

MATHS

MPSI - MP2I

Claude Deschamps | François Moulin | Yoann Gentric
Maxime Bourrigan | Emmanuel Delsinne | François Lussier
Chloé Mullaert | Serge Nicolas | Jean Nougayrède
Claire Tête | Michel Volcker

MATHS

MPSI - MP2I

TOUT-EN-UN

6^e édition

DUNOD

l'intégrale

Couverture : création Hokus Pokus, adaptation Studio Dunod

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du

droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 2021

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-082103-7

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^e et 3^e a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Avant-propos	xiii
Mode d'emploi	xiv
Partie I : Notions de base	
Chapitre 0. Vocabulaire, notations	1
I Ensembles de nombres	2
II Comparaison des réels	2
III Le cas particulier des entiers	5
Chapitre 1. Logique et raisonnement	7
I Assertions et modes de raisonnement	8
II Quantificateurs	14
III Récurrence	21
Exercices	26
Chapitre 2. Ensembles, applications et relations	31
I Ensembles	32
II Applications	38
III Relations binaires	48
Démonstrations	52
Exercices	54

Partie II : Techniques de calcul

Chapitre 3. Fonctions numériques de la variable réelle	65
I Inégalités dans \mathbb{R}	66
II Fonctions réelles de la variable réelle	72
III Dérivation – Rappels du secondaire	80
IV Variations d’une fonction sur un intervalle	86
Démonstrations	93
Exercices	95
Chapitre 4. Calculs algébriques et trigonométrie	101
I Symboles \sum et \prod	102
II Coefficients binomiaux, formule du binôme	116
III Petits systèmes linéaires, méthode du pivot	119
IV Trigonométrie	124
Démonstrations	136
Exercices	141
Chapitre 5. Nombres complexes	157
I L’ensemble des nombres complexes	159
II Résolution d’équations dans \mathbf{C}	175
III Applications géométriques	181
Démonstrations	185
Exercices	189
Chapitre 6. Fonctions usuelles	209
I Fonctions logarithmes et exponentielles	210
II Fonctions puissances	213
III Fonctions circulaires	217
IV Fonctions hyperboliques	225
V Fonctions à valeurs complexes	228
Démonstrations	232
Exercices	237
Chapitre 7. Primitives et calculs d’intégrales	249
I Primitives	250
II Recherche de primitives et calcul d’intégrales	259
Démonstrations	263
Exercices	264
Chapitre 8. Équations différentielles linéaires	275
I Équations différentielles linéaires du premier ordre	276
II Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants	285
Démonstrations	292
Exercices	295

Partie III : Analyse

Chapitre 9. Nombres réels, suites numériques	309
I L'ensemble des nombres réels	310
II Généralités sur les suites réelles	314
III Limite d'une suite réelle	317
IV Opérations sur les limites	323
V Résultats d'existence de limites	328
VI Traduction séquentielle de certaines propriétés	330
VII Suites complexes	331
VIII Étude de suites, suites récurrentes	335
Démonstrations	345
Exercices	357
Chapitre 10. Limites et continuité	371
I L'aspect ponctuel : limites, continuité	372
II L'aspect global : fonctions continues sur un intervalle	389
III Extension aux fonctions à valeurs complexes	397
Démonstrations	400
Exercices	408
Chapitre 11. Dérivation	421
I Dérivée	422
II Théorèmes de Rolle et des accroissements finis	428
III Fonctions de classe \mathcal{C}^k	437
IV Extension aux fonctions à valeurs complexes	444
Démonstrations	448
Exercices	454
Chapitre 12. Fonctions convexes	467
I Fonctions convexes	468
II Convexité et dérivabilité	473
Démonstrations	475
Exercices	480
Chapitre 13. Intégration	491
I Intégrale des fonctions en escalier	492
II Intégrale des fonctions continues par morceaux	497
III Intégration et dérivation	504
IV Formules de Taylor globales	505
Démonstrations	507
Exercices	516

Chapitre 14. Relations de comparaison	525
I Fonctions dominées, fonctions négligeables	527
II Fonctions équivalentes	531
III Opérations sur les relations de comparaison	536
IV Relations de comparaison sur les suites	541
Démonstrations	544
Exercices	546
Chapitre 15. Développements limités	553
I Généralités	554
II Opérations sur les développements limités	564
III Applications des développements limités	578
IV Développements asymptotiques	582
Démonstrations	588
Exercices	592
Chapitre 16. Séries numériques	609
I Séries numériques	610
II Séries à termes réels positifs	618
III Séries absolument convergentes	622
IV Application à l'étude de suites	626
Démonstrations	628
Exercices	630
Partie IV : Algèbre	
Chapitre 17. Arithmétique dans \mathbb{Z}	641
I Divisibilité dans \mathbb{Z}	642
II PGCD, PPCM	644
III Nombres premiers	652
IV Congruences	657
Démonstrations	659
Exercices	665
Chapitre 18. Structures algébriques usuelles	673
I Lois de composition interne	674
II Groupes	682
III Anneaux	686
Démonstrations	692
Exercices	695

Chapitre 19. Calcul matriciel	701
I Matrices	702
II Systèmes linéaires	711
III Anneau des matrices carrées	714
Démonstrations	726
Exercices	732
Chapitre 20. Polynômes	739
I Anneau des polynômes à une indéterminée	740
II Divisibilité et division euclidienne	747
III Fonctions polynomiales et racines	749
IV Dérivation	755
V Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$	759
VI Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$	760
Démonstrations	770
Exercices	782
Chapitre 21. Fractions rationnelles	795
I Corps des fractions rationnelles	796
II Décomposition en éléments simples	800
III Primitives d'une fonction rationnelle	810
Démonstrations	814
Exercices	816
Chapitre 22. Espaces vectoriels	831
I Espaces vectoriels	832
II Sous-espaces vectoriels	836
III Familles de vecteurs	844
IV Sous-espaces affines	853
Démonstrations	856
Exercices	860
Chapitre 23. Applications linéaires	871
I Définition et propriétés	872
II Endomorphismes	878
III Applications linéaires et familles de vecteurs	883
IV Caractérisation d'une application linéaire	884
V Formes linéaires et hyperplans	886
VI Équations linéaires	888
Démonstrations	890
Exercices	895

Chapitre 24. Dimension finie	907
I Dimension d'un espace vectoriel	908
II Relations entre les dimensions	914
III Applications linéaires et dimension finie	917
IV Formes linéaires et hyperplans en dimension finie	922
Démonstrations	925
Exercices	931
Chapitre 25. Représentation matricielle	943
I Matrices et applications linéaires	944
II Changements de bases, équivalence et similitude	955
Démonstrations	965
Exercices	970
Chapitre 26. Déterminants	981
I Groupe symétrique	982
II Formes p -linéaires alternées	986
III Déterminant d'une famille de vecteurs	991
IV Déterminant d'un endomorphisme	993
V Déterminant d'une matrice carrée	995
VI Calcul des déterminants	998
VII Comatrice	1002
Démonstrations	1003
Exercices	1012
Chapitre 27. Espaces euclidiens	1023
I Produit scalaire	1024
II Orthogonalité	1029
III Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	1034
Démonstrations	1039
Exercices	1043
Chapitre 28. Dénombrement	1051
I Ensembles finis	1052
II Dénombrement	1055
Démonstrations	1063
Exercices	1067

Partie V : Probabilités

Chapitre 29. Probabilités — Variables aléatoires	1081
I Univers	1082
II Espaces probabilisés	1087
III Loi d'une variable aléatoire	1090
IV Couples de variables aléatoires	1094
Démonstrations	1098
Exercices	1101
Chapitre 30. Conditionnement — Indépendance	1115
I Probabilités conditionnelles	1116
II Événements indépendants	1120
III Variables aléatoires indépendantes	1123
Démonstrations	1130
Exercices	1135
Chapitre 31. Espérance — Variance	1151
I Espérance d'une variable aléatoire	1152
II Variance	1156
III Covariance — Variance d'une somme	1158
IV Inégalités probabilistes	1163
Démonstrations	1164
Exercices	1169
Partie VI : Vers la deuxième année	
Chapitre 32. Familles sommables	1187
I Familles sommables de réels positifs	1188
II Familles sommables de nombres complexes	1194
III Application aux sommes doubles	1199
Démonstrations	1206
Exercices	1210
Chapitre 33. Fonctions de deux variables	1223
I Fonctions continues sur un ouvert de \mathbb{R}^2	1224
II Fonctions de classe \mathcal{C}^1	1227
III Dérivation des fonctions composées	1233
IV Extrema	1237
Démonstrations	1240
Exercices	1245
Index	1259

Avant-propos

Ce nouveau TOUT-EN-UN de mathématiques vient répondre aux attentes des nouveaux programmes entrés en vigueur en première année de classes préparatoires en septembre 2021. Il reprend l'ambition des précédentes éditions : faire tenir, en un seul volume, cours complet et exercices corrigés.

Lors de l'élaboration de cet ouvrage, l'équipe d'auteurs ne s'est pas contentée d'adapter l'ancien livre au nouveau programme, mais a repensé chaque chapitre en profondeur, dans un souci permanent de clarté et de concision.

Il nous tient à cœur de préciser quelques éléments clés de la structure du livre :

- Plutôt que de faire figurer systématiquement, à la suite de l'énoncé d'une proposition ou d'un théorème, sa démonstration entièrement rédigée, nous préférons parfois donner un principe de démonstration (la démonstration complète étant alors reléguée en fin de chapitre). L'objectif est double :
 - * rendre l'exposé du cours plus concis et plus facile à lire lorsque l'étudiant ne souhaite pas s'attarder sur les démonstrations ;
 - * l'étudiant, ayant à sa disposition un principe de démonstration, peut soit (en cas de première lecture) tenter de réfléchir par lui-même à la manière d'élaborer la preuve complète, soit (en cas de lecture ultérieure) se souvenir rapidement de cette preuve.
- Chaque chapitre se conclut par une série d'exercices permettant à l'étudiant de s'entraîner. Chacun de ces exercices est entièrement corrigé.
 - * Certains de ces exercices ont pour mission de faire appliquer de manière ciblée un théorème ou une méthode ; sous le numéro de l'exercice est alors indiqué le numéro de la page du cours associée. Inversement, ces exercices sont signalés dans la marge, à l'endroit concerné du cours.S'il n'est pas totalement indispensable de traiter ces exercices lors d'une première lecture du cours, leur lien étroit avec celui-ci les rend particulièrement intéressants pour assimiler les nouvelles notions et méthodes.
 - * L'étudiant trouvera également des exercices d'entraînement un peu plus ambitieux, demandant plus de réflexion. Certains, plus difficiles, sont étoilés.

Bien entendu nous sommes à l'écoute de toute remarque dont les étudiants, nos collègues, tout lecteur... pourraient nous faire part (à l'adresse électronique ci-dessous). Cela nous permettra, le cas échéant, de corriger certaines erreurs nous ayant échappé et surtout ce contact nous guidera pour une meilleure exploitation des choix pédagogiques que nous avons faits aujourd'hui dans cet ouvrage.

FRANÇOIS MOULIN ET YOANN GENTRIC
touten1maths@gmail.com

« Mode d'emploi » d'un chapitre

Une introduction présente le sujet traité.

Calculs algébriques et trigonométrie

4

Nous introduisons dans ce chapitre des outils de calculs algébriques (les symboles \sum et \prod , les coefficients binomiaux et la formule du binôme, les systèmes linéaires et la méthode du pivot), ainsi que des notions de trigonométrie.

Les encadrés correspondent soit à des théorèmes, propositions ou corollaires, qui partagent le même système de numérotation, soit à des définitions, qui ont leur propre numérotation.

Proposition 2

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a : $\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$ $\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ et $\overline{\bar{z}} = z$.

Corollaire 3

Un complexe z est réel si, et seulement si, $z = \bar{z}$. Un complexe z est imaginaire pur si, et seulement si, $z = -\bar{z}$.

Définition 3

Pour tout réel θ , on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe défini par $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

La démonstration de chaque résultat encadré, lorsqu'elle ne suit pas directement celui-ci, est indiquée par un renvoi.

Proposition 6

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ on a $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$. De plus, $|z| = 1$ équivaut à $\frac{1}{z} = \bar{z}$.

Démonstration page 529

Les points de méthode apparaissent sur fond grisé.

Point méthode Les règles de calcul précédentes permettent de calculer des conjugués souvent bien plus efficacement qu'en utilisant les parties réelle et imaginaire.

Les points auxquels il faut faire particulièrement attention sont signalés par un filet vertical sur la gauche.

Attention Quand on utilise la relation de Chasles, il faut bien prendre garde à ne pas compter deux fois le terme a_r !

Des renvois vers des exercices peuvent apparaître en marge au sein du cours.

Exo
27.3

Proposition 9

Si A et B sont des ensembles finis, alors $A \cup B$ est fini et l'on a :

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B).$$

Exo
27.4

Démonstration page 1102

Les exemples sont repérés par deux coins.

Ex. 1. La fonction $x \mapsto \frac{x^2}{2}$ est une primitive sur \mathbb{R} de la fonction $f : x \mapsto x$ donc les primitives sur \mathbb{R} de f sont les fonctions $x \mapsto \frac{x^2}{2} + C$ avec $C \in \mathbb{K}$.

Des exercices sont proposés en fin de chapitre, avec éventuellement un rappel du numéro de la page de cours où se trouve la notion dont l'exercice est une application.

S'entraîner et approfondir

12.1 Montrer que si f est convexe sur $[a, b]$ et si $f(a) = f(b)$ alors :

→1203

$$\forall x \in [a, b] \quad f(x) \leq f(a).$$

Certains exercices bénéficient d'indications, et les plus difficiles sont étoilés.

★ 11.28 Soit f l'application définie sur $[0, 1[$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Démontrer, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in [0, 1[$, que $f^{(n)}(x) \geq 0$.

Indication. On pourra chercher une relation entre f' et f , puis une seconde relation donnant $f^{(n+1)}$ en fonction des $f^{(k)}$ avec $k \leq n$.

Tous les exercices sont entièrement corrigés.

Solution des exercices

12.1 Soit $x \in [a, b]$. Il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que $x = (1 - \lambda)a + \lambda b$. Comme f est convexe, on en déduit que :

$$f(x) \leq (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b) = f(a).$$

Graphiquement, cette inégalité découle simplement du fait que la corde reliant les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ a pour équation $y = f(a)$.

Chapitre 0 : Vocabulaire, notations

I	Ensembles de nombres	2
II	Comparaison des réels	2
III	Le cas particulier des entiers	5

Vocabulaire, notations



I Ensembles de nombres

Parmi les nombres que nous utilisons, nous pouvons distinguer les catégories suivantes.

Les entiers naturels : 0, 1, 2, ...

L'ensemble des entiers naturels est noté \mathbb{N} .

Les entiers relatifs : il s'agit des entiers naturels et de leurs opposés.

L'ensemble des entiers relatifs est noté \mathbb{Z} .

Les décimaux : il s'agit des nombres de la forme $\frac{k}{10^n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

L'ensemble des nombres décimaux est noté \mathbb{D} .

Les rationnels : ce sont les quotients d'entiers $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

L'ensemble des nombres rationnels est noté \mathbb{Q} .

Les réels : nous supposons connu l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels, ainsi que ses opérations usuelles $+$, $-$, \times et $/$.

Nous étudierons les principales propriétés de \mathbb{R} aux chapitres 3 et 9.



Les complexes : nous étudierons au chapitre 5 l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes, c'est-à-dire l'ensemble des nombres qui s'écrivent $a + ib$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, où i est un nombre (non réel!) dont le carré vaut -1 .

Ces ensembles privés de 0 sont respectivement notés \mathbb{N}^* , \mathbb{Z}^* , \mathbb{D}^* , \mathbb{Q}^* , \mathbb{R}^* et \mathbb{C}^* .

II Comparaison des réels

Inégalités

L'ensemble \mathbb{R} est muni des relations de comparaison \leq et $<$. Si $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, on dispose de :

- la relation $x \leq y$, qui se lit « x est **inférieur** (ou égal) à y » ou « x est **plus petit** que y » ; on peut aussi écrire $y \geq x$ qui se lit « y est **supérieur** (ou égal) à x » ou encore « y est **plus grand** que x » ;
- la relation $x < y$, qui se lit « x est **strictement inférieur** à y » ou « x est **strictement plus petit** que y » ; on peut aussi écrire $y > x$ qui se lit « y est **strictement supérieur** à x » ou encore « y est **strictement plus grand** que x »

On a naturellement $x < y$ si, et seulement si, $x \leq y$ et $x \neq y$.

Il y a une terminologie propre à la comparaison avec 0 :

- un réel x est **positif** (respectivement **strictement positif**) si $x \geq 0$ (respectivement $x > 0$);
- un réel x est **négatif** (respectivement **strictement négatif**) si $x \leq 0$ (respectivement $x < 0$).

Notations

- \mathbb{R}_+ et \mathbb{Q}_+ désignent respectivement les ensembles des réels positifs et des rationnels positifs.
- \mathbb{R}_+^* et \mathbb{Q}_+^* désignent respectivement les ensembles des réels strictement positifs et des rationnels strictement positifs.
- \mathbb{R}_- , \mathbb{Q}_- et \mathbb{Z}_- désignent respectivement les ensembles des réels négatifs, des rationnels négatifs et des entiers négatifs.
- \mathbb{R}_-^* , \mathbb{Q}_-^* et \mathbb{Z}_-^* désignent respectivement les ensembles des réels strictement négatifs, des rationnels strictement négatifs et des entiers strictement négatifs.

Intervalles de \mathbb{R}

Soit a et b deux réels tels que $a \leq b$. On note¹ :

$$\begin{array}{ll}
 [a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} & [a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\} \\
 [a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} &]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} \\
]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} &]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\} \\
]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} &]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}
 \end{array}$$

Ces ensembles, ainsi que $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$, sont appelés **intervalles** de \mathbb{R} .

Remarques

- L'ensemble \mathbb{R} est aussi appelé la **droite réelle** ou **droite numérique**.
- L'ensemble vide est un intervalle puisque, par exemple, $\emptyset =]2, 2[$.
- Les quatre intervalles de la colonne de droite sont appelés **demi-droites**.
- Dans chacun des cas précédents, le réel a (respectivement b) est appelé **extrémité inférieure** (respectivement **extrémité supérieure**) de l'intervalle.

Si I est la demi-droite $[a, +\infty[$ ou la demi-droite $]a, +\infty[$, alors $+\infty$ est l'extrémité supérieure de I .

De même, $-\infty$ est l'extrémité inférieure des demi-droites $]-\infty, b]$ et $]-\infty, b[$.

Si $I = \mathbb{R}$, alors ses extrémités sont $-\infty$ et $+\infty$.

- Si $a \leq b$, l'intervalle $[a, b]$ est appelé **segment** $[a, b]$.

1. Une double inégalité du type $a \leq x \leq b$ signifie $a \leq x$ et $x \leq b$.

Chapitre 0. Vocabulaire, notations

- Par définition, les **intervalles ouverts** de \mathbb{R} sont les intervalles de la forme :

$$]a, +\infty[, \quad]-\infty, a[\quad \text{ou} \quad]a, b[\quad \text{avec} \quad a < b,$$

ainsi que \mathbb{R} et l'ensemble vide.

- Les **intervalles fermés** sont les intervalles de la forme $[a, +\infty[$ et $]-\infty, a]$ avec $a \in \mathbb{R}$, les segments, ainsi que \mathbb{R} et l'ensemble vide.

On remarque que \mathbb{R} et \emptyset sont à la fois ouverts et fermés et que ce sont les seuls intervalles qui vérifient cette propriété.

- Les intervalles de la forme $[a, b[$ ou $]a, b]$, avec $a < b$ sont dits **semi-ouverts** ou **semi-fermés**.
- L'**intérieur** d'un intervalle I est l'intervalle ouvert qui a les mêmes extrémités que I . Ainsi, pour $a \leq b$, l'intérieur des intervalles $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ et $]a, b[$ est l'intervalle ouvert $]a, b[$.

Un *point intérieur* d'un intervalle I est donc un point de l'intérieur de I .

Dans la suite de ce livre, on utilisera souvent l'expression : « soit I un intervalle d'intérieur non vide ». Cela signifie que les extrémités de I sont distinctes, et permet de dire que I contient deux points distincts ou encore que I contient une infinité d'éléments. Dans ce cas, on dit aussi qu'il s'agit d'un intervalle « **non trivial** ».

Partie entière

Définition 1

La **partie entière** d'un réel x est le plus grand entier relatif n tel que $n \leq x$. On le note $\lfloor x \rfloor$.

L'existence et l'unicité d'un tel entier sera prouvée à la page 313.

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \quad \text{ou encore} \quad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x.$$

Remarque On peut parfois rencontrer la notation $\lceil x \rceil$ qui désigne le plus petit entier relatif n tel que $x \leq n$, appelé aussi **partie entière supérieure**.

- Pour $x \in \mathbb{Z}$, on a naturellement $\lceil x \rceil = x = \lfloor x \rfloor$.
- Sinon, on a $\lfloor x \rfloor < x < \lceil x \rceil$ et $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$.

Droite numérique achevée

Définition 2

On appelle **droite numérique achevée** l'ensemble $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

On étend la relation \leq à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant $-\infty \leq x \leq +\infty$ pour tout $x \in \overline{\mathbb{R}}$.

Remarque L'ensemble $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ se note aussi $[0, +\infty]$.

III Le cas particulier des entiers

Propriétés

Nous admettons les propriétés fondamentales suivantes des entiers.

- Si a et b sont deux entiers (relatifs), on a $a < b$ si, et seulement si, $a \leq b - 1$.
- Toute partie non vide A de \mathbb{N} possède un plus petit élément a , c'est-à-dire un élément a de A tel que $a \leq n$ pour tout n dans A .

Une partie A de \mathbb{Z} est dite **minorée** s'il existe a dans \mathbb{Z} tel que $a \leq n$ pour tout n de A . On définit de même les parties **majorées**. La deuxième propriété ci-dessus se généralise :

- toute partie non vide et minorée de \mathbb{Z} admet un plus petit élément ;
- toute partie non vide et majorée de \mathbb{Z} admet un plus grand élément.

Intervalles d'entiers

Soit a et b deux entiers relatifs vérifiant $a \leq b$. On note :

$$\llbracket a, b \rrbracket = \{n \in \mathbb{Z} : a \leq n \leq b\},$$

$$\llbracket a, +\infty \llbracket = \{n \in \mathbb{Z} : a \leq n\},$$

$$\rrbracket -\infty, a \rrbracket = \{n \in \mathbb{Z} : n \leq a\}.$$

Remarques

- Pour a et b entiers relatifs, on a :

$$\llbracket a, b \rrbracket = [a, b] \cap \mathbb{Z}, \quad \llbracket a, +\infty \llbracket = [a, +\infty[\cap \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \rrbracket -\infty, b \rrbracket =]-\infty, b] \cap \mathbb{Z}.$$

- On n'a pas donné de notation pour des intervalles ouverts d'entiers, car, par exemple, pour a et b entiers, on a :

$$\{n \in \mathbb{Z} : a < n \leq b\} = \llbracket a + 1, b \rrbracket.$$

- Lorsque $a > b$, l'intervalle $\llbracket a, b \rrbracket$ est vide. Ainsi, par exemple, pour $n \in \mathbb{N}$, l'intervalle $\llbracket 1, n \rrbracket$ est vide si, et seulement si, $n = 0$.

Chapitre 1 : Logique et raisonnement

I	Assertions et modes de raisonnement	8
1	Assertions	8
2	Connecteurs	9
3	Modes de raisonnement	12
II	Quantificateurs	14
1	Quantificateurs universel et existentiel	14
2	Propriétés élémentaires sur les quantificateurs	18
III	Récurrance	21
1	Raisonnement par récurrence	21
2	Récurrance double	23
3	Récurrance forte	24
4	Récurrances finies	25
	Exercices	26

Logique et raisonnement



I Assertions et modes de raisonnement

1 Assertions

La notion d'**assertion** est une notion première. Intuitivement, une assertion est une phrase mathématique qui est soit vraie soit fausse.

Ex. 1. « 2 est un entier impair » est une assertion (fausse).

Ex. 2. « Tout entier naturel pair supérieur ou égal à 4 est la somme de deux nombres premiers » est une assertion dont on ne sait pas actuellement si elle est vraie ou fausse¹.

Une assertion peut dépendre de paramètres.

Ex. 3. L'assertion « n est premier » est une assertion dont la véracité dépend de n .

Remarque Pour souligner la dépendance en n de cette assertion, on peut la noter $P(n)$.

Ex. 4. L'assertion « $f(x) = 3$ » dépend de f et de x .

Ex. 5. L'assertion « $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ » est vraie pour tout réel x .

Ex. 6. L'assertion « $\sqrt{x^2} = x$ » est vraie pour tout réel x positif et fausse pour tout réel x strictement négatif.

Convention Soit P une assertion. On écrit la plupart du temps :

« supposons P » au lieu de « supposons que P soit vraie »

« montrons P » au lieu de « montrons que P est vraie ».

1. On pense néanmoins qu'elle est vraie (conjecture de Goldbach).

2 Connecteurs

Définition 1

Soit P et Q deux assertions. On appelle :

- **négation** de P , et l'on note $\text{NON } P$, toute assertion qui est vraie lorsque P est fausse et fausse sinon ;
- **conjonction** de P et Q , et l'on note $P \text{ ET } Q$, toute assertion qui est vraie lorsque les assertions P, Q sont toutes les deux vraies, et fausse sinon ;
- **disjonction** de P et Q , et l'on note $P \text{ OU } Q$, toute assertion qui est vraie lorsqu'au moins l'une des deux assertions P, Q est vraie, et fausse sinon ;
- **équivalence** entre P et Q , et l'on note $P \Leftrightarrow Q$, toute assertion qui est vraie lorsque les assertions P, Q sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses, et fausse sinon ;
- **implication** de Q par P , et l'on note $P \Rightarrow Q$, toute assertion qui est fausse lorsque P est vraie et Q est fausse, et vraie dans tous les autres cas.

Remarque On peut visualiser ces définitions à l'aide de tables de vérité :

P	Q	$\text{NON } P$	$P \text{ ET } Q$	$P \text{ OU } Q$	$P \Leftrightarrow Q$	$P \Rightarrow Q$
fausse	fausse	vraie	fausse	fausse	vraie	vraie
fausse	vraie	vraie	fausse	vraie	fausse	vraie
vraie	fausse	fausse	fausse	vraie	fausse	fausse
vraie	vraie	fausse	vraie	vraie	vraie	vraie

Notation Dans le texte de ce chapitre nous noterons les trois premiers connecteurs « NON », « ET », « OU », pour les distinguer de ceux du langage courant, mais dans les chapitres suivants nous utiliserons les graphismes classiques « non », « et », « ou ».

Attention Le connecteur OU n'est pas exclusif comme il l'est parfois dans le langage courant (dans la locution « fromage ou dessert » par exemple).

Remarques

- Lorsque l'on a $P \Leftrightarrow Q$, on dit que les assertions P et Q sont **équivalentes**.
- Lorsque l'on a $P \Rightarrow Q$, on dit que P **implique** Q .
- Par abus on dit « la » négation de P ; bien qu'une assertion puisse avoir plusieurs négations, toutes ces négations sont équivalentes. Par exemple, si x est un réel, alors la négation de « $x = 0$ » peut s'écrire « $x \neq 0$ », mais aussi « $x^2 > 0$ ».

Ex. 7. Soit x un réel.

- La négation de « $x \geq -1$ » est « $x < -1$ ».
- La négation de « $x \leq 1$ » est « $x > 1$ ».
- L'assertion « $x^2 - 1 = 0$ » est équivalente à « $(x = 1) \text{ OU } (x = -1)$ ».
- L'assertion « $-1 \leq x \leq 1$ » est équivalente à « $(-1 \leq x) \text{ ET } (x \leq 1)$ ».

Chapitre 1. Logique et raisonnement

Propriétés élémentaires sur les conjonctions et les disjonctions

Soit P , Q et R trois assertions. On a les propriétés intuitives suivantes qui peuvent se vérifier facilement à l'aide d'une table de vérité :

- l'assertion P ET (NON P) est fausse ;
- l'assertion P OU (NON P) est vraie (*principe du tiers exclu*) ;
- si deux assertions sont équivalentes, alors leurs négations le sont aussi ;
- les assertions NON (NON P) et P sont équivalentes ;
- les assertions NON (P ET Q) et (NON P) OU (NON Q) sont équivalentes ;
- les assertions NON (P OU Q) et (NON P) ET (NON Q) sont équivalentes ;
- les assertions (P ET Q) ET R et P ET (Q ET R) sont équivalentes ;
- les assertions (P OU Q) OU R et P OU (Q OU R) sont équivalentes.

Les deux dernières propriétés nous permettent de noter P ET Q ET R sans parenthèses et de même pour P OU Q OU R .

Ex. 8. Soit x , y et z trois réels.

- Comme l'assertion $x = y = z$ est équivalente à $(x = y)$ ET $(y = z)$, sa négation est $(x \neq y)$ OU $(y \neq z)$.
- De même, comme l'assertion $x < y \leq z$ est équivalente à $(x < y)$ ET $(y \leq z)$, sa négation est $(y \leq x)$ OU $(z < y)$.

Proposition 1

Soit P , Q et R trois assertions.

- Les assertions P ET (Q OU R) et (P ET Q) OU (P ET R) sont équivalentes.
- Les assertions P OU (Q ET R) et (P OU Q) ET (P OU R) sont équivalentes.

Exo
1.1

Démonstration. Il suffit de faire une table de vérité à 8 lignes. □

Propriétés élémentaires sur l'implication et l'équivalence

Soit P et Q deux assertions :

- l'assertion $P \Rightarrow Q$ est équivalente à (NON P) OU Q ;
- la négation de $P \Rightarrow Q$ est donc P ET (NON Q) ;
- les assertions $P \Rightarrow Q$ et (NON Q) \Rightarrow (NON P) sont équivalentes ;
- les assertions $P \Leftrightarrow Q$ et $Q \Leftrightarrow P$ sont équivalentes ;
- les assertions $P \Leftrightarrow Q$ et (NON P) \Leftrightarrow (NON Q) sont équivalentes ;
- les assertions $P \Leftrightarrow Q$ et ($P \Rightarrow Q$) ET ($Q \Rightarrow P$) sont équivalentes.

Remarque Par définition, l'assertion $P \Rightarrow Q$ est fausse lorsque P est vraie et Q fausse, et uniquement dans ce cas. Donc :

- si P est fausse alors $P \Rightarrow Q$ est vraie ;
- si $P \Rightarrow Q$ est vraie et si P est vraie, alors Q est vraie, ce qui donne le sens intuitif habituel de l'implication : si P est vraie, alors Q est vraie.

Ainsi, pour démontrer $P \Rightarrow Q$:

- si P est fausse, alors il n'y a rien à faire ;
- si P est vraie, alors on doit prouver que Q est vraie.

Point méthode (pour démontrer $P \Rightarrow Q$)

Pour montrer que l'assertion $P \Rightarrow Q$ est vraie, on peut commencer par supposer P et essayer de prouver Q , ce qui se rédige : « *Supposons P et montrons Q* ».

Ex. 9. Soit P , Q et R trois assertions telles que $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow R$. Montrons que $P \Rightarrow R$. Pour cela, supposons P et montrons R . Comme $P \Rightarrow Q$ et que P est vraie, on en déduit que Q est vraie. Puis, comme $Q \Rightarrow R$, on en déduit que R est vraie.

Remarques

- L'assertion $P \Rightarrow Q$ peut donc être vraie même lorsque Q est fausse. Cela peut paraître bizarre à première vue, surtout si l'on a la mauvaise habitude d'utiliser ce symbole « \Rightarrow » comme une abréviation pour un « donc ».
- Écrire « P donc Q » ou « P implique Q » ne signifie pas la même chose. Dans la première version l'assertion P est vraie alors que dans la seconde, elle ne l'est pas forcément.

Ex. 10. L'assertion « $(1 = 2) \Rightarrow (6 = 8)$ » est vraie puisque « $1 = 2$ » est fausse.

Attention

- Ne jamais utiliser le symbole \Rightarrow comme abréviation d'un « donc ».
- Écrire « On a $P \Rightarrow Q$ » ne prétend pas que P est vraie, mais que si P est vraie, alors Q aussi.

Autre formulations Soit P et Q deux assertions.

- Au lieu de dire « on a $P \Rightarrow Q$ », on peut dire indifféremment :
 - * pour que Q soit vraie, il suffit que P le soit ;
 - * pour que P soit vraie, il faut que Q le soit ;
 - * P est une condition suffisante pour que Q soit vraie ;
 - * Q est une condition nécessaire pour que P soit vraie.
- Au lieu de dire « on a $P \Leftrightarrow Q$ », on peut dire indifféremment :
 - * P est vraie si et seulement si Q l'est ;
 - * pour que Q soit vraie, il faut et il suffit que P le soit ;
 - * P est une condition nécessaire et suffisante pour que Q soit vraie.

3 Modes de raisonnement

Raisonnement par contraposée

Définition 2

Soit P et Q deux assertions. L'assertion $\text{NON } Q \Rightarrow \text{NON } P$ est appelée la **contraposée** de l'implication $P \Rightarrow Q$.

On a vu dans les propriétés élémentaires de la page 10 qu'une implication et sa contraposée sont équivalentes.

Pour montrer qu'une implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, il suffit donc de montrer sa contraposée. On dit alors que l'on raisonne **par contraposée**.

Ex. 11. Soit n un entier. Montrons que si n^2 est pair, alors n l'est aussi.

Pour cela, raisonnons par contraposée : montrons que $(n \text{ impair}) \Rightarrow (n^2 \text{ impair})$.

Supposons n impair et montrons que n^2 l'est aussi. Puisque n est impair, il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$. On a alors :

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \times (2k^2 + 2k) + 1$$

donc n^2 est impair. D'où le résultat.

Raisonnement par double implication

Pour montrer que deux assertions P et Q sont équivalentes, on peut montrer $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$. On dit alors que l'on raisonne par **double implication**.

Ex. 12. Soit n un entier. Montrons que n^2 est pair si, et seulement si, n l'est.

- On a déjà prouvé l'implication $(n^2 \text{ pair}) \Rightarrow (n \text{ pair})$. Montrons sa réciproque.
- Si n est pair, alors il existe un entier k tel que $n = 2k$. On a alors $n^2 = 4k^2 = 2 \times (2k^2)$ qui est pair.

Ainsi, n^2 est pair si, et seulement si, n l'est aussi, autrement dit n et n^2 ont la même parité.

Terminologie $Q \Rightarrow P$ est appelée l'**implication réciproque** de $P \Rightarrow Q$.

Raisonnement par disjonction de cas

Pour démontrer un résultat, il peut être intéressant d'étudier séparément les différents cas de figure.

Ex. 13. Redémontrons que n et n^2 ont la même parité en raisonnant par disjonction de cas selon la parité de n .

- Si n est pair, alors il existe un entier k tel que $n = 2k$. On a alors $n^2 = 4k^2 = 2 \times (2k^2)$ qui est pair.
- Si n est impair, alors il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$. On a alors $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$ qui est impair.

Cela conclut car, dans les deux cas, on a obtenu que n et n^2 ont la même parité.

Remarque Nous avons utilisé ici les mêmes arguments que dans l'exemple 12. Ce n'est que la façon de les présenter qui est différente.

Ex. 14. Soit P , Q et R trois assertions. Montrons que les assertions :

$$A = (P \text{ ET } (Q \text{ OU } R)) \quad \text{et} \quad B = (P \text{ ET } Q) \text{ OU } (P \text{ ET } R)$$

sont équivalentes, sans faire de table de vérité à 8 lignes.

Procédons par disjonction de cas sur la véracité de P :

- si P est vraie, alors A et B sont toutes les deux équivalentes à $(Q \text{ OU } R)$;
- sinon, A et B sont toutes les deux fausses.

Dans les deux cas, A et B sont équivalentes. ┌

Raisonnement par l'absurde

Pour prouver qu'une assertion P est vraie, on peut supposer qu'elle est fausse et en déduire une contradiction.

Ex. 15. Montrons que $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

Raisonnons par l'absurde en supposant que $\sqrt{2}$ est rationnel. Il existe alors deux entiers p et q , avec q non nul, tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

Quitte à simplifier la fraction, on peut supposer que p et q ne sont pas tous les deux pairs.

En élevant au carré l'égalité précédente, on obtient :

$$2q^2 = p^2.$$

Par suite, l'entier p^2 est pair et il en est donc de même de p . On peut ainsi trouver un entier k tel que $p = 2k$. En remplaçant dans l'égalité $2q^2 = p^2$, on obtient $2q^2 = 4k^2$ et donc :

$$q^2 = 2k^2$$

ce qui prouve que q^2 est pair. On en déduit que q est pair, ce qui contredit le fait que p et q ne sont pas tous les deux pairs.

L'hypothèse de départ est donc fausse, ce qui montre que $\sqrt{2}$ est irrationnel. ┌

Raisonnement par analyse-synthèse

Lorsque l'on cherche l'ensemble des éléments x de E vérifiant une propriété $P(x)$, on peut procéder par analyse-synthèse.

- Dans la phase d'analyse, on considère un élément x de E vérifiant $P(x)$ et on en déduit des propriétés sur x . Grâce à ces conditions nécessaires, on limite la liste des candidats.
- Dans la synthèse, on détermine, parmi les candidats obtenus dans l'analyse, lesquels vérifient $P(x)$.

Ex. 16. Déterminons les réels x tels que $1 + x \geq 0$ et $1 - x^2 = \sqrt{1+x}$.

Analyse. Supposons que x soit un réel vérifiant $1 + x \geq 0$ et $1 - x^2 = \sqrt{1+x}$.

Alors $(1 - x^2)^2 = 1 + x$, ce qui s'écrit aussi $(1+x)^2(1-x)^2 = 1+x$, ou encore :

$$(1+x) \left((1+x)(1-x)^2 - 1 \right) = 0 \quad \text{et enfin} \quad (1+x)x(x^2 - x - 1) = 0.$$

On en déduit que $x \in \left\{ -1, 0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right\}$.

Chapitre 1. Logique et raisonnement

Synthèse. • On vérifie facilement que -1 et 0 sont solutions.

- Si $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$, alors en remontant les calculs ci-dessus, on obtient $(1 - x^2)^2 = 1 + x$.
Donc, comme $1 + x \geq 0$ et $1 - x^2 \geq 0$, on a $1 - x^2 = \sqrt{1 + x}$, i.e. x est solution.
- Si $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, alors $1 - x^2 < 0$ donc x n'est pas solution.

Conclusion. Il y a 3 solutions : -1 et 0 et $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. └

II Quantificateurs

Les notions d'**ensemble** et d'**élément** sont ici considérées comme des notions premières; un ensemble correspond intuitivement à une « collection d'objets » qui sont les « éléments » de cet ensemble. Cette notion sera détaillée au chapitre suivant.

Si a est un élément et E un ensemble :

- l'assertion $a \in E$, qui se lit « a appartient à E » ou « E contient a », est vraie si a est un élément de E , et fausse dans le cas contraire;
- lorsque a n'est pas élément de E , on écrit $a \notin E$.

On admet qu'il existe un ensemble, appelé **ensemble vide** et noté \emptyset , qui ne contient aucun élément.

1 Quantificateurs universel et existentiel

Définition 3

Soit $P(x)$ une assertion dépendant d'une variable x appartenant à un ensemble E .

- On note « $\forall x \in E \ P(x)$ » l'assertion qui est vraie si, pour tout élément x de E , l'assertion $P(x)$ est vraie.
- On note « $\exists x \in E \ P(x)$ » l'assertion qui est vraie s'il existe un élément x appartenant à E tel que l'assertion $P(x)$ soit vraie.
- On note « $\exists! x \in E \ P(x)$ » l'assertion qui est vraie s'il existe un *unique* élément x appartenant à E tel que l'assertion $P(x)$ soit vraie.

Terminologie Le symbole « \forall » est appelé **quantificateur universel** et le symbole « \exists » est appelé **quantificateur existentiel**.

Remarques

- L'assertion « $\forall x \in E \ P(x)$ » se lit « pour tout x dans E , on a $P(x)$ ».
- L'assertion « $\exists x \in E \ P(x)$ » se lit « il existe x dans E tel que $P(x)$ soit vraie ».
- L'assertion « $\exists! x \in E \ P(x)$ » se lit « il existe un unique x dans E tel que $P(x)$ soit vraie » et est équivalente à :

$$\exists x \in E \left(P(x) \text{ ET } (\forall y \in E \ P(y) \Rightarrow y = x) \right).$$

Convention Si E est l'ensemble vide, alors l'assertion « $\forall x \in E \ P(x)$ » est vraie.