

Alexis BRÈS | Léo QUENTIN

L'ORAL DE PHYSIQUE AUX CONCOURS DES ENS ET DE POLYTECHNIQUE

ANNALES CORRIGÉES

- 58 problèmes sur les grands thèmes du programme
- Une résolution détaillée, guidée et pédagogique
- 10 recommandations pour aborder l'oral
- Des méthodes d'analyse d'un problème en physique

Préface de Marie-Noëlle Sanz

DUNOD

l'intérêt

Conception et création de couverture : Atelier +3

<p>Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.</p> <p>Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements</p>	<p>d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.</p> <p>Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).</p>
--	--



© Dunod, 2019

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-079029-6

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Préface

Léo Quentin fut mon étudiant il y a quelques années en PC* au lycée Saint-Louis. Il a ensuite été pendant plusieurs années interrogateur dans ma classe (« colleur » dans le langage des prépas). C'est avec plaisir que je le vois maintenant, en compagnie d'Alexis Brès, partager son expérience avec un plus large public.

C'est en physiciens qu'ils présentent des sujets d'oral parmi les plus récents posés aux concours d'entrée aux Écoles Normales Supérieures et à l'École Polytechnique, associée à l'E.S.P.C.I pour la filière PC. Ils ont su allier l'analyse physique à un indispensable aspect technique, sans lequel il est impossible de pousser la compréhension des phénomènes étudiés à un niveau satisfaisant .

Un certain nombre de ces exercices a été proposé par Léo Quentin à mes étudiants lors de séances d'oraux blancs ces dernières années. Les conseils qu'il leur a donnés à ce moment-là sur l'attitude à adopter en face d'un problème difficile et d'énoncé parfois succinct ont été précieux.

Cet ouvrage s'adresse bien sûr aux meilleurs étudiants de C.P.G.E mais également à tout étudiant intéressé par les Sciences Physiques, ainsi qu'aux candidats à l'Agrégation. La lecture active de ce livre leur donnera sans aucun doute un complément de formation précieux qui les guidera vers la réussite.

Marie-Noëlle Sanz
Professeur de Physique en PC* au lycée Saint-Louis (Paris)

Table des matières

Préface	2
Table des matières	3
Avant-propos	5
Introduction : comment traiter un problème de physique ?	7
1 Mécanique du point	9
1.1 : Le pendule dans tous ses états - X PC	9
1.2 : Une fourmi sur un élastique - X PC	14
1.3 : Cordes de piano couplées - Ulm PC	15
1.4 : Dipôle dans un plan - X MP	20
1.5 : Force centrale et mouvement circulaire excentré - X MP	23
1.6 : Force centrale répulsive - X MP	25
1.7 : Température du Soleil - X MP	27
1.8 : Autour d'une trajectoire circulaire - X MP	29
1.9 : Mouvement brownien et équation de Langevin - Ulm MP	34
2 Mécanique du solide	40
2.1 : Corde sur un plan incliné - X MP	40
2.2 : Cylindre lesté - Lyon/Cachan PC	42
2.3 : Cylindres en contact - X PC	45
2.4 : Comment retenir un bateau - X PC	51
2.5 : Drôle de corde - Ulm PC	54
2.6 : Écoulement d'un milieu granulaire - X MP	56
2.7 : Casse d'une cheminée - X MP	57
2.8 : Rotation synchrone de la Lune - Ulm PC	60
3 Ondes mécaniques	69
3.1 : Corde vibrante verticale - X MP - Lyon/Cachan PC	69
3.2 : Membrane vibrante - X PC	73
3.3 : Cristal diatomique - Ulm MP	76
3.4 : Le claquement du fouet - Ulm PC	80
4 Diffusion	84
4.1 : Taille critique d'un mammifère - Lyon/Cachan MP	84
4.2 : Gel d'un lac - X MP	87
4.3 : Une tente qui chauffe - X MP	90

4.4 : Barre en combustion - Ulm PC	94
4.5 : Caléfaction 1 - X MP	98
4.6 : Conductivité thermique d'un vide imparfait - Ulm MP	102
4.7 : Équation de la diffusion en dimension quelconque - Ulm MP	107
5 Mécanique des fluides	111
5.1 : Écoulement autour d'une sphère - X PC	111
5.2 : Cavitation - Ulm PC	114
5.3 : Le son des bulles - Ulm PC	118
5.4 : Réflexion d'une onde sonore sur un fluide en déplacement - X PC	126
5.5 : Caléfaction 2 - Ulm PC	131
5.6 : Dérive des icebergs - Ulm PC	136
5.7 : Ondes de surface - X PC	140
5.8 : Sillage derrière un bateau - Ulm PC	145
5.9 : Instabilité de Rayleigh-Taylor - Ulm PC	148
5.10 : Convection thermique - X PC	150
6 Thermodynamique	157
6.1 : Étoile à neutrons et statique des fluides - X MP	157
6.2 : Échange entre deux réservoirs - X PC	160
6.3 : Un drôle de frigo... - Ulm PC	164
6.4 : Glaçon sur un plan incliné - Lyon/Cachan MP	167
6.5 : Entendre la température - Ulm PC	170
7 Électromagnétisme	176
7.1 : Piège de Penning - Lyon/Cachan MP	176
7.2 : Condensateur électrolytique - Lyon/Cachan PC	178
7.3 : Diode à vide - Ulm PC	181
7.4 : Sphère chargée dans l'air - X PC	185
7.5 : Potentiel moyen sur une sphère - X PC	187
7.6 : Magnétorésistance - Ulm MP	189
7.7 : Échanges avec le champ électromagnétique - Ulm MP	194
7.8 : Ondes gravitationnelles - Ulm PC/MP	201
7.9 : Ondes émises par un pulsar - X PC	205
8 Optique	208
8.1 : Arc-en-ciel - Lyon/Cachan MP	208
8.2 : Laser autour de la Terre - X PC	210
8.3 : Cavité optique - Ulm PC	212
9 Mécanique quantique	218
9.1 : Cristal périodique à une dimension - X MP	218
9.2 : Oscillateur harmonique - X MP	220
9.3 : Puits quantique variable - Ulm MP	226
Annexe - Résolution des équations différentielles courantes	233

Avant-propos

Cet ouvrage regroupe une sélection d'exercices de physique posés aux oraux des concours d'entrée des Écoles normales supérieures et de l'École polytechnique. Tous les exercices sélectionnés sont compatibles avec le changement de programme de 2013, et reflètent dans la mesure du possible la diversité des thèmes abordés durant ces oraux.

Les motivations qui nous ont amenés à rédiger cet ouvrage sont multiples :

- nous avons d'abord voulu démystifier le déroulement d'un oral aussi sélectif. Très souvent, la rumeur propage des sujets impossibles, souvent minimalistes, résumés en une phrase courte, devant un examinateur qui n'interagit que peu ou pas avec le candidat. Notre but est de montrer qu'un sujet d'oral est au contraire l'occasion d'une discussion réelle entre le candidat et l'examinateur, qui cherche avant tout à éprouver la robustesse des connaissances de celui-ci, mais également à tester son inventivité et sa capacité à réagir face à l'inconnu. Les situations proposées lors de ces oraux sont parfois éloignées de situations de cours « classiques », et l'examinateur attend alors du candidat qu'il fasse preuve de discernement. Savoir quand il doit trouver un chemin original, ou au contraire quand il peut mimer un raisonnement déjà vu. Par ailleurs, le candidat ne devra jamais perdre de vue que, bien que déstabilisants, les sujets ne sont jamais rigoureusement hors de portée : la physique nécessaire à leur résolution est bien celle attendue d'un élève sortant de Maths spé. Si des notions hors programmes doivent servir, elles seront amenées par l'examinateur.
- il y a ensuite la volonté de rendre ces oraux si spécifiques accessibles à tous. En effet, nous regrettons que trop d'élèves de CPGE ne puissent pas bénéficier d'annales accumulées par d'anciens membres de leur lycée. La démocratisation de l'accès à ces sujets nous semble indispensable à l'égalité des chances aux oraux de ces grandes écoles. En proposer des corrigés permet, selon nous, d'exhiber un certain nombre de techniques et de raisonnements, là encore souvent peu popularisés au sein de toutes les classes préparatoires.
- enfin, au-delà de la difficulté conceptuelle de ces exercices, nous pensons que la technicité qu'ils offrent peut permettre à un étudiant de synthétiser les connaissances et réflexes mathématiques qu'il est nécessaire d'acquérir face à un problème de physique. Ce qui fait la force d'un candidat face à un problème, au-delà des connaissances qu'il a pu acquérir, c'est également sa capacité à « tenter des choses » menant à la résolution. Séparer les variables d'espace et de temps, se placer dans un référentiel adapté, faire un bilan sur un sous-système plus simple, utiliser des théorèmes énergétiques... Ces techniques peuvent servir face à tout type de problème, et les exercices originaux présents dans cet ouvrage permettent de se rompre à leur utilisation.

On trouvera en première partie une discussion sur l'attitude et les réflexes à avoir lors de la résolution d'un problème original. Plus qu'un guide de conduite, ces quelques recommandations permettent d'embrasser la physique du problème sans nécessairement se jeter à corps perdu dans la modélisation et les calculs.

Les exercices ont été regroupés selon les grands domaines de la physique au programme des classes préparatoires. Pour certains, une telle catégorisation est illusoire, le lecteur averti s'en rendra bien compte. À chaque fois, à la suite de l'énoncé du problème, nous proposons une courte discussion introductive. Celle-ci est ensuite suivie d'une liste d'indications que le lecteur pourra choisir de suivre ou non, selon son degré de pugnacité face à l'exercice. Un corrigé suivant ces indications est ensuite proposé. Il va sans dire que l'originalité du déroulement des oraux des ENS et de l'X (une heure, sans préparation) incite à une discussion entre candidat et examinateur que notre corrigé ne saurait reproduire. Au maximum, nous avons essayé d'indiquer quand nous supposons qu'à tel ou tel moment, l'examinateur interviendrait pour une piste, une formule ou un conseil.

Enfin, nous donnons en annexe un « guide pratique » de résolution d'équations différentielles, qui permet parfois d'aller au-delà des formules données par le cours de mathématiques.

Les auteurs

Introduction : comment traiter un problème de physique ?

Si l'énoncé des problèmes d'oraux des grandes écoles s'est tempéré avec le temps, il n'en reste pas moins qu'un candidat n'est jamais à l'abri d'une tournure peu familière et trop déroutante.

Nous proposons ici quelques grandes lignes devant guider, sinon la résolution, en tout cas l'analyse du problème. Ces dix commandements devront se rappeler à l'esprit du candidat qui souhaite progresser raisonnablement sur l'approche de l'exercice à résoudre.

1. Ne pas paniquer.

C'est bien sûr la condition *sine qua non*. Bloquer à la simple pensée du « je n'y arriverai jamais » est contre-productive. Un problème de physique peut être plus ou moins complexe et demande à être morcelé. Quoi qu'il en soit, un dialogue même partiel doit s'engager avec l'examineur.

2. Ne pas se précipiter dans la résolution.

Il ne sert rien de se jeter à corps perdu dans les équations et les modèles sans avoir réfléchi. Dans cet ouvrage, nous proposons systématiquement après l'énoncé du problème un court paragraphe qui résume la question : « Que se passe-t-il ? ».

3. Raisonner en ordres de grandeurs.

C'est la qualité première du physicien. Lorsqu'on aborde une question de physique, il est bon d'avoir en tête les ordres de grandeur qu'on va manipuler, et ceux auxquels le résultat doit se conformer. Ainsi, comme à l'écrit, il faut toujours être critique vis-à-vis de ses résultats, et être conscient, par exemple, que trouver un diamètre de cheveu en kilomètres n'est pas acceptable.

4. Faire de l'analyse dimensionnelle.

Quand on sèche complètement sur un problème, l'idée la plus simple consiste à faire un peu d'analyse dimensionnelle. Si on demande par exemple de caractériser les ondes sonores se propageant dans un ballon de basket qui rebondit sur le sol, le problème général est très compliqué. Par contre, je peux aisément exhiber une longueur caractéristique $L \sim 10$ cm et utiliser la vitesse du son dans l'air $c \approx 340$ m/s pour obtenir une fréquence $f \approx 3,4$ kHz, donc un son assez aigu qui correspond à peu près à la réalité. Ce n'est qu'une étape, mais c'est déjà ça !

5. Faire des graphes, des schémas.

Après deux ans passés à faire de la physique, cela peut paraître aberrant de rappeler cette règle. Mais notre expérience des écrits de concours nous l'a confirmé : les candidats font encore trop peu usage de schémas et de dessins pour expliciter leur propos. Dans la majorité des

cas, cela résulte en des erreurs de signe, des confusions dans les notations, des problèmes de projection des vecteurs...

Les graphes permettent également de se représenter rapidement le comportement d'une fonction, ce qui permet de trancher sur la direction à prendre dans la suite de la résolution.

6. Rationnaliser la résolution.

On ne demande pas à un élève sortant de Maths spé d'utiliser des outils de fin de Licence ou d'entamer une résolution qui nécessiterait plusieurs heures ! Toujours penser que les exercices ont été conçus de manière à être résolus dans un temps raisonnable, avec les connaissances du programme. Donc, quand on modélise un phénomène, il faut se dire « est-il pensable que je traite cette situation avec ce que je connais/sans y prendre trois heures ? ». C'est à ce moment qu'intervient généralement l'analyse des symétries/invariances du problème, qu'on va la plupart du temps « forcer » pour simplifier la résolution : il est bien plus simple d'établir des équations différentielles quand les fonctions ne dépendent que d'une ou deux coordonnées !

7. Simplifier le modèle, mais pas trop.

C'est le pendant de la remarque précédente. S'il est tentant d'utiliser des hypothèses minimales pour obtenir une résolution relativement simple, on peut assez vite passer à côté de la physique du problème en le simplifiant trop. Par exemple, linéariser à outrance des équations peut faire passer à côté de la richesse de la physique non linéaire. Ou encore, négliger la tension de surface dans des problèmes impliquant des interfaces de fluides...

8. Se rapprocher de ce qui est connu.

On le verra dans cet ouvrage : souvent, il est possible de rapprocher un phénomène invoqué dans un problème d'une situation de cours connue. De ce point de vue, le candidat doit être irréprochable vis-à-vis de sa connaissance et de son exécution des connaissances qu'il a acquies pendant deux ans.

À l'inverse, il est important de ne pas chercher à tout prix à coller un exercice de cours sur une situation nouvelle. Les examinateurs de l'X et de l'ENS (avec lesquels nous avons discuté pendant la rédaction de cet ouvrage) se montrent très intéressés par la capacité des candidats à se rendre compte qu'un raisonnement est nouveau, et à construire eux-mêmes une démarche scientifique de résolution.

9. Refuser la technicité au prix de la physique.

Le but d'un oral de physique n'est pas le calcul d'une intégrale particulièrement compliquée, ni de redémontrer la formule du rotationnel en coordonnées sphériques. Si l'examen d'un point du modèle amène à des développements mathématiques sans fin, c'est probablement qu'on a pris une mauvaise direction.

10. Rester fidèle à la base.

Ce n'est pas parce qu'on passe un oral d'Ulm qu'on ne définit par les référentiels en mécanique, ni parce qu'on est à l'oral de l'X qu'on n'indique pas les systèmes étudiés en thermodynamique. La rigueur acquise dans le cours de Physique doit se retrouver dans votre analyse du problème. L'intérêt est double : gagner la confiance de l'examinateur, qui sait qu'il a affaire à un candidat sérieux ; et en posant clairement les bases d'une résolution de problème, on s'assure de ne pas tomber dans des pièges évidents par la suite (on pensera notamment aux forces qu'on peut facilement éliminer en définissant judicieusement les systèmes en mécanique).

Mécanique du point

Exercice 1.1 : Le pendule dans tous ses états - X PC

On considère un pendule simple, c'est-à-dire une masse m accrochée au bout d'un fil de longueur l et de masse négligeable.

1. Redémontrer rapidement l'équation du mouvement dans le cas d'oscillations autour du point d'accroche.
2. On fait à présent tourner le pendule autour de l'axe vertical avec un angle constant. Discuter de la relation entre la vitesse de rotation et l'angle que fait le pendule avec l'axe.
3. On considère finalement la composition des deux mouvements, c'est-à-dire que le pendule tourne autour de l'axe vertical en oscillant. Trouver deux constantes du mouvement, une énergie potentielle effective, une équation adimensionnée du mouvement, et finalement les positions accessibles.
4. (Complément) Que se passe-t-il autour de la position d'équilibre déterminée en 2? Montrer en particulier que le pendule précesse autour de son axe de rotation.

Cet exercice propose l'étude du pendule, système bien connu en CPGE. Nous allons voir qu'en autorisant un nouveau degré de liberté, une dynamique riche apparaît. Afin de fixer les notations, nous considérons un axe vertical z descendant. Le pendule est fixé à un point O , et on se place dans un système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) .

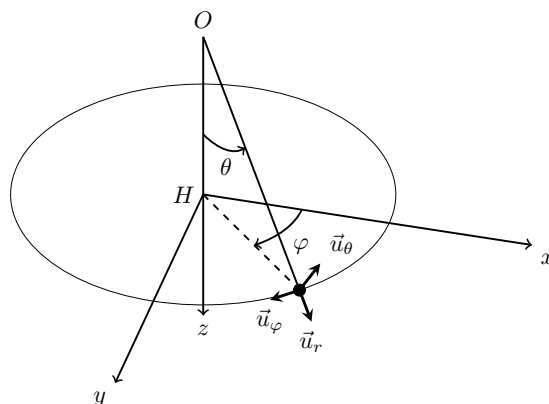


FIGURE 1.1. Pendule tournant. Les angles sont orientés de telle sorte que le repère $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ soit direct.

1. Commençons par le cas du pendule simple, c'est-à-dire que l'on considère φ constant. Une méthode particulièrement efficace pour retrouver l'équation du pendule est d'utiliser un raisonnement énergétique. Les forces qui s'appliquent à la masse sont la tension de

la corde $\vec{T} = T\vec{u}_r$ et le poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_z$. La force de tension étant toujours perpendiculaire au mouvement, elle ne travaille pas. L'énergie potentielle de pesanteur s'écrit $E_p = -mgl \cos \theta + \text{cste}$. L'énergie cinétique vaut $E_c = \frac{1}{2}mgl^2\dot{\theta}^2$, et on en déduit l'énergie mécanique

$$E_m = \frac{1}{2}mgl^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta. \quad (1)$$

Si l'on dérive cette relation par rapport au temps et que l'on simplifie par $\dot{\theta}$, on obtient l'équation du mouvement

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0, \quad (2)$$

où $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

2. Considérons à présent la situation où θ est une constante θ_0 , mais où le pendule tourne autour de son axe avec une vitesse angulaire Ω constante. On parle alors de pendule cylindrique. Notre but ici est de relier Ω et θ_0 . Le plus simple est de se placer dans le référentiel tournant à la vitesse angulaire $\Omega\vec{u}_z$. Aux forces précédentes vient s'ajouter la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie} = m\Omega^2\overrightarrow{HM}$, où H est le projeté du point M sur l'axe z . La force de Coriolis est nulle car il n'y a pas de mouvement relatif dans le référentiel tournant. La condition d'équilibre dans ce référentiel s'écrit

$$\vec{0} = m\vec{g} + \vec{T} + m\Omega^2\overrightarrow{HM}, \quad (3)$$

et en projection selon \vec{u}_{θ} , on obtient

$$mg \sin \theta_0 = m\Omega^2 HM \cos \theta_0 = m\Omega^2 l \sin \theta_0 \cos \theta_0. \quad (4)$$

Ainsi on trouve les positions d'équilibre $\theta_0 = 0$ ou $\theta_0 = \pi$, qui correspondent au cas $\sin \theta_0 = 0$, et θ_0 tel que

$$\cos \theta_0 = \frac{g}{l\Omega^2}. \quad (5)$$

Cette solution n'est possible que si $\Omega \geq \Omega_c = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Le lecteur intéressé pourra prouver, avec les équations du mouvement détaillées plus loin, que la position $\theta_0 = 0$ est stable pour $\Omega < \Omega_c$, tandis que la position $\theta_0 = \pi$ est toujours instable. Ensuite, pour $\Omega \geq \Omega_c$, la position $\theta_0 = 0$ devient instable, tandis que les positions déterminées par (5) deviennent stables. Physiquement, cela signifie qu'en dessous de cette vitesse angulaire critique, le pendule va rester parfaitement vertical, puis il va se mettre à tourner avec un angle $\theta_0 = \pm \arccos(\frac{g}{\Omega^2 l})$. Parmi les deux positions stables possibles a priori, le système va en choisir une en particulier, on parle alors de brisure spontanée de symétrie. La situation est représentée dans la figure 1.2 suivante. On note finalement que θ_0 tend vers $\pi/2$ quand $\Omega \gg \Omega_c$, ce qui est conforme à l'intuition.

3. Considérons maintenant la situation où les deux mouvements sont présents en même temps, c'est-à-dire que le pendule tourne autour de son axe tout en oscillant. On appelle cette situation le pendule sphérique car tout se passe comme pour le mouvement d'une particule, astreinte à se déplacer sur une sphère de rayon l dans le champ de gravité terrestre. Vu ces conditions, l'usage des coordonnées sphériques semble donc particulièrement justifié. De plus, il serait tentant de se placer dans le « référentiel tournant » comme précédemment. Toutefois, la vitesse angulaire de rotation autour de l'axe ne peut plus être considérée comme constante, et le calcul des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis est possible mais particulièrement lourd. Ainsi, nous nous plaçons dans le référentiel terrestre, supposé galiléen.

L'usage des coordonnées sphériques, aussi justifié soit il dans ce cas, rend l'écriture de l'accélération de la masse, et donc du principe fondamental de la dynamique fastidieuse. Comme indiqué dans l'énoncé, c'est plutôt vers les quantités conservées que nous allons nous tourner. Les forces en présence sont les mêmes que pour le pendule simple, la tension du fil $\vec{T} = T\vec{u}_r$ et le poids $\vec{P} = mg\vec{u}_z$. Ainsi, comme précédemment, l'énergie mécanique est conservée. L'énergie potentielle de pesanteur est toujours $E_p = -mgl \cos \theta$. Reste à exprimer

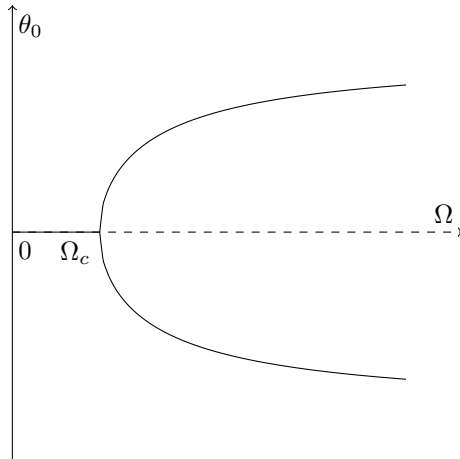


FIGURE 1.2. Ensemble des positions accessibles stables pour le pendule. Pour $\Omega \geq \Omega_c$, deux positions équivalentes sont possibles.

l'énergie cinétique. Une méthode rapide pour retrouver l'expression de la vitesse en sphérique est d'écrire l'expression générale d'un déplacement infinitésimal

$$d\overrightarrow{OM} = dr\overrightarrow{u}_r + r d\theta\overrightarrow{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi\overrightarrow{u}_\varphi, \quad (6)$$

ainsi, le vecteur vitesse s'exprime $\vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{u}_r + r\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta + r \sin \theta \dot{\varphi}\overrightarrow{u}_\varphi$. Dans la situation étudiée, la vitesse est $\vec{v} = l\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta + l \sin \theta \dot{\varphi}\overrightarrow{u}_\varphi$ et l'énergie cinétique s'exprime $E_c = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2)$. La conservation de l'énergie mécanique s'écrit donc

$$E_m = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - mgl \cos \theta. \quad (7)$$

Concernant la deuxième quantité conservée, il semble naturel de s'intéresser au moment cinétique par rapport au point O . Ce dernier s'exprime

$$\vec{\mathcal{M}}_O = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} = m \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ l\dot{\theta} \\ l \sin \theta \dot{\varphi} \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 0 \\ -l^2 \sin \theta \dot{\varphi} \\ l^2 \dot{\theta} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Le moment de la force \vec{T} est nul car cette dernière est dirigée selon \overrightarrow{OM} . En revanche, le moment du poids va avoir une composante non nulle selon $\overrightarrow{u}_\varphi$. Ainsi, d'après le théorème du moment cinétique, on sait que la composante selon $\overrightarrow{u}_\theta$ de $\vec{\mathcal{M}}_O$ est conservée, ce qui donne $l^2 \sin \theta \dot{\varphi} = \text{cst.}$ Afin d'obtenir une équation scalaire, on peut projeter cette quantité sur \overrightarrow{u}_z , et on obtient alors la conservation du moment cinétique selon z , que l'on note \mathcal{M}_z , sous la forme

$$ml^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} = \mathcal{M}_z. \quad (9)$$

Avec ces deux quantités conservées, on peut obtenir une équation du mouvement. Commençons par dériver par rapport au temps la conservation de l'énergie mécanique, on obtient

$$ml^2(\ddot{\theta}\dot{\theta} + \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 + \sin^2 \theta \ddot{\varphi} \dot{\varphi}) + mgl \sin \theta \dot{\theta} = 0. \quad (10)$$

Habituellement, les $\dot{\theta}$ se simplifient et on peut obtenir l'équation du mouvement directement. Ici, nous allons dans un premier temps devoir éliminer $\dot{\varphi}$. Pour cela, multiplions l'équation (9)