

Pascal LUSSIEZ
Professeur en Sciences et Techniques
Industrielles au lycée Édouard Branly
(Amiens)

Mécanique en 30 fiches

DUNOD

Tout le catalogue sur
www.dunod.com



Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du

droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Paris, 2007, 2012 pour la nouvelle présentation

ISBN 978-2-10-058032-3

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^e et 3^e a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

| | | |
|-----------------|---|----|
| Fiche 1 | Torseur | 5 |
| Fiche 2 | Modélisation des liaisons | 9 |
| Fiche 3 | Action mécanique à distance | 15 |
| Fiche 4 | Action mécanique d'un fluide sur un solide | 17 |
| Fiche 5 | Action mécanique d'un ressort sur un solide | 19 |
| Fiche 6 | Action mécanique : solide sur solide | 21 |
| Fiche 7 | Torseur et liaison | 25 |
| Fiche 8 | Statique | 31 |
| Fiche 9 | Statique graphique 2 et 3 forces | 37 |
| Fiche 10 | Statique graphique à 4 forces | 41 |
| Fiche 11 | Mouvements et trajectoires | 46 |
| Fiche 12 | Cinématique | 51 |
| Fiche 13 | Cinématique : Solide en translation | 57 |
| Fiche 14 | Cinématique : Solide en rotation | 63 |
| Fiche 15 | Mouvement plan | 69 |
| Fiche 16 | Composition des vitesses | 74 |

| | | |
|-----------------|------------------------------|-----|
| Fiche 17 | Dynamique | 79 |
| Fiche 18 | Moment d'inertie | 85 |
| Fiche 19 | Moment d'inertie équivalente | 91 |
| Fiche 20 | Puissance | 95 |
| Fiche 21 | Énergétique | 100 |
| Fiche 22 | Théorème énergie cinétique | 104 |
| Fiche 23 | Théorie des mécanismes | 109 |
| Fiche 24 | Torseur de cohésion | 115 |
| Fiche 25 | Traction | 122 |
| Fiche 26 | Cisaillement | 127 |
| Fiche 27 | Torsion | 131 |
| Fiche 28 | Flexion simple | 136 |
| Fiche 29 | Flambage | 142 |
| Fiche 30 | Sollicitations composées | 149 |
| Index | | 154 |

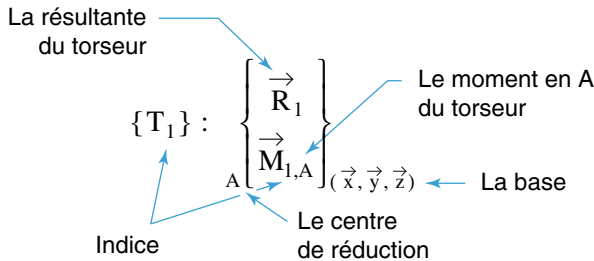
Torseur

Objectif

Réduire un torseur en un point.
Calculer une somme de torseurs dans une même base.

I Définition

On appelle torseur $\{T\}$ l'ensemble de deux champs de vecteurs: \vec{R} et \vec{M}_A
L'ensemble de ces deux vecteurs est appelé **éléments de réduction** du torseur $\{T\}$ au point A (centre de réduction).



II Torseurs spéciaux

- **Glisseur (ou torseur à résultante)**

Un torseur $\{T\}$ de résultante générale non nulle est un **glisseur**, s'il existe au moins un point A où le moment du torseur $\{T\}$ s'annule.

$$\{T\} : \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

- **Torseur couple (ou couple)**

Tout torseur non nul, dont la résultante est nulle est un **torseur couple**.

$$\{T\} : \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{M}_A \end{Bmatrix}$$

- **Torseur nul**

C'est le torseur tel que les éléments de réduction sont nuls.

$$\{T\} : \begin{Bmatrix} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_A = \vec{0} \end{Bmatrix}$$

III Notation

Il existe deux principales manières d'écrire les torseurs.

Forme complète

$$\{T\} : \begin{Bmatrix} \vec{R} = X_A \cdot \vec{x} + Y_A \cdot \vec{y} + Z_A \cdot \vec{z} \\ \vec{M}_A = L_A \cdot \vec{x} + M_A \cdot \vec{y} + N_A \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Forme compacte

$$\{T\} : \begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

IV Opérations sur les torseurs

- **Réduction d'un torseur**

$$\{T\} : \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \xrightarrow{?} \{T\} : \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_B \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Dans un torseur, la résultante est invariante, seul le moment varie en fonction du centre de réduction. Pour exprimer un torseur en autre point on utilise la relation de **transport de moment**, soit :

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{R}$$

Exemple n° 1

Réduire au point B(3,2,0), le torseur $\{T\}$: $\left\{ \begin{array}{c} -2 \ 2 \\ 4 \ 1 \\ 5 \ 1 \end{array} \right\}_{A(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$, avec A(2,1,0)

Solution

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{R} = \left[\begin{array}{c|c|c} 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 \wedge & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} -3 \\ 6 \\ -5 \end{array} \right] \Rightarrow \{T\} : \left\{ \begin{array}{c} -2 \ -3 \\ 4 \ 6 \\ 5 \ -5 \end{array} \right\}_{B(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Remarque : Le produit vectoriel est prioritaire sur l'addition.

• Somme de deux torseurs

Soit dans un même repère les deux torseurs suivants :

$$\{T_1\} : \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_{1,A} \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad \{T_2\} : \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_{2,A} \end{array} \right\}$$

La somme des torseurs est définie par :

$$\{T_1 + T_2\} : \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \\ \vec{M}_{1,A} + \vec{M}_{2,A} \end{array} \right\}$$

Les deux torseurs doivent être exprimés au **même centre de réduction et dans la même base**.

Exemple n° 2

Soit dans un repère $\mathcal{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, les torseurs suivants :

$$\{T_1\} : \left\{ \begin{array}{c} 2 \ 0 \\ 1 \ 0 \\ 5 \ 0 \end{array} \right\}_O, \quad \{T_2\} : \left\{ \begin{array}{c} 1 \ 0 \\ 0 \ 5 \\ 4 \ 2 \end{array} \right\}_A \quad \text{et} \quad \{T_3\} : \left\{ \begin{array}{c} 1 \ 4 \\ 4 \ 0 \\ 1 \ 4 \end{array} \right\}_B,$$

Calculer la somme des torseurs au point O.
Coordonnées des points : A(1,2,1) et B(3,0,1).

Solution

De la même façon que dans l'exemple précédent, on réduit les torseurs $\{T_2\}$ et $\{T_3\}$ au point O, et on additionne les torseurs.

$$\begin{aligned} \{T_1\} : \begin{Bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{Bmatrix}_{O(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} &+ \{T_2\} : \begin{Bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{Bmatrix}_{O(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} &+ \{T_3\} : \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \\ 1 & 16 \end{Bmatrix}_{O(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \\ &= \{T\} : \begin{Bmatrix} 4 & 8 \\ 5 & 0 \\ 10 & 16 \end{Bmatrix}_{O(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \end{aligned}$$

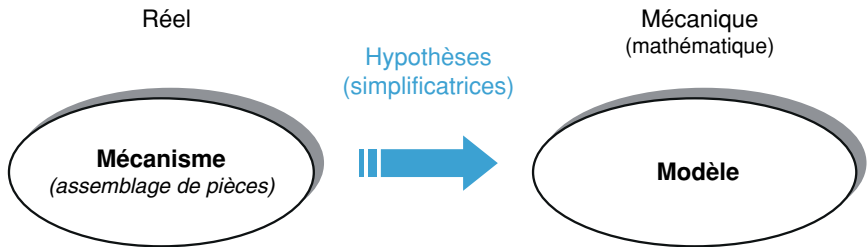
Modélisation des liaisons

Objectif

Identifier une liaison entre solide.

I Modélisation

Pour appliquer les lois de la mécanique, il est nécessaire d'utiliser un modèle, c'est-à-dire une image simplifiée de la réalité, souvent représentée sous forme de schéma.



II Hypothèses

Le modèle d'étude pour l'étude d'un mécanisme s'appuie sur deux groupes d'hypothèses relatives aux pièces et aux assemblages :

- **Pièces**

Les pièces sont des solides indéformables (ou rigides).
Les pièces sont de géométrie parfaite.

- **Assemblages**

Les assemblages sont des liaisons parfaites, c'est-à-dire :

- les surfaces de contacts sont géométriquement parfaites (cylindres, plans, sphères...);
- sans jeu;

- sans frottement ;
- bilatérales (le contact se fait dans les deux sens).

Ce type de modèle est celui généralement retenu dans le cadre d'études d'avant-projets de mécanismes.

III Caractéristiques d'une liaison

Une liaison entre deux solides est une relation de **contact** entre deux solides.

On caractérise une liaison par :

- sa géométrie de contact ;
- son repère local associé ;
- son centre géométrique.

- **Géométrie des contacts**

D'un point de vue théorique, il existe 3 géométries de contact : contact ponctuel, contact linéaire et le contact surfacique (dans la réalité, il n'existe que le contact surfacique (solides réels).

- **Repère local associé (R.L.A.)**

Le repère local associé à une liaison permet d'exprimer simplement les éléments cinématiques et statiques caractérisant de façon simple les degrés de liberté et de liaison.

Notion de degré de liberté (ou degrés de mobilités)

Le nombre de degré de liberté d'une liaison est le nombre des mouvements relatifs indépendants que la liaison autorise entre les deux pièces considérées.

Degré de liaison

C'est le nombre de déplacements élémentaires interdits. On notera que pour une liaison, la somme des degrés de libertés et des degrés de liaisons est égale à 6. Le degré de liaison correspond au nombre de composantes du torseur des actions mécaniques transmissibles.

- **Centre géométrique**

L'origine du repère idéal est le centre de la liaison.

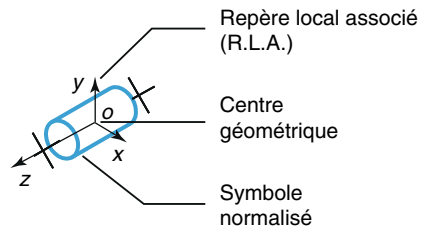
Exemple :

La liaison pivot d'axe (O, \vec{z})

Degré de liberté : 1

(une rotation d'axe \vec{z})

Degré de liaison : 5 (6 - 1)



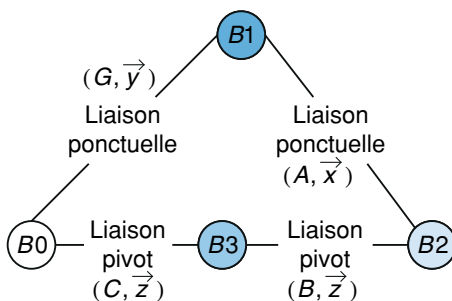
IV Classe d'équivalence

Un ensemble de pièces n'ayant aucun mouvement relatif entre elles, constitue une classe d'équivalence cinématique. Les pièces sont liées par une liaison complète.

V Graphe des liaisons (ou de structure)

Le graphe de structure est un outil descriptif qui permet de faire le bilan des solides et des liaisons entre les solides d'un mécanisme.

Dans le graphe des liaisons les solides ou ensemble de solides sont schématisés par des cercles et les liaisons par des arcs de courbe joignant ces cercles.



VI Règles de modélisation

Règle n° 1 : Lorsque l'on étudie la liaison pouvant exister entre 2 solides, on n'étudie que ces 2 solides, le reste du mécanisme étant supposé enlevé.

Règle n° 2 : S'il n'y a pas de surface de contact entre ces 2 solides, il n'y a pas de liaisons mécaniques entre ces 2 solides.

Règle n° 3 : On ne tient pas compte des pièces déformables (voir hypothèse sur le solide).

VII Le schéma cinématique

Le schéma cinématique d'un mécanisme décrit exclusivement des mouvements possibles entre les différents sous-ensembles qui le constituent.

VIII Le schéma d'architecture

Le schéma d'architecture d'un mécanisme définit toutes les liaisons élémentaires entre les différents sous-ensembles qui le constituent.

IX Symboles des liaisons normalisées

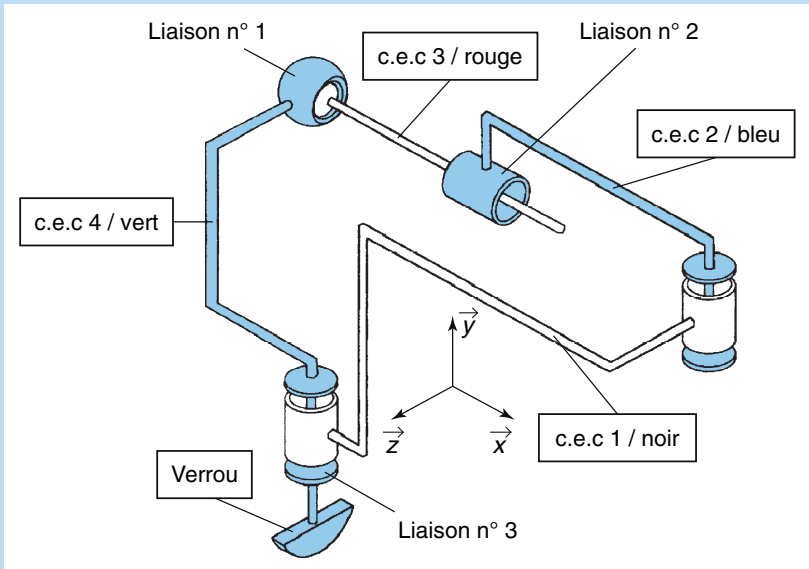
| | Représentation plane | Représentation spatiale | Mouvements relatifs | | | | | | |
|--|----------------------|-------------------------|--|-------|-------|-------|---|-------|-------|
| Liaison encastrement de centre O. | | | <table border="1"> <tr><td>X</td><td>X</td></tr> <tr><td>X</td><td>X</td></tr> <tr><td>X</td><td>X</td></tr> </table> | X | X | X | X | X | X |
| X | X | | | | | | | | |
| X | X | | | | | | | | |
| X | X | | | | | | | | |
| Liaison pivot de centre O d'axe z. | | | <table border="1"> <tr><td>X</td><td>X</td></tr> <tr><td>X</td><td>X</td></tr> <tr><td>R_z</td><td>X</td></tr> </table> | X | X | X | X | R_z | X |
| X | X | | | | | | | | |
| X | X | | | | | | | | |
| R_z | X | | | | | | | | |
| Liaison glissière de centre O d'axe z. | | | <table border="1"> <tr><td>X</td><td>X</td></tr> <tr><td>X</td><td>X</td></tr> <tr><td>X</td><td>T_z</td></tr> </table> | X | X | X | X | X | T_z |
| X | X | | | | | | | | |
| X | X | | | | | | | | |
| X | T_z | | | | | | | | |
| Liaison hélicoïdale de centre O d'axe z. | | | <table border="1"> <tr><td>X</td><td>X</td></tr> <tr><td>X</td><td>X</td></tr> <tr><td>R_z</td><td>T_z</td></tr> </table> | X | X | X | X | R_z | T_z |
| X | X | | | | | | | | |
| X | X | | | | | | | | |
| R_z | T_z | | | | | | | | |
| Liaison pivot glissant de centre O d'axe z. | | | <table border="1"> <tr><td>X</td><td>X</td></tr> <tr><td>X</td><td>X</td></tr> <tr><td>R_z</td><td>T_z</td></tr> </table> | X | X | X | X | R_z | T_z |
| X | X | | | | | | | | |
| X | X | | | | | | | | |
| R_z | T_z | | | | | | | | |
| Liaison sphérique à doigt de centre O d'axe z. | | | <table border="1"> <tr><td>R_x</td><td>X</td></tr> <tr><td>R_y</td><td>X</td></tr> <tr><td>X</td><td>X</td></tr> </table> | R_x | X | R_y | X | X | X |
| R_x | X | | | | | | | | |
| R_y | X | | | | | | | | |
| X | X | | | | | | | | |
| Liaison rotule de centre O. | | | <table border="1"> <tr><td>R_x</td><td>X</td></tr> <tr><td>R_y</td><td>X</td></tr> <tr><td>R_z</td><td>X</td></tr> </table> | R_x | X | R_y | X | R_z | X |
| R_x | X | | | | | | | | |
| R_y | X | | | | | | | | |
| R_z | X | | | | | | | | |
| Liaison appui plan de centre O de normale y. | | | <table border="1"> <tr><td>X</td><td>T_x</td></tr> <tr><td>R_y</td><td>X</td></tr> <tr><td>X</td><td>T_z</td></tr> </table> | X | T_x | R_y | X | X | T_z |
| X | T_x | | | | | | | | |
| R_y | X | | | | | | | | |
| X | T_z | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | |
|---|----------|--|---|----------|----------|-------|----------|-------|-------|
| <p>Liaison linéaire annulaire de centre O d'axe z.</p> | | | <table border="1"> <tr><td>R_x</td><td>\times</td></tr> <tr><td>R_y</td><td>\times</td></tr> <tr><td>R_z</td><td>T_z</td></tr> </table> | R_x | \times | R_y | \times | R_z | T_z |
| R_x | \times | | | | | | | | |
| R_y | \times | | | | | | | | |
| R_z | T_z | | | | | | | | |
| <p>Liaison linéaire rectiligne de centre O de normale y et d'axe z.</p> | | | <table border="1"> <tr><td>\times</td><td>T_x</td></tr> <tr><td>R_y</td><td>\times</td></tr> <tr><td>R_z</td><td>T_z</td></tr> </table> | \times | T_x | R_y | \times | R_z | T_z |
| \times | T_x | | | | | | | | |
| R_y | \times | | | | | | | | |
| R_z | T_z | | | | | | | | |
| <p>Liaison ponctuelle de centre O de normale z.</p> | | | <table border="1"> <tr><td>R_x</td><td>T_x</td></tr> <tr><td>R_y</td><td>T_x</td></tr> <tr><td>R_z</td><td>T_z</td></tr> </table> | R_x | T_x | R_y | T_x | R_z | T_z |
| R_x | T_x | | | | | | | | |
| R_y | T_x | | | | | | | | |
| R_z | T_z | | | | | | | | |

Vérouillage d'un lève conteneur

(D'après un sujet de BTS Maintenance Industrielle)

Le schéma cinématique ci-dessous représente le système de verrouillage d'un lève conteneur.



Travail demandé :

Identifier les liaisons du schéma cinématique ci-dessus.

Solution

Liaison n° 1 : Liaison rotule.

Liaison n° 2 : Liaison pivot glissant d'axe \vec{x} .

Liaison n° 3 : Liaison pivot d'axe \vec{y} .

Action mécanique à distance

Objectif

Déterminer une action mécanique de pesanteur.

I Actions mécaniques à distance

Les actions mécaniques à distance sont des forces qui s'appliquent sur un solide sans que celui-ci soit en contact avec des objets qui créent ces forces.

Exemples : actions de pesanteur et actions magnétiques ou électromagnétiques

II Actions de pesanteur

Tout objet est attiré vers le sol. Il est soumis aux actions mécaniques de pesanteur due à l'attraction exercée par la terre. On peut modéliser ces actions en une force unique \vec{P} , appelée poids.

Caractéristiques

| | |
|----------------------|---------------------|
| Point d'application: | G centre de gravité |
| Direction: | Verticale * |
| Sens: | vers le bas * |
| Norme: | $P = m \cdot g$ |

* vérifier le sens de \vec{g}

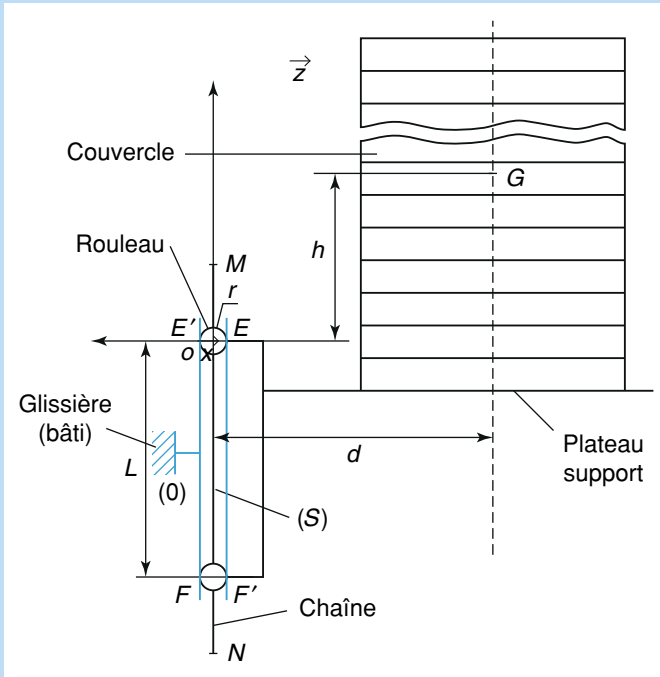
Notation

- m masse du solide en Kg
- g Accélération de pesanteur ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$)
- P poids en Newton (N)

Ascenseur de pile de couvercle

(D'après un sujet de BTS Mécanique Automatismes Industriels)

Le schéma ci-dessous représente un ascenseur de pile de couvercle dans un poste de défilage de couvercle.



Données :

Soit G le centre de gravité de l'ensemble des 25 couvercles.

Masse d'un couvercle : $m = 0,7 \text{ Kg}$

Accélération de pesanteur : $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

Travail demandé :

Calculer le torseur d'action mécanique de pesanteur lorsque le plateau support est chargé de 25 couvercles. Unité en N.

Solution

$$\{T(\text{couvercles} \rightarrow \text{plateau})\}_G : \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -25 \cdot m \cdot g & 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -171,7 & 0 \end{Bmatrix}$$

Action mécanique d'un fluide sur un solide

Objectif

Caractériser l'action mécanique d'un fluide sur un solide.

I À savoir

La pression d'un fluide sur un solide peut se modéliser globalement par une force.

\vec{F} (Fluide \rightarrow solide) localisée au centre de la surface.

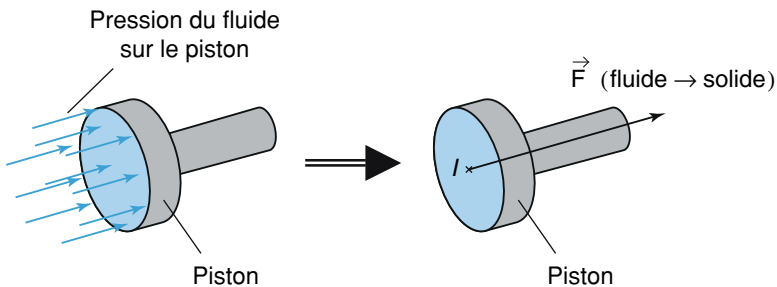


Figure 1 – Piston d'un vérin

- **Caractéristiques de la force**

| | |
|---------------------|--|
| Point d'application | Centre de poussée de la surface de contact |
| Direction | perpendiculaire à la surface de contact |
| Sens | vers l'extérieur du fluide |
| Intensité | $\ \vec{F}(\text{Fluide} \rightarrow \text{solide})\ = P \cdot S$ |

- **Notation**

P Pression du fluide en MPa (la pression est uniforme sur toute la surface).

S Aire de la surface de contact en mm²

\vec{F} (Fluide \rightarrow solide) Action mécanique du fluide sur le solide en Newton (N)

Remarque : 1 bar = 0,1 MPa.

Force théorique d'un vérin double

Calculer la force théorique d'un vérin double effet en poussant et en tirant.

Pression du fluide : P = 0,6 MPa

Diamètre du piston : D = 25 mm

Diamètre de la tige du piston : d = 10 mm.



Solution

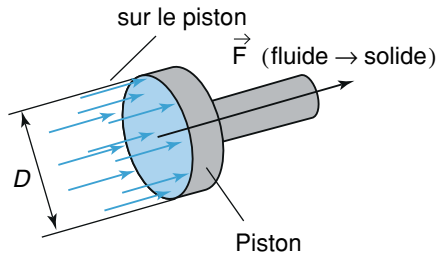
- **Force théorique en poussant**

Le fluide agit sur l'aire d'un disque

$$S = \pi \cdot R^2$$

$$\text{ou } S = \pi \cdot \frac{D^2}{4} \Rightarrow S = \pi \cdot \frac{25^2}{4} \\ = 491 \text{ mm}^2$$

$$\|\vec{F} (\text{Fluide} \rightarrow \text{solide})\| = P \cdot S \\ = 0,6 \cdot 491 \\ \approx 295 \text{ N}$$

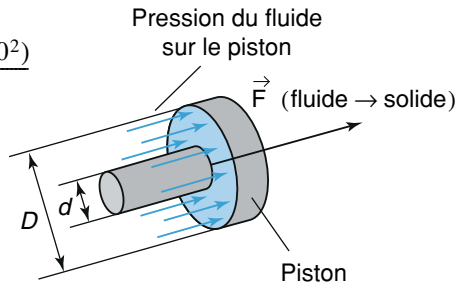


- **Force théorique en tirant**

Le fluide agit sur l'aire d'une couronne

$$S = \pi \cdot \frac{(D^2 - d^2)}{4} \Rightarrow S = \pi \cdot \frac{(25^2 - 10^2)}{4} \\ = 412 \text{ mm}^2$$

$$\|\vec{F} (\text{Fluide} \rightarrow \text{solide})\| = P \cdot S \\ = 0,6 \cdot 412 \\ \approx 247 \text{ N}$$



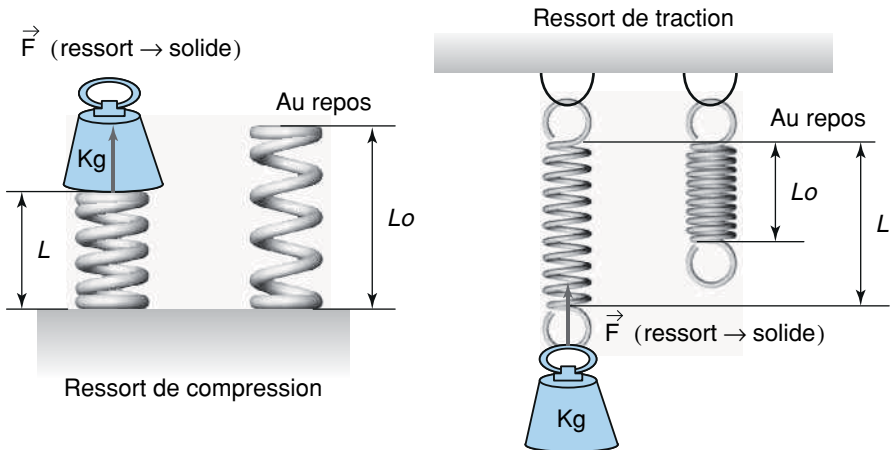
Action mécanique d'un ressort sur un solide

Objectif

Caractériser l'action mécanique d'un ressort sur un solide.

I À savoir

On peut modéliser l'action d'un ressort sur un solide par une force proportionnelle à l'allongement (ou raccourcissement) de celui-ci.



- **Caractéristiques de la force**

| | |
|---------------------|---|
| Point d'application | Point d'enclage du ressort |
| Direction | axe du ressort |
| Sens | dirigé vers l'intérieur (ressort de traction) ou l'extérieur (ressort de compression) |
| Norme | $\ \vec{F}(\text{Ressort} \rightarrow \text{solide})\ = k \cdot \Delta l$ |

• **Notation**

- k raideur du ressort en N/mm
- $\Delta l = L_0 - L$ allongement (ou raccourcissement) en mm
- L_0 longueur du ressort au repos
- L longueur du ressort sous charge
- $\vec{F}(\text{Ressort} \rightarrow \text{solide})$ action mécanique du ressort en Newton (N)

Application

(D'après un sujet de BTS Mécanique Automatismes Industriels 2004)

Le schéma cinématique de la figure 1, représente un outillage intégré dans une pince permettant le serrage d'une fourchette 2.

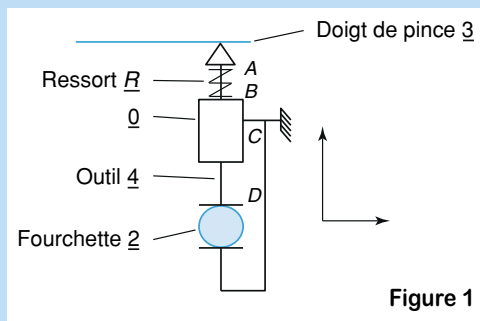


Figure 1

Données :

- Raideur : $K = 9 \text{ N/mm}$
- Longueur initiale: $L_0 = 16 \text{ mm}$
- Longueur après montage (position repos) dans l'outillage $L_p = 8 \text{ mm}$
- Déplacement des outils : $L_t = 1 \text{ mm}$.

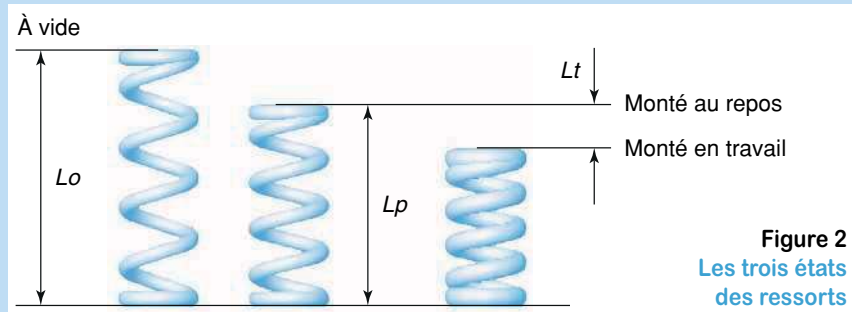


Figure 2
Les trois états des ressorts

Travail demandé :

Déterminer l'action mécanique exercée par le ressort sur l'outil 4 en position travail.

Solution

Le raccourcissement Δl du ressort en position travail est égal à :

$$\Delta l = L_0 - L \text{ avec } L = L_p - L_t$$

$$F_R = K \cdot \Delta l = K \cdot [L_0 - (L_p + L_t)] = 9 (16 - 8 + 1)$$

$$F_R = 81 \text{ (N)}.$$

Action mécanique : solide sur solide

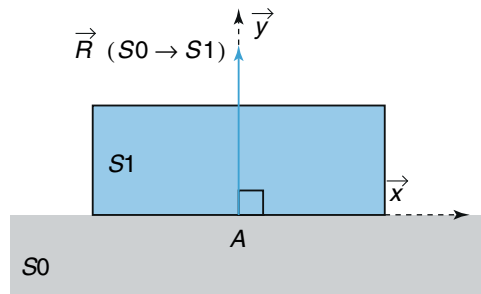
Objectif

Caractériser l'action mécanique d'un solide sur un solide.

I Action mécanique de contact sans frottement

Lorsque la liaison entre solide est parfaite (sans jeu, sans frottement), la résultante de l'action mécanique est alors perpendiculaire au plan tangent de contact.

On peut facilement tracer cette direction dans le cas d'un contact ponctuel, linéaire rectiligne ou plan. Dans les autres cas, celle-ci est inconnue.



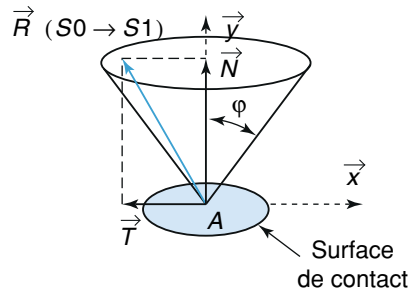
II Action mécanique de contact avec frottement

- Cône de frottement**

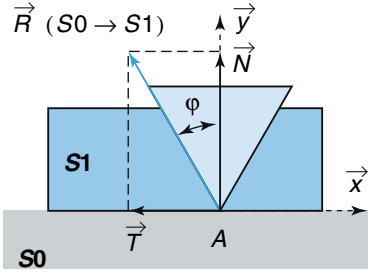
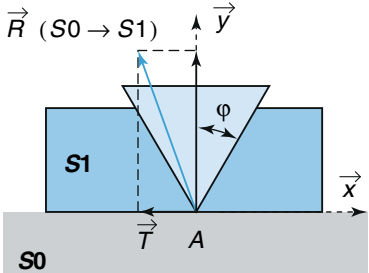
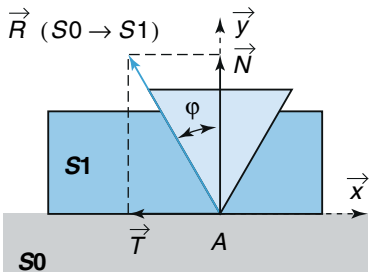
On appelle cône de frottement, le volume engendré par les positions possibles de $\vec{R}(S0 \rightarrow S1)$ ne modifiant pas l'équilibre de S1 par rapport à S0.

On définit le coefficient de frottement par :

$$f = \tan(\varphi)$$



• **Loi de Coulomb**

| | | |
|--|--|--|
| <p>Glissement $\vec{V}(S1/S0) \neq \vec{0}$</p> |  | <p>L'effort tangentiel \vec{T} est opposé au vecteur vitesse. $\vec{V}(S1/S0) \cdot \vec{T} < 0$</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin-left: auto; margin-right: auto;"> $T = f \cdot N$ </div> |
| <p>Équilibre phénomène de l'adhérence $\vec{V}(S1/S0) = \vec{0}$</p> |  | <p>Il n'existe pas de relation directe entre T et N. La seule chose qu'on peut écrire est que :</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin-left: auto; margin-right: auto;"> $T \leq f \cdot N$ </div> |
| <p>Équilibre strict (cas théorique) $\vec{V}(S1/S0) = \vec{0}$</p> |  | <p>La résultante est sur la génératrice du cône de frottement.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin-left: auto; margin-right: auto;"> $T = f \cdot N$ </div> |

Remarques :

On fera souvent l'approximation que le coefficient de frottement est égal au coefficient d'adhérence.

La résultante $\vec{R}(S0 \rightarrow S1)$ ne quitte JAMAIS le cône de frottement.

Application

(D'après un sujet de BTS Conception Produits Industriels)

Le frotteur latéral est présenté dans la fiche n° 10 : Statique 4 forces.

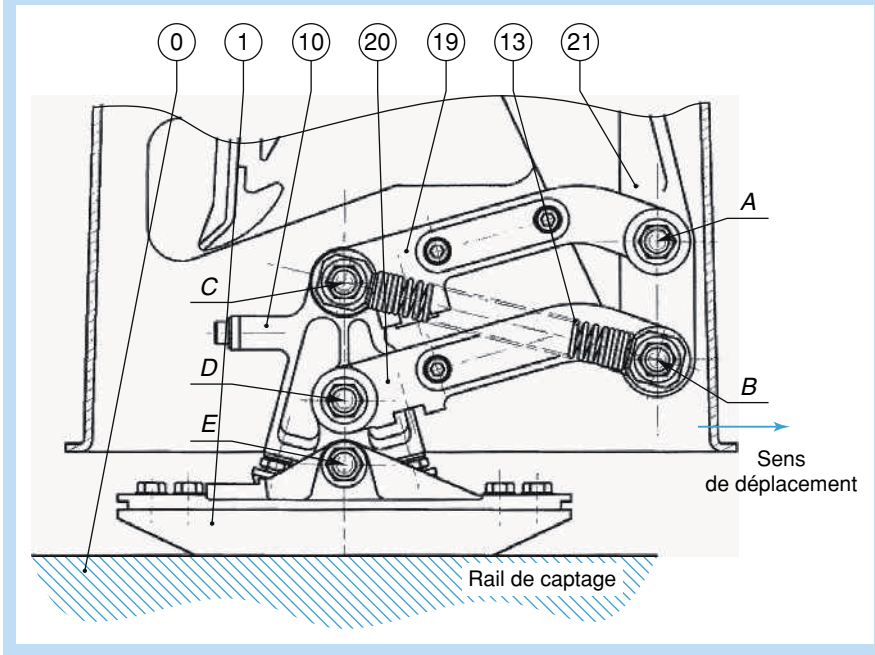
Données :

Le sens de déplacement du véhicule est donné de la gauche vers la droite.

Le facteur de frottement du patin 1 sur le rail de captage $f = \tan \varphi = 0,18$.

Travail demandé :

Déterminer graphiquement les caractéristiques (point d'application, direction et sens) de la résultante \vec{R} (rail \rightarrow patin) de l'action de contact du rail sur le patin 1.



Solution

- **Direction**

On considère le contact patin/rail en équilibre strict. La direction de la résultante \vec{R} (rail \rightarrow patin) est sur la génératrice du cône de frottement, c'est-à-dire à environ 10° par rapport à la verticale.

- **Sens**



Le patin tend à se déplacer vers la droite. La composante \vec{T} de la résultante $\vec{R}(\text{rail} \rightarrow \text{patin})$ s'oppose au déplacement, elle est donc dirigée vers la gauche.

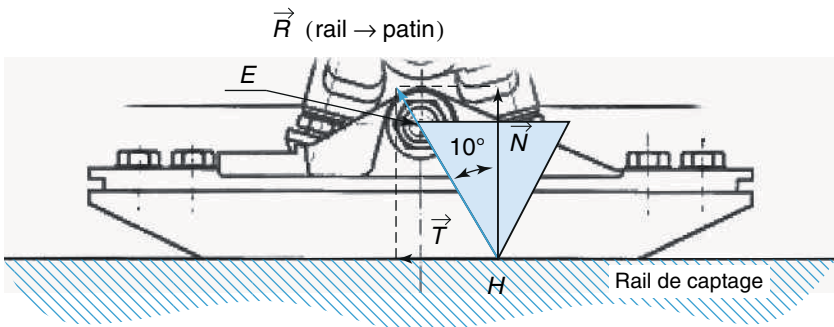
- **Point d'application**

Si on isole le patin, il est soumis à 2 forces extérieures $\vec{R}(\text{rail} \rightarrow \text{patin})$ et $\vec{R}(10 \rightarrow \text{patin})$ au point E.

D'après le principe fondamental de la statique, les deux forces ont même direction ; une droite passant par les points d'application.

On obtient ainsi le point d'application H en traçant une droite inclinée de 10° par rapport à la verticale et passant par le point E.

| Force | Point d'application | Direction | Sens | Intensité |
|---|---------------------|---|---|-----------|
| $\vec{R}(\text{rail} \rightarrow \text{patin})$ | H | (EH) ou  |  | |



Torseur et liaison

Objectif

- Déterminer le torseur cinématique d'une liaison.
- Déterminer le torseur d'action mécanique transmissible.

I Torseur cinématique

À chaque liaison, on peut associer un torseur cinématique représentant les vitesses.

$$\{V(1/2)\} : \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(1/2) \\ \vec{V}(A \in 1/2) \end{array} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

$\vec{\Omega}(1/2)$: Vitesse angulaire du solide 1 par rapport au solide 2 en radian par seconde (rad/s).

$\vec{V}(A \in 1/2)$: Vitesse du point A appartenant au solide 1 par rapport au solide 2 en mètre par seconde (m/s).

- Notation**

Forme complète :

$$\{V(1/2)\} : \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(1/2) = \alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{y} + \gamma \cdot \vec{z} \\ \vec{V}(A \in 1/2) = u \cdot \vec{x} + v \cdot \vec{y} + w \cdot \vec{z} \end{array} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Forme colonne :

$$\{V(1/2)\} : \left\{ \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ u \\ v \\ w \end{array} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Forme compacte :

$$\{V(1/2)\} : \left\{ \begin{array}{l} \alpha \ u \\ \beta \ v \\ \gamma \ w \end{array} \right\}_{A(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

• **Composantes du torseur**

À chaque mobilité, on peut associer une vitesse.

Exemple :

Pour une liaison appui plan de normale \vec{y} , on associe le mouvement de rotation (Ry) autour de l'axe \vec{y} à la vitesse angulaire (β) d'axe \vec{y} . De même, on peut associer le mouvement de translation rectiligne (Tx) à la vitesse (u) suivant l'axe \vec{x} .

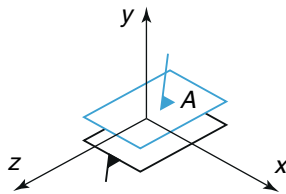


Figure 1 – Liaison appui plan (A, \vec{y})

Tableau de mobilités

| | |
|----|----|
| x | Tx |
| Ry | x |
| x | Tz |

Torseur cinématique

$$\{V(1/2)\} : \left\{ \begin{array}{l} 0 \ u \\ \beta \ 0 \\ 0 \ w \end{array} \right\}_{A(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Remarque :

Pour la liaison hélicoïdale, il y a une relation liant la rotation et la translation.

II Torseur d'action mécanique

À chaque liaison, on peut associer un torseur d'action mécanique représentant les actions mécaniques TRANSMISSIBLES par celle-ci.

$$\{T(1 \rightarrow 2)\} : \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(1 \rightarrow 2) \\ \vec{M}_A(1 \rightarrow 2) \end{array} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

$\vec{R}(1 \rightarrow 2)$: Représente la force transmissible par la liaison en Newton (N).

$\vec{M}_A(1 \rightarrow 2)$: Représente le moment transmissible par la liaison en Newton.mètre (N.m).

Le nombre d'inconnues constitue le degré de liaison n_s .

- **Notation**

Forme complète :

$$\{T(1 \rightarrow 2)\} : \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(1 \rightarrow 2) = X \cdot \vec{x} + Y \cdot \vec{y} + Z \cdot \vec{z} \\ \vec{M}_A(1 \rightarrow 2) = L \cdot \vec{x} + M \cdot \vec{y} + N \cdot \vec{z} \end{array} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Forme colonne :

$$\{T(1 \rightarrow 2)\} : \left\{ \begin{array}{c} X \\ Y \\ Z \\ L \\ M \\ N \end{array} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Forme compacte :

$$\{T(1 \rightarrow 2)\} : \left\{ \begin{array}{cc} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{array} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

- **Composantes du torseur**

Pour déterminer les composantes du torseur d'action mécanique à partir du tableau de mobilités, deux raisonnements sont possibles :

- avec les mobilités ;
- sans les mobilités.

Avec les mobilités

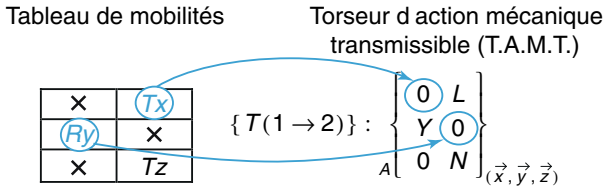
Si, dans la liaison, il existe une mobilité, cela signifie qu'il n'y a pas de surface de contact pour stopper ce mouvement. On ne peut donc pas transmettre une action mécanique suivant cet axe.

Exemple :

Pour la liaison représentée figure 1, il est possible de faire une rotation (Ry) suivant l'axe \vec{y} . Il n'y a donc pas de surface de contact interdisant ce mouvement. La liaison ne permet donc pas de transmettre de moment suivant cet axe.

La liaison permet une translation rectiligne suivant l'axe \vec{x} , il n'y a donc pas de surface de contact interdisant ce mouvement. La liaison ne permet donc pas de transmettre une force dans cette direction.

À chaque mobilité correspond un zéro dans le torseur associé.



Sans les mobilités

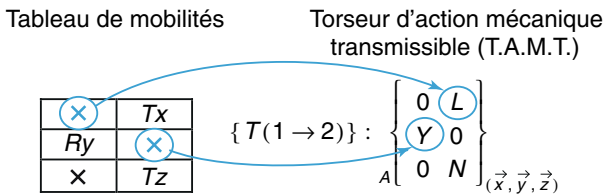
Dans une liaison, l'absence de mobilité indique l'interdiction du mouvement réalisé par une surface de contact. On peut donc transmettre une action mécanique.

À chaque absence de mobilité correspond une composante du torseur associé.

Exemple :

Pour la liaison représentée figure 1, il n'est pas possible de faire une translation (T_y) suivant l'axe \vec{y} . Il y a donc une surface de contact permettant de transmettre la force (Y).

La liaison ne permet pas de faire des rotations (R_x et R_z) suivant les axes \vec{x} et \vec{z} . Elle permet donc de transmettre les moments L et N. On obtient le torseur d'action mécanique transmissible suivant :



Remarque :

Ces règles ne sont pas valables pour la liaison hélicoïdale. Le TAMT a toutes ses composantes avec une relation supplémentaire liant une force et un moment par rapport à son axe.

Exemple : liaison hélicoïdale d'axe \vec{x} , le TAMT est complet avec en supplément la relation liant la force et le moment $X = k.L$.

Application

(D'après un sujet de BTS Mécanique Automatismes Industriels)

Le mécanisme schématisé sur la fig.1 permet la prise, le transfert, la dépose et le sertissage de bouchons à l'aide d'un vérin pneumatique vertical VPS équipé d'une ventouse V contenant une butée mécanique.

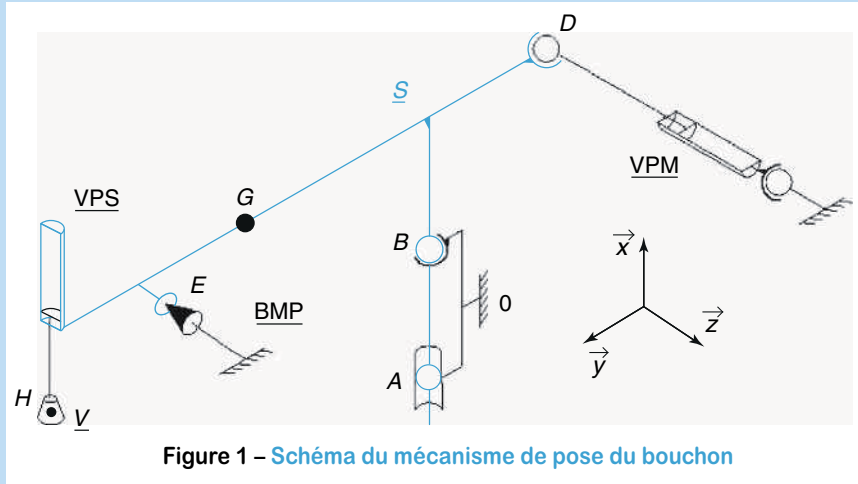


Figure 1 – Schéma du mécanisme de pose du bouchon

Travail demandé :

Déterminer les torseurs d'action mécanique appliquée sur S au point A, B, E.

Solution

On peut raisonner à partir des mobilités.

Pour la liaison linéaire annulaire de centre A, il est possible de faire une rotation suivant les trois axes du repère (Rx, Ry, Rz). Il n'y a donc pas de surface de contact interdisant ces mouvements. La liaison ne permet donc pas de transmettre des moments. La liaison permet une translation rectiligne suivant l'axe \vec{x} , il n'y a donc pas de surface de contact interdisant ce mouvement. La liaison ne permet donc pas de transmettre une force dans cette direction.

Tableau de mobilités

Torseur d'action mécanique transmissible (T.A.M.T.)

| | |
|-------|-------|
| R_x | T_x |
| R_y | x |
| R_z | x |

$$\{T_z(0 \rightarrow S)\} : \left. \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{array} \right\}_{A, (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$