Sous la direction de BERNARD **SALAMITO**

STÉPHANE **CARDINI** | DAMIEN **JURINE** | MARIE-NOËLLE **SANZ**

PHYSIQUE MPSI

TOUT-EN-UN

j'intègre

Avec la collaboration de :
ANNE-EMMANUELLE **BADEL**
FRANÇOIS **CLAUSSET**

DUNOD

Conception et création de couverture : Hokus Pokus Créations
Les photos du chapitre 5 ont été réalisées par Pierre Canaguier

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-079402-7

Table des matières

Avant propos

Cette nouvelle édition du *Tout-en-un de Physique, option MPSI* est totalement conforme au programme officiel des classes préparatoires. Cependant quelques paragraphes, intitulés « complément », proposent des développements en dehors du programme.

Les encadrés sur fond gris contiennent l'ensemble de ce qu'il faut retenir. Ils peuvent être lus indépendamment du texte, dans une phase de révision. En fin de chaque chapitre, une synthèse récapitule les savoirs et savoir-faire qui doivent être acquis par l'étudiant et les mots clés dont il doit avoir la maîtrise.

Les exercices sont regroupés en deux catégories : dans la rubrique *s'entraîner* des exercices d'application directe du cours et dans la rubrique *approfondir* des exercices demandant plus de réflexion. Les solutions proposées sont complètes et peuvent servir de modèle de rédaction.

Deux appendices complètent l'ouvrage. Le premier traite du délicat problème des incertitudes expérimentales. Le deuxième expose toutes les méthodes mathématiques dont la maîtrise peut être nécessaire lors d'une épreuve de physique.

Les auteurs seront heureux d'avoir des retours de lecteurs sur leur expérience de travail avec ce livre. Bonne lecture et bon travail à tous !

Première partie

Signaux physiques

Oscillateur harmonique 1

On appelle **signal physique** une grandeur physique dépendant du temps. Dans cette partie du cours, on s'intéressera surtout à des **signaux périodiques**. Un signal périodique est un signal qui se reproduit identique à lui-même au cours du temps. Le plus fondamental des signaux périodiques est le **signal sinusoïdal**.

Dans ce chapitre, on introduit un modèle physique qui produit un signal sinusoïdal appelé l'**oscillateur harmonique**. Les adjectifs harmonique et sinusoïdal sont synonymes : on rencontre parfois les expressions « signal harmonique » ou « oscillateur sinusoïdal ».

L'exemple étudié dans ce chapitre est un oscillateur harmonique mécanique. Cependant on retrouve ce modèle dans bien d'autres domaines de la physique, notamment l'électricité.

1 Un oscillateur harmonique mécanique

1.1 Système étudié

Le système mécanique oscillant le plus simple est une masse accrochée à un ressort.

On considère dans ce paragraphe un mobile de masse m qui se déplace sans frottement le long d'une tige horizontale (voir figure 1.1). Sa position est repérée par l'abscisse x de son centre d'inertie G mesurée sur l'axe (Ox) matérialisé par la tige. On choisit de placer l'origine de l'axe (Ox) de manière que G coïncide avec O dans la position d'équilibre (voir figure 1.1).

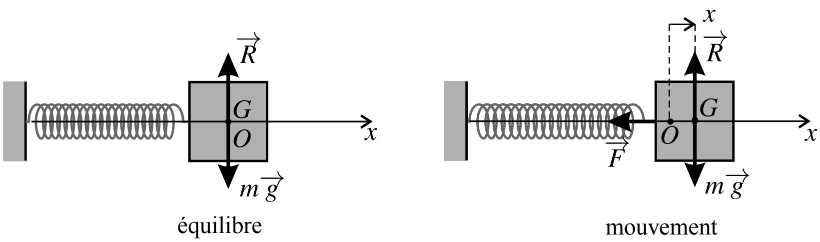

Figure 1.1 – Un exemple d'oscillateur harmonique mécanique.

1.2 Obtention d'une équation différentielle

a) Forces s'exerçant sur le système

Le ressort exerce sur le mobile une force qui s'écrit :

$$\overrightarrow{F} = -kx\overrightarrow{u_x},$$

où k est la **constante de raideur** du ressort. Cette force est une force de rappel : son sens est opposé au sens du déplacement du mobile par rapport à sa position d'équilibre (la position $x = 0$). Lorsque x est positif, la force est de sens opposé à $\overrightarrow{u_x}$ et inversement. On trouvera plus de renseignements sur la force d'un ressort dans le chapitre *Principes de la dynamique newtonienne*.

Le mobile est aussi soumis à son poids $m\overrightarrow{g}$ ainsi qu'à une réaction $\overrightarrow{R}$ de la tige. Ces deux forces sont verticales et n'ont pas d'influence sur le mouvement qui est horizontal.

b) Application du principe fondamental de la dynamique

Le mouvement du mobile est régi par le principe fondamental de la dynamique (ou deuxième loi de Newton), qui s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{F}$$

où $\overrightarrow{p}$ est la quantité de mouvement du mobile. En notant $\overrightarrow{v_G}$ la vitesse instantanée du centre d'inertie G du mobile, on a :

$$\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v_G} = m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_x}.$$

Dans cette relation, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ est la dérivée de la fonction $x(t)$. On notera $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ la dérivée seconde de cette fonction. Le principe fondamental de la dynamique conduit donc à la relation, vérifiée à chaque instant : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_x}\right) = -kx\overrightarrow{u_x}$, soit : $m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\overrightarrow{u_x} = -kx\overrightarrow{u_x}$, soit après simplification :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}x.} \tag{1.1}$$

La relation qui vient d'être obtenue est appelée **équation différentielle**. Une équation différentielle est une relation entre une fonction $x(t)$ et ses dérivées par rapport au temps $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$..., qui est vérifiée à chaque instant. Ici, on a trouvé une équation du deuxième ordre, car l'ordre de dérivation le plus grand qui apparaît dans l'équation (le seul ici, mais il pourrait y en avoir plusieurs) est égal à deux.

1.3 Définition d'un oscillateur harmonique

L'équation différentielle (1.1) est une équation différentielle d'oscillateur harmonique.

On appelle **oscillateur harmonique** un système physique décrit par une grandeur $x(t)$ dépendant du temps et vérifiant une équation différentielle de la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega_0^2 x(t) \tag{1.2}$$

où ω_0 est une constante réelle positive qui est appelée **pulsation propre** de l'oscillateur harmonique et qui s'exprime en rad.s^{-1}.

Remarque

L'unité de ω_0 se déduit de l'homogénéité de l'équation différentielle. En effet, la dérivée seconde par rapport au temps a pour dimension physique la dimension de x divisée par un temps au carré. Donc ω_0^2 a la dimension des s^{-2} et ω_0 a la dimension des s^{-1}. Le radian n'a pas de dimension physique.

La masse accrochée au ressort du paragraphe précédent est un oscillateur harmonique mécanique, de pulsation :

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.}$$

On en verra d'autres exemples, en mécanique ou en électricité.

1.4 Résolution de l'équation différentielle

a) Position du problème

Résoudre une équation différentielle consiste à trouver l'expression de la fonction inconnue $x(t)$ qui vérifie cette relation. Mais l'équation ne détermine pas de manière unique $x(t)$. Parmi les fonctions qui la vérifient, on doit choisir celle qui respecte des **conditions initiales** qui sont connues *a priori*.

Pour une équation du deuxième ordre, comme l'équation d'un oscillateur harmonique, les conditions initiales consistent en la donnée :

- de la valeur de la fonction inconnue à l'instant initial $t = 0$: $x(0)$;
- de la valeur de la dérivée première de la fonction inconnue à l'instant initial : $\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0}$.

On va résoudre cette équation dans le cas du mobile accroché au ressort. Les condition initiales sont :

- la position initiale : $x(0) = x_0$;
- la vitesse initiale : $\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = v_0$.

b) Solutions dans deux cas particuliers

Cas où $x_0 \neq 0$ et $v_0 = 0$. On considère la fonction :

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) \tag{1.3}$$

où x_0 est une constante. On a alors, en utilisant des formules classiques de dérivation (voir l'appendice mathématique) :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\omega x_0 \sin(\omega_0 t),\ \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\omega_0 x_0 \sin(\omega_0 t)) = -\omega_0^2 x_0 \cos(\omega_0 t) = -\omega_0^2 x(t) = -\frac{k}{m}x(t).$$

Ainsi cette fonction $x(t)$ vérifie l'équation différentielle (1.1).

À quelle situation physique la solution trouvée correspond-elle ? Les conditions initiales vérifiées sont :

$$x(0) = x_0 \cos(0) = x_0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = \omega x_0 \sin(0) = 0.$$

Il s'agit du cas où on lâche le mobile dans la position $x = x_0$ sans lui communiquer de vitesse initiale. Dans ce cas, $x(t)$ oscille entre $-x_0$ et x_0 puisque la fonction cosinus oscille entre -1 et 1 (voir figure 1.2).

Cas où $x_0 = 0$ et $v_0 \neq 0$. On peut imaginer une autre manière de lancer le mobile : sans l'écarter de sa position d'équilibre, lui communiquer une vitesse $v_0\overrightarrow{u_x}$. Quelle est alors la loi du mouvement $x(t)$? Les conditions initiales que doit vérifier cette solution sont :

$$x(0) = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = v_0.$$

La fonction : $x(t) = b\sin(\omega_0 t)$, où b est une constante est aussi une solution de l'équation différentielle du mouvement comme le montre le calcul suivant :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \omega_0 b \cos(\omega_0 t), \quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\omega_0 b \cos(\omega_0 t)) = -\omega_0^2 b \sin(\omega_0 t) = -\omega_0^2 x(t) = -\frac{k}{m}x(t).$$

Elle vérifie les conditions initiales si : $x(0) = b\sin(0) = 0$, et si : $\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = \omega_0 b \cos(0) = v_0$.

Il faut donc que : $b = \frac{v_0}{\omega}$. Finalement, la solution de l'équation différentielle correspondant à ces conditions initiales est :

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t). \tag{1.4}$$

Cette solution $x(t)$ oscille entre $-\frac{v_0}{\omega_0}$ et $\frac{v_0}{\omega_0}$ puisque la fonction sinus oscille entre -1 et 1 (voir figure 1.2).

c) Solution pour des conditions initiales quelconques

On peut vérifier facilement que la somme des deux solutions précédemment trouvées,

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t), \tag{1.5}$$

est aussi une solution de l'équation différentielle et qu'elle vérifie les conditions initiales $x(0) = x_0$ et $\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = v_0$. On a ainsi la solution pour un jeu de conditions initiales quelconque. Sur la figure 1.2 on voit que $x(t)$ oscille entre deux valeurs opposées $-A$ et A.

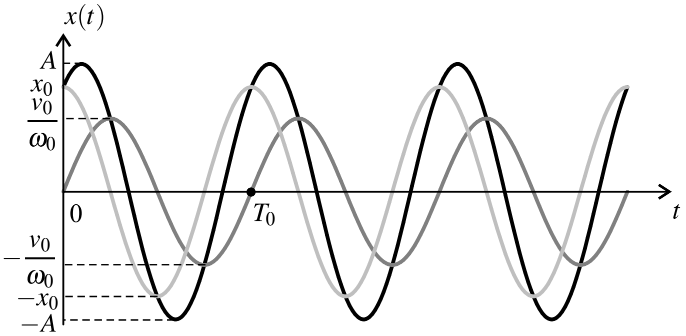

Figure 1.2 – Représentation graphique de $x(t)$ en fonction de t. En gris clair : cas $x_0 \neq 0$ et $v_0 = 0$; en gris foncé : cas $x_0 = 0$ et $v_0 \neq 0$; en noir : cas $x_0 \neq 0$ et $v_0 \neq 0$. La période des oscillations est $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ (voir paragraphe 2).

d) Généralisation

La solution de l'équation de l'oscillateur harmonique (1.2) est de la forme :

$$x(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)$$

où a et b sont des constantes fixées par les conditions initiales.

1.5 Conservation de l'énergie mécanique

Lorsqu'il est en mouvement le mobile possède une **énergie cinétique** qui se calcule par la formule :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2.$$

Le ressort quant à lui n'a pas de masse donc pas d'énergie cinétique, mais il possède une énergie appelée **énergie potentielle** liée à sa déformation et dont on admettra ici l'expression :

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2.$$

La somme de ces deux énergies est l'**énergie mécanique** :

$$E_m = E_p + E_c = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2.$$

Que valent ces énergies au cours du temps ?

Si l'on injecte la solution $x(t) = x_0\cos(\omega_0 t) + \dfrac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$ dans les expressions précédentes on trouve :

$$\begin{aligned} E_c(t) &= \frac{1}{2}m\left(-\omega_0 x_0 \sin(\omega_0 t) + v_0 \cos(\omega_0 t)\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}m\left(\omega_0^2 x_0^2 \sin^2(\omega_0 t) + v_0^2 \cos^2(\omega_0 t) - 2\omega_0 x_0 v_0 \cos(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t)\right), \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} E_p(t) &= \frac{1}{2}k\left(x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}k\left(x_0^2 \cos^2(\omega_0 t) + \frac{v_0^2}{\omega^2}\sin^2(\omega_0 t) + 2x_0\frac{v_0}{\omega_0}\cos(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t)\right) \\ &= \frac{1}{2}m\left(\omega_0^2 x_0^2 \cos^2(\omega_0 t) + v_0^2 \sin^2(\omega_0 t) + 2\omega_0 x_0 v_0 \cos(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t)\right), \end{aligned}$$

en utilisant la relation $k = m\omega_0^2$. L'énergie mécanique s'écrit :

$$\begin{aligned} E_m(t) &= E_p(t) + E_c(t) \\ &= \frac{1}{2}m\left(\omega_0^2 x_0^2\left(\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)\right) + v_0^2\left(\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}m\left(\omega_0^2 x_0^2 + v_0^2\right) = \frac{1}{2}k\left(x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}\right) = \frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2. \end{aligned} \tag{1.6}$$

en utilisant encore la relation $k = m\omega_0^2$. L'énergie mécanique est donc constante dans le temps. On reconnaît dans la dernière expression la valeur de l'énergie mécanique à l'instant initial. Ce résultat est cohérent avec le fait que l'on étudie un système idéalisé dont l'amortissement est négligé : on ne prend en compte aucun type de frottement. C'est pourquoi il y a conservation de l'énergie mécanique.

Remarque

Dans les deux cas particuliers du paragraphe b) on fournit son énergie au système :

- sous forme d'énergie potentielle uniquement quand $x_0 \neq 0$ et $v_0 = 0$;
- sous forme d'énergie cinétique uniquement quand $x_0 = 0$ et $v_0 \neq 0$.

L'équation différentielle (1.1) peut être établie à partir de la relation de conservation de l'énergie mécanique : $E_m = \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{1}{2}kx(t)^2 =$ constante. En effet, il vient si l'on dérive par rapport au temps :

$$m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + kx(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0,$$

ce qui redonne l'équation différentielle (1.1), après simplification par le terme $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.