NON}\, A(x)$ ».
- La négation de « $\exists x \in E \; A(x)$ » est « $\forall x \in E \; \text{NON}\, A(x)$ ».

Remarque Il est indispensable de savoir utiliser ces règles automatiquement et sans hésiter, pour nier une assertion des types précédents.

p.14 **Exercice 5** Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Comment, à l'aide de $f(x)$, écrire que f est positive ?
2. Écrire la négation de cette assertion.
3. Que pensez-vous de « $\forall x \in \mathbb{R} \quad \big(f(x) \geqslant 0 \text{ ou } f(x) \leqslant 0\big)$ » ? (i)
4. Que pensez-vous de « $(\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geqslant 0)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant 0)$ » ? (ii)

3 Succession de quantificateurs

Dans ce qui précède nous n'avons utilisé que des prédicats à une variable, mais en général les choses sont un peu plus compliquées. Traitons un exemple.

Exemple Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- Soit a un réel donné.
  - Pour exprimer « f présente un minimum en a », on écrit :
  $$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geqslant f(a).$$
  - Si f ne présente pas de minimum en a, on le traduit avec la négation de l'assertion précédente, à savoir « $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) < f(a)$ ».
- Si l'on veut exprimer « f présente un minimum », c'est-à-dire « il existe (au moins) une valeur de a telle que $f(a)$ soit minimum », on écrit donc :
$$\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geqslant f(a).$$
- Pour exprimer « f ne présente aucun minimum », on peut dire en français « il n'existe aucun point où f présente un minimum » ou encore « en a, réel quelconque, f ne peut pas présenter de minimum », ce qui se traduit par :
$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) < f(a).$$

En fait, l'exemple précédent est construit à partir de « $f(x) \geqslant f(a)$ », qui est un prédicat des deux variables x et a puisque f est fixée.

- L'écriture « $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geqslant f(a)$ », où l'on a **quantifié** x, (*i.e.* on a fait précéder x d'un quantificateur), nous donne un prédicat de la seule variable a, exprimant que « f présente un minimum en a ».
- L'écriture « $\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geqslant f(a)$ » utilise une succession de quantificateurs, ce qui a rendu muettes les deux variables x et a ; effectivement, cela exprime seulement « f présente un minimum », qui ne dépend ni de a, ni de x.

Règle

Si, dans un prédicat à plusieurs variables, on en quantifie une, alors cette variable devient muette, et ce qui reste ne dépend plus de cette variable.

Ce que l'on a vu dans l'exemple précédent se généralise aussi à la négation d'une assertion commençant par une suite de quantificateurs, en appliquant successivement à chaque quantificateur (de gauche à droite) les règles de négation des assertions commençant par un seul quantificateur.

Règles générales de négation des quantificateurs

Pour nier une assertion commençant par une suite de quantificateurs :

- on remplace tout « $\forall x \in E$ » par « $\exists x \in E$ » et l'on nie ce qui suit ;
- on remplace tout « $\exists x \in E$ » par « $\forall x \in E$ » et l'on nie ce qui suit.

Point méthode

Il est indispensable de savoir utiliser ces règles automatiquement et sans hésiter, pour nier une assertion des types précédents.

Exemple L'assertion « tout entier naturel est le carré d'un entier naturel » s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad n = p^2.$$

- Sa négation est donc : $\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad n \neq p^2$.
- Pour démontrer que l'affirmation initiale est fausse, on peut par exemple dire que 2 n'est le carré d'aucun entier, ce qui est facile à justifier.
- Que vient-on de faire dans le point précédent ? S'agit-il d'une démonstration ou d'un contre-exemple ? En fait c'est une question de point de vue et d'intention initiale, plus que de raisonnement.
  * Si, au départ, on a l'idée de prouver que l'assertion donnée est vraie, alors l'entier exhibé est un contre-exemple prouvant que cette assertion est fausse.
  * En revanche, si au départ on a l'idée de prouver que l'assertion donnée est fausse, alors l'entier exhibé prouve que sa négation est vraie.

p.15 **Exercice 6** Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Pour chacune des assertions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, et le justifier.

(*i*) $\forall x \in E \quad \exists y \in E \quad x \leqslant y$

(*ii*) $\exists y \in E \quad \forall x \in E \quad x \leqslant y$

(*iii*) $\forall x \in E \quad \exists y \in E \quad x < y$

(*iv*) $\forall y \in E \quad \forall x \in E \quad x \leqslant y$

p.15 **Exercice 7** Reprendre l'exercice précédent mais avec $E = \mathbb{R}$.

p.15 **Exercice 8** Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Écrire une assertion exprimant que f est majorée par un réel M donné.
2. Écrire une assertion exprimant que f est majorée.
3. Écrire une assertion exprimant que f n'est pas majorée.

Autre exemple d'utilisation d'un prédicat à deux variables

Pour toute valeur du réel m, alors appelé paramètre, considérons l'équation, de la variable réelle x, notée (E_m) : $x^2 - m = 0$.

Cas particuliers. Il est alors évident que :

- (E_1) possède une solution, et donc « $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 1 = 0$ » est vrai,
- (E_{-1}) n'a pas de solution, et donc « $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 + 1 = 0$ » est faux.

Plus généralement, pour tout m réel donné on peut essayer de déterminer le nombre de solutions de (E_m), voire leurs valeurs : cela s'appelle résoudre et discuter l'équation (E_m).

- Ainsi « $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 - m = 0$ » est un prédicat, dépendant de la seule variable m, qui signifie que l'équation (E_m) possède au moins une solution.
- Il est ici assez facile de justifier que :
  - si $m > 0$ l'équation (E_m) possède deux solutions $\pm\sqrt{m}$,
  - si $m = 0$ l'équation (E_m) possède une seule solution 0,
  - si $m < 0$ l'équation (E_m) ne possède aucune solution.
- Par suite l'assertion « $\forall m \in \mathbb{R}_+ \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 - m = 0$ » est vraie.

  En revanche cette assertion, seule, donne comme unique information :

  « Pour tout $m \geqslant 0$ l'équation (E_m) possède (au moins) une solution ».

  Elle ne donne ni le nombre exact de solutions de l'équation E_m, ni évidemment leur expression.

p.15 **Exercice 9** Dans cet exercice, x et y désignent des variables réelles.

- Traduire en français le prédicat « $\exists x \in \mathbb{R} \quad x + y^2 = 0$ » et dire pour quelles valeurs de sa variable il est vrai.
- Résumer le résultat obtenu sous forme d'une seule assertion quantifiée.

4 De la bonne utilisation des symboles

Comme on vient de voir, l'usage des symboles mathématiques, et en particulier des quantificateurs, obéit à des règles strictes.

- Ce sont des outils d'écriture très utiles lorsqu'on veut énoncer de manière précise et concise une propriété mathématique, et leur utilisation est même quasiment *indispensable pour obtenir automatiquement une négation correcte de la plupart des assertions non évidentes.*
- En revanche, il ne faut pas mélanger dans une même phrase les quantificateurs et le langage français : les symboles mathématiques ne sont pas des sténogrammes et ne doivent pas être utilisés comme abréviations. Des phrases telles que « la fonction $\in$ l'ensemble des fonctions paires » ou « $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x)$ existe » sont à proscrire et seront évidemment très mal accueillies par un correcteur !
- Toutefois il est toléré d'utiliser à l'intérieur d'une phrase de rédaction des incises telles que « $a \in E$ » voire « $E \subset F$ » et plus généralement toute assertion mathématique complète comme vous pouvez en voir dans ce livre.

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Exercice 1

1. Le triangle $\mathcal{T}$ est équilatéral lorsque $AB = BC = CA$, mais une telle écriture, que l'on utilise couramment, n'est pas syntaxiquement correcte car l'égalité est binaire et ne peut donc relier que deux éléments.
   Pour avoir une assertion syntaxiquement correcte on peut écrire :
   $$(AB = AC) \quad \text{et} \quad (BA = BC).$$
2. Pour exprimer que $\mathcal{T}$ n'est pas équilatéral, on nie la relation précédente, soit :
   $$(AB \neq AC) \quad \text{ou} \quad (BA \neq BC).$$
3. Le triangle $\mathcal{T}$ est isocèle lorsqu'il a deux côtés égaux, ce qui s'écrit encore :
   $$(AB = AC) \quad \text{ou} \quad (BA = BC) \quad \text{ou} \quad (CA = CB).$$
   Pour exprimer que $\mathcal{T}$ n'est pas isocèle, on nie la relation précédente, ce qui donne :
   $$(AB \neq AC) \quad \text{et} \quad (BA \neq BC) \quad \text{et} \quad (CA \neq CB).$$

Exercice 2 Comme on sait que l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a aucune solution sur $\mathbb{R}$:
$$\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 + 1 = 0 \text{ est une assertion fausse.}$$

Exercice 3 Comme l'équation $x^2 + 1 = 0$ possède (au moins) une solution sur $\mathbb{C}$, le nombre complexe i par exemple, on en déduit que :
$$\exists x \in \mathbb{C} \quad x^2 + 1 = 0 \text{ est une assertion vraie.}$$

Dire que cette assertion est vraie signifie que l'équation $x^2+1 = 0$ possède (au moins) une solution sur $\mathbb{C}$ mais ne donne aucune autre information. Si l'on veut utiliser une solution de cette équation, il faudra l'introduire grâce à une phrase

- soit du type : « Soit x_0 une solution complexe de l'équation $x^2 + 1 = 0$ » ,
- soit du type : « Prenons x_0 un complexe vérifiant $x_0^2 + 1 = 0$ » .

Exercice 4

- L'assertion $\exists x \in \mathbb{N} \quad a = b\,x$ est vraie. Prenons donc un $x_1 \in \mathbb{N}$ tel que $a = b\,x_1$.
- On peut, de même, prendre un $x_2 \in \mathbb{N}$ tel que $b = a\,x_2$.

On en déduit immédiatement $a = a\,x_2\,x_1$.

- Si $a = 0$ alors la relation $b = a\,x_2$ donne $b = 0$, et donc $a = b$.
- Sinon, on peut alors simplifier $a = a\,x_2\,x_1$ par a, ce qui donne $1 = x_2\,x_1$. Comme x_1 et x_2 sont entiers naturels, on en déduit $x_1 = x_2 = 1$, et donc $a = b$.

Par suite on a $a = b$.

Exercice 5

1. Pour exprimer que f est positive, on écrit « $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geqslant 0$ ».
2. La négation de ce qui précède est donc « $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) < 0$ ».
3. L'assertion (i) affirme que, pour tout nombre réel x, le nombre réel $f(x)$ est, soit positif, soit négatif, ce qui est vrai.
4. En revanche, l'assertion (ii) dit que l'on a, soit f positive, soit f négative. Sans autre information sur f, on ne peut pas affirmer que c'est vrai : il existe évidemment des fonctions pour lesquelles c'est faux, comme, par exemple, $f : x \mapsto x$ qui prend des valeurs strictement négatives et des valeurs strictement positives.

Exercice 6

- L'assertion (i) est vraie : en effet, pour chaque élément x choisi dans E, l'élément $y = x$ vérifie bien $x \leqslant y$.
- L'assertion (ii) est vraie : en effet, l'élément $y = 5$ est bien tel que, pour tout élément x de E, on ait $x \leqslant y$. Elle exprime que E est majoré.
- L'assertion (iii) est fausse : en effet, pour l'élément $x = 5$, on ne peut pas trouver d'élément y de E vérifiant $5 < y$.

  On pourrait aussi, en utilisant un raisonnement similaire à celui du point précédent, dire que sa négation « $\exists x \in E \quad \forall y \in E \quad x \geqslant y$ » est vraie.
- L'assertion (iv) est fausse : en effet, l'élément $y = 1$ de E ne vérifie évidemment pas $\forall x \in E \quad x \leqslant y$.

  On pourrait aussi dire que sa négation « $\exists y \in E \quad \exists x \in E \quad x > y$ » est vraie en justifiant à l'aide de $x = 2$ et $y = 1$.

Exercice 7

- L'assertion (i) reste vraie (même justification que pour l'exercice précédent).
- L'assertion (ii) est fausse car $\mathbb{R}$ n'est pas majoré.
- L'assertion (iii) est vraie car, si x est un nombre réel quelconque, alors le réel $y = x + 1$ vérifie $x < y$.
- L'assertion (iv) est fausse (même justification que pour l'exercice précédent).

Exercice 8

1. L'affirmation « f est majorée par M » se traduit par :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant M.$$
2. La fonction f est majorée si l'on peut trouver un réel M qui la majore, ce qui s'écrit :
$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant M.$$
3. On en déduit automatiquement la négation :
$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) > M,$$
qui traduit donc que f n'est pas majorée.

Exercice 9

- Dans « $\exists x \in \mathbb{R} \quad x + y^2 = 0$ », la lettre x est quantifiée, elle est donc muette. Comme y n'est pas quantifiée, il s'agit d'un prédicat $P(y)$ de la variable y.

  Pour un y (paramètre) réel donné, $P(y)$ signifie que l'équation $x + y^2 = 0$ (de la variable x) possède (au moins) une solution ; comme c'est une équation du premier degré, il est évident que $P(y)$ est vrai. Ainsi, $P(y)$ est vrai pour tout y réel.
- D'après ce qui précède on sait que l'assertion :
$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad x + y^2 = 0$$
est vraie.

Partie I

Techniques de calcul