Topologie générale et espaces normés

2e édition

Nawfal El Hage Hassan

Topologie générale et espaces normés

2e édition

DUNOD

Illustration de couverture : Alexander Lukin - Fotolia.com

11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-078069-3

Pour mon fils Ali

Table des matières

INTRODUCTION

Ce livre est le fruit de plusieurs années d'enseignement à l'Université d'Orléans, mais je suis très redevable envers les livres cités dans la bibliographie. Il est destiné aux étudiants préparant une Licence ou un Master de Mathématiques. En outre, il sera utile aux étudiants préparant l'Agrégation ainsi qu'aux futurs chercheurs.

Le livre est organisé en deux grandes parties. La première partie est consacrée à la Topologie générale qui est utilisée abondamment en plusieurs branches de Mathématiques. Pratiquement, la Topologie générale intervient partout en Analyse. Pour comprendre cette partie, le lecteur n'a pas besoin de connaissance préalable. La deuxième partie concerne les espaces normés. Pour aborder cette partie, on suppose que l'étudiant a un certain rudiment d'algèbre linéaire.

Pour éviter de faire un livre très volumineux, je devais faire un choix de ne pas traiter certains sujets. En fait, j'aurais souhaité inclure un chapitre sur la Topologie algébrique, un domaine que j'aime beaucoup. J'ai aussi omis un chapitre sur les espaces L^p qui forment une classe d'espaces de Banach très importante. J'aurais aimé également ajouter un chapitre détaillé des différentes classes d'opérateurs sur les espaces de Hilbert.

Cette deuxième édition regorge de 614 exercices, avec leurs solutions, regroupés dans le dernier paragraphe de chaque chapitre. Ces exercices sont de difficulté variable et aideront d'abord l'étudiant à se familiariser avec les différentes notions présentées dans ce livre. En outre, ils inciteront le lecteur à réfléchir et ne sont pas de simples applications de recettes, et respectent l'équilibre nécessaire entre connaissances et savoir-faire, permettant à l'étudiant de construire des images mentales allant bien au-delà de simples connaissances mémorisées. Les solutions des exercices ont été volontairement très détaillées pour permettre à l'étudiant de bien les assimiler.

Cette nouvelle édition, réalisée à l'initiative de Laetitia Herin, responsable d'édition sciences aux éditions Dunod, a été soigneusement revue et corrigée. L'augmentation du nombre de pages a permis, en outre, de rajouter les démonstrations omises lors de la première édition (2011), cinq paragraphes, ainsi que des exercices corrigés supplémentaires. Également, pour rappeler le lecteur certaines notions que j'ai utilisées dans mon livre, j'ai rajouté deux appendices un sur la théorie des ensembles et un autre sur le corps des nombres réels.

Je dois beaucoup aux lecteurs de la première édition, qui y ont relevé de nombreuses

coquilles et erreurs. En particulier, je remercie vivement Jean-Claude Cid de Perpignan pour son aide précieuse et le temps qu'il y a consacré et la qualité de ses remarques pertinentes et constructives, et il a permis d'améliorer le texte par ses commentaires.

Malgré tout le soin apporté à cet ouvrage, il est inévitable que quelques erreurs subsistent. Je prie le lecteur, qui pourra me les signaler pour correction lors d'un nouveau tirage, de m'en excuser d'avance.

Je tiens à remercier le Laboratoire MAPMO et le département de Mathématiques de l'Université d'Orléans de m'avoir permis de rédiger ce livre en toute quiétude. Un grand merci à mon collègue et ami Noureddine El Jaouhari de m'avoir toujours aidé à résoudre les problèmes que je rencontrais en Latex. Je remercie également le Professeur Georges Skandalis pour ses sincères conseils.

Pour terminer, j'accueillerai avec plaisir et gratitude toutes remarques et suggestions envoyées à l'adresse électronique suivante : nawfal.elhage-hassan@univ-orleans.fr

Chapitre 1

ESPACES TOPOLOGIQUES

La topologie, ou « étude des lieux » est la formalisation mathématique de notions géométriques intuitives comme proximité, éloignement, voisinage, position limite d'un point mobile, etc., dans l'espace euclidien de dimension 2 ou 3. Cette formalisation s'exprime dans un langage axiomatique très général. La généralité du langage introduit a un avantage, celui de s'appliquer à des situations très variées, par exemple à l'étude des « espaces fonctionnels ». L'inconvénient est que l'on perd un certain nombre de propriétés intuitivement évidentes dans les cas concrets d'où l'on était parti ; par exemple la possibilité de « séparer » deux points par des voisinages disjoints. En fait, dans bien des cas, on sera amené à restreindre la généralité par des axiomes supplémentaires de manière à se rapprocher de l'intuition initiale ; étude des espaces séparés, des espaces métriques, etc. On rappelle que si X est un ensemble, on note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X.

1.1 Espaces topologiques

Définition 1.1.1. Une **topologie** sur un ensemble X est la donnée d'un ensemble $\mathcal{T}$ de parties de X, *i.e.* $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$, vérifiant les propriétés suivantes, appelées **axiomes des ouverts**.

(**O1**) $\emptyset,\ X \in \mathcal{T}$.

(**O2**) Si $U, V \in \mathcal{T}$, alors $U \cap V \in \mathcal{T}$.

(**O3**) Si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille de parties de X appartenant à $\mathcal{T}$, alors $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$.

L'ensemble X, muni de la topologie $\mathcal{T}$, est appelé **espace topologique**. On notera quelquefois $(X, \mathcal{T})$ un tel espace. Les parties de X qui appartiennent à $\mathcal{T}$ sont dites **parties ouvertes** ou **ouverts** de X. Les éléments de X sont généralement appelés **points**.

Les propriétés (**O1**), (**O2**) et (**O3**) peuvent être reformulées de la manière suivante :

- La partie vide $\emptyset$ et l'ensemble X sont des ouverts.
- L'intersection de deux ouverts est un ouvert.
- La réunion de toute famille d'ouverts est un ouvert.

Définition 1.1.2. Soit A un sous-ensemble d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$. On dit que A est un **fermé** ou une **partie fermée** de X si le complémentaire de A dans X est ouvert. Autrement dit, si l'on a $X \setminus A \in \mathcal{T}$.

Construction d'une topologie à partir des axiomes des fermés. La famille $\mathcal{F}$ des fermés d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ vérifie les propriétés suivantes, appelées **axiomes des fermés**.

(**F1**) $\emptyset, X \in \mathcal{F}$, *i.e.* la partie vide $\emptyset$ et l'ensemble X sont des fermés.

(**F2**) Si $A, B \in \mathcal{F}$, alors $A \cup B \in \mathcal{F}$, *i.e.* la réunion de deux fermés est un fermé.

(**F3**) Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de parties de X appartenant à $\mathcal{F}$, alors $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{F}$, *i.e.* l'intersection de toute famille de fermés est un fermé.

Réciproquement, on peut définir une topologie à partir des ensembles fermés. De façon plus précise, si X est un ensemble et si $\mathcal{F}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(X)$ vérifiant (**F1**), (**F2**) et (**F3**), alors $\mathcal{T} = \big\{X \setminus A \;;\; A \in \mathcal{F}\big\}$ est une topologie sur X dont l'ensemble des fermés est $\mathcal{F}$.

Exemple 1.1.1.
1. Soit X un ensemble. Alors $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$ est une topologie sur X, appelée **topologie discrète**. Un ensemble muni de la topologie discrète est dit **espace discret**. Dans un tel espace toute partie est à fois ouverte et fermée.
   À l'autre extrême, $\mathcal{T}_g = \big\{\emptyset\,,\, X\big\}$ est une topologie sur X, appelée **topologie grossière** ou **triviale**. Le seul intérêt de ces deux topologies est de donner des contre-exemples et montrer que certains phénomènes pathologiques peuvent arriver en topologie.
2. Soit $X = \{x, y\}$ un ensemble à deux éléments. Alors les topologies sur X sont
   $$\mathcal{T}_1 = \big\{\emptyset, X\big\}\,,\; \mathcal{T}_2 = \big\{\emptyset, \{x\}, X\big\}\,,\; \mathcal{T}_3 = \big\{\emptyset, \{y\}, X\big\}\,,\; \mathcal{T}_4 = \big\{\emptyset, \{x\}, \{y\}, X\big\}.$$
3. Soit $X = \{x, y, z\}$ un ensemble à trois éléments. Alors $\mathcal{T} = \big\{\emptyset, \{x\}, X\big\}$ est une topologie sur X. Par contre, $\big\{\emptyset, \{x\}, \{y\}, X\big\}$ n'est pas une topologie sur X.
4. Soit X un ensemble, alors $\mathcal{T}_{cf} = \big\{\emptyset\big\} \cup \big\{U \subset X \;;\; X \setminus U \text{ est fini}\big\}$ est une topologie sur X, appelée **topologie cofinie**. Si l'ensemble X est fini, alors la topologie cofinie coïncide avec la topologie discrète. Si l'ensemble X est infini, alors deux ouverts quelconques non vides dans $(X, \mathcal{T}_{cf})$ ont une intersection non vide.
5. Soit A un sous-ensemble non vide d'un ensemble X. On pose :
   $$\mathcal{T}_A = \big\{U \subset X \;;\; A \subset U\big\} \cup \big\{\emptyset\big\}.$$
   Alors $\mathcal{T}_A$ est une topologie sur X dont les parties fermées sont X et les sous-ensembles de $X \setminus A$.

Définition 1.1.3. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. On dit que $\mathcal{B}$ est une **base d'ouverts** de X ou **base de la topologie** $\mathcal{T}$ si tout ouvert non vide de X est réunion d'ouverts appartenant à $\mathcal{B}$.

Tout espace topologique $(X, \mathcal{T})$ possède au moins une base d'ouverts, à savoir $\mathcal{T}$ elle-même. La notion de base d'ouverts n'est bien sûr intéressante que lorsque $\mathcal{B}$ est plus petit que $\mathcal{T}$. Comme on le verra, dans de nombreux cas, il est en effet possible de se limiter à des raisonnements sur les éléments d'une base au lieu de manipuler la totalité des ouverts. Notons aussi qu'en général il n'y a pas unicité de la base d'ouverts.

Exemple 1.1.2. Si X est un espace discret, alors $\mathcal{B} = \big\{\{x\} \; ; \; x \in X\big\}$ est une base d'ouverts de X.

Proposition 1.1.1. *Soient* $(X, \mathcal{T})$ *un espace topologique et* $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) $\mathcal{B}$ *est une base d'ouverts de* X.

(ii) Pour tout $U \in \mathcal{T}$ *et tout* $x \in U$, *il existe* $B \in \mathcal{B}$ *tel que* $x \in B \subset U$.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soient U un ouvert de X et $x \in U$. Puisque $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de X, alors il existe une famille $(B_j)_{j \in J}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ telle que $U = \bigcup\limits_{j \in J} B_j$. Par conséquent, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subset U$.

Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soit U un ouvert non vide de X. Par hypothèse, pour tout $x \in U$, il existe $B_x \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_x \subset U$. Donc on a $U = \bigcup\limits_{x \in U} \{x\} \subset \bigcup\limits_{x \in U} B_x \subset U$, d'où $U = \bigcup\limits_{x \in U} B_x$, avec $B_x \in \mathcal{B}$ pour tout $x \in U$. Donc $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de X. ■

Construction d'une topologie à partir d'une base d'ouverts. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{B}$ une base d'ouverts de X. Alors $\mathcal{B}$ possède les deux propriétés suivantes.

(**B1**) Pour tout $x \in X$, il existe $U \in \mathcal{B}$ tel que $x \in U$.

(**B2**) Pour tout $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ et tout $x \in U_1 \cap U_2$, il existe $U \in \mathcal{B}$ tel que $x \in U \subset U_1 \cap U_2$.

Réciproquement, si X est un ensemble et si $\mathcal{B}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(X)$ vérifiant (**B1**) et (**B2**), alors il existe une unique topologie $\mathcal{T}$ sur X pour laquelle $\mathcal{B}$ est une base. En effet, il suffit de prendre

$$\mathcal{T} = \big\{\emptyset\big\} \cup \big\{U \subset X \; ; \; U \text{ soit réunion d'ensembles appartenant à } \mathcal{B}\big\}.$$

Autrement dit, un sous-ensemble U de X est un ouvert pour $\mathcal{T}$ si et seulement si pour tout $x \in U$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subset U$.

Exemple 1.1.3.

1. **Topologie de l'ordre**. Soit $(X, \leq)$ un ensemble totalement ordonné, et soit $\mathcal{B}$ la partie de $\mathcal{P}(X)$ constituée des intervalles ouverts, des demi-droites ouvertes et de X, voir Appendice A. Alors $\mathcal{B}$ vérifie les propriétés (**B1**) et (**B2**). Par conséquent, il existe une unique topologie $\mathcal{T}$ sur X pour laquelle $\mathcal{B}$ est une base. La topologie $\mathcal{T}$ est appelée la **topologie de l'ordre**. Un sous-ensemble U de X est un ouvert pour $\mathcal{T}$ si et seulement si pour tout $x \in U$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subset U$.
2. **La droite réelle**. Le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ muni de la relation d'ordre usuelle est totalement ordonné. La topologique de l'ordre sur $\mathbb{R}$ est appelée la **topologie euclidienne** ou **usuelle** de $\mathbb{R}$. Le corps $\mathbb{R}$ muni de cette topologie est appelé la **droite réelle**. Dans la suite, sauf la mention de contraire, $\mathbb{R}$ sera muni de sa topologie usuelle. Notons que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$, les ensembles $]-\infty, a[$, $]a, b[$ et $]b, +\infty[$ sont, par définition, des ouverts de $\mathbb{R}$, d'où $]-\infty, a]$, $[a, b]$ et $[b, +\infty[$ sont des fermés de $\mathbb{R}$. Notons aussi qu'un sous-ensemble U de $\mathbb{R}$ est un ouvert si pour tout $x \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset U$. Autrement dit, les intervalles ouverts $]a, b[$ forment aussi une base d'ouverts pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.

3. **La droite réelle achevée**. Soit $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ l'ensemble qui est la réunion de $\mathbb{R}$ et de deux nouveaux éléments distincts notés $-\infty$ et $+\infty$ et appelés points à l'infini. On prolonge à $\overline{\mathbb{R}}$ la relation d'ordre usuelle de $\mathbb{R}$ en convenant que tout $x \in \mathbb{R}$ vérifie $-\infty < x < +\infty$. Alors $\overline{\mathbb{R}}$ muni de cette relation d'ordre est totalement ordonné et la topologie de l'ordre sur $\overline{\mathbb{R}}$ est appelée la **topologie usuelle** de $\overline{\mathbb{R}}$, et $\overline{\mathbb{R}}$ muni de cette topologie est appelé la **droite réelle achevée**. Une partie U de $\overline{\mathbb{R}}$ est ouverte si

   i) pour tout $x \in U \cap \mathbb{R}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset U$;

   ii) lorsque $-\infty \in U$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $[-\infty, \alpha[\subset U$;

   iii) lorsque $+\infty \in U$, il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $]\beta, +\infty] \subset U$.

   Notons que pour tout $a \in \mathbb{R}$, les ensembles $[-\infty, a[$ et $]a, +\infty]$ sont des ouverts de $\overline{\mathbb{R}}$ et que $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$ [†].

Définition 1.1.4. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $x \in X$. On dit qu'une partie V de X est un **voisinage** de x s'il existe un ouvert U de X tel que $x \in U \subset V$. Plus généralement, soit A une partie de X, on appelle **voisinage** de A toute partie V de X telle qu'il existe un ouvert U de X vérifiant $A \subset U \subset V$.

Exemple 1.1.4. 1. Si $\mathbb{R}$ est muni de la topologie usuelle, un sous-ensemble V de $\mathbb{R}$ est un voisinage d'un point $x \in \mathbb{R}$ si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset V$. Par exemple, $\left]x - \frac{1}{2}, x + 1\right] \cup \{5\}$ est un voisinage de x.

2. Si $\overline{\mathbb{R}}$ est muni de la topologie usuelle, un sous-ensemble V de $\overline{\mathbb{R}}$ est un voisinage du point $-\infty$ s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $[-\infty, \alpha[\subset V$. De même, un sous-ensemble W de $\overline{\mathbb{R}}$ est un voisinage du point $+\infty$ s'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $]\beta, +\infty] \subset W$.

Proposition 1.1.2. *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, $\mathcal{B}$ une base d'ouverts de X et A un sous-ensemble de X. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) A est un ouvert de X.

(ii) Pour tout $x \in A$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subset A$.

(iii) Pour tout $x \in A$, il existe un ouvert U de X tel que $x \in U \subset A$. Autrement dit, A est voisinage de chacun de ses points.

En particulier, pour connaître la topologie de X, il suffit de connaître les voisinages de tous les points de X.

Démonstration. L'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) résulte de la proposition 1.1.1. L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (iii) est triviale.
Preuve de (iii) $\Longrightarrow$ (i). Par hypothèse, pour tout $x \in A$, il existe un ouvert U_x de X tel que $x \in U_x \subset A$. Donc on a $A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} U_x \subset A$, d'où $A = \bigcup_{x \in U} U_x$. C'est une réunion d'ouverts de X. Donc A est un ouvert de X. ■

Construction d'une topologie à partir des axiomes des voisinages. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $x \in X$. On note $\mathcal{V}(x)$ la famille des voisinages de x. Les familles $\mathcal{V}(x)$ de parties de X, $x \in X$, vérifient les propriétés suivantes, appelées **axiomes des voisinages**.

---

†. On revient sur ces deux exemples $\mathbb{R}$ et $\overline{\mathbb{R}}$ au chapitre 2.

($\mathbf{V1}$) Pour tout $x \in X$, $\mathcal{V}(x) \neq \emptyset$ et pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, on a $x \in V$.

($\mathbf{V2}$) Toute partie de X qui contient un élément de $\mathcal{V}(x)$ appartient à $\mathcal{V}(x)$.

($\mathbf{V3}$) L'intersection de deux éléments de $\mathcal{V}(x)$ est élément de $\mathcal{V}(x)$.

($\mathbf{V4}$) Pour tout $x \in X$ et tout $V \in \mathcal{V}(x)$, il existe $W \in \mathcal{V}(x)$ tel que pour tout $y \in W$, on ait $V \in \mathcal{V}(y)$.

Notez que dans ($\mathbf{V4}$), il suffit de prendre pour W un ouvert contenant x et contenu dans V.
Réciproquement, soit X un ensemble quelconque et supposons donnée pour tout $x \in X$, une famille $\mathcal{V}(x)$ de parties de X vérifiant les propriétés ($\mathbf{V1}$), ($\mathbf{V2}$), ($\mathbf{V3}$) et ($\mathbf{V4}$), alors il existe une unique topologie $\mathcal{T}$ sur X telle que pour tout $x \in X$, $\mathcal{V}(x)$ soit la famille des voisinages de x. En effet, il suffit de prendre

$$\mathcal{T} = \big\{\emptyset\big\} \cup \big\{U \subset X \ ; \ U \in \mathcal{V}(x) \text{ pour tout } x \in U\big\}.$$

Définition 1.1.5. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $x \in X$. On appelle **système fondamental de voisinages** de x ou **base de voisinages** de x, toute famille $\mathcal{B}(x)$ de voisinages de x telle que pour tout voisinage V de x, il existe $W \in \mathcal{B}(x)$ tel que $W \subset V$.

Notez que si $\mathcal{V}(x)$ est la famille des voisinages de x et $\mathcal{B}(x)$ est une base de voisinages de x, alors on a $\mathcal{V}(x) = \big\{V \subset X \ ; \text{ il existe } W \in \mathcal{B}(x) \text{ avec } W \subset V\big\}$. Autrement dit, $\mathcal{V}(x)$ est l'ensemble des parties de X contenant un élément de $\mathcal{B}(x)$. Ainsi, on obtient $\mathcal{V}(x)$ à partir de $\mathcal{B}(x)$. Comme pour les bases d'ouverts de X, le rôle des systèmes fondamentaux de voisinages est de simplifier les démonstrations.

Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $x \in X$. Alors $\mathcal{V}(x)$, la famille des voisinages de x, est une base de voisinages de x. L'ensemble des ouverts de X contenant x est une base de voisinages de x. Autrement dit, tout point d'un espace topologique admet une base de voisinages formée d'ensembles ouverts. Notons aussi que si $\mathcal{B}(x)$ et $\mathcal{B}'(x)$ sont des parties de $\mathcal{V}(x)$ telles que $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{B}'(x)$ et si $\mathcal{B}(x)$ est une base de voisinages de x, alors $\mathcal{B}'(x)$ est également une base de voisinages de x.

Exemple 1.1.5. 1. Dans un espace discret, l'ensemble $\{x\}$ constitue à lui seul un système fondamental de voisinages de x.

2. Si $\mathbb{R}$ est muni de la topologie usuelle et $x \in \mathbb{R}$, l'ensemble des intervalles de la forme $]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, est une base de voisinages du point x formée d'ensembles ouverts. Également, l'ensemble des intervalles de la forme $[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}]$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, est une base de voisinages du point x formée d'ensembles fermés.
3. Si $\overline{\mathbb{R}}$ est muni de la topologie usuelle, l'ensemble des demi-droites de la forme $[-\infty, -n[$, avec $n \in \mathbb{N}$, est une base de voisinages du point $-\infty$ formée d'ensembles ouverts. De même, l'ensemble des demi-droites de la forme $]n, +\infty]$, avec $n \in \mathbb{N}$, est une base de voisinages du point $+\infty$ formée d'ensembles ouverts.
4. Soit A un sous-ensemble non vide d'un ensemble X. Alors $\mathcal{T}_A = \big\{U \subset X \ ; \ A \subset U\big\} \cup \big\{\emptyset\big\}$ est une topologie sur X. De plus, on a :
   (a) Tout point $x \in A$ possède une base de voisinages formée d'un seul ouvert, à savoir A.
   (b) Tout point $x \in X \setminus A$ possède une base de voisinages formée d'un seul ouvert, à savoir $A \cup \{x\}$.

Proposition 1.1.3. *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de X.

(ii) Pour tout $x \in X$, la famille $\{U \in \mathcal{B} \,;\, x \in U\}$ est une base de voisinages de x.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soient $x \in X$ et V un voisinage de x dans X, alors il existe un ouvert W de X tel que $x \in W \subset V$. Comme $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de X, alors il existe une famille $(U_j)_{j\in J}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ telle que $W = \bigcup\limits_{j\in J} U_j$. Par conséquent, il existe $U_j \in \mathcal{B}$ tel que $x \in U_j \subset V$, donc la famille $\{U \in \mathcal{B} \,;\, x \in U\}$ est une base de voisinages de x.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soit U un ouvert non vide de X. Puisque U est voisinage de chacun de ses points, alors pour tout $x \in U$, il existe $U_x \in \mathcal{B}$ tel que $x \in U_x \subset U$. Par conséquent, on a $U = \bigcup\limits_{x\in U} U_x$, donc $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de X. ■

Construction d'une topologie à partir des systèmes fondamentaux de voisinages ouverts. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et pour tout $x \in X$, soit $\mathcal{B}(x)$ une base de voisinages de x formée d'ensembles ouverts. Les familles $\mathcal{B}(x)$ de parties de X, $x \in X$, vérifient les propriétés suivantes, appelées **axiomes de Hausdorff**.

(**H1**) Pour tout $x \in X$, $\mathcal{B}(x) \neq \emptyset$ et pour tout $U \in \mathcal{B}(x)$, on a $x \in U$.

(**H2**) Pour tout $x \in X$ et pour tout $U_1, U_2 \in \mathcal{B}(x)$, il existe $U_3 \in \mathcal{B}(x)$ tel que $U_3 \subset U_1 \cap U_2$.

(**H3**) Pour tout $U \in \mathcal{B}(x)$ et pour tout $y \in U$, il existe $W \in \mathcal{B}(y)$ tel que $W \subset U$.

Réciproquement, soit X un ensemble quelconque et supposons donnée pour tout $x \in X$, une famille $\mathcal{B}(x)$ de parties de X vérifiant les propriétés (**H1**), (**H2**) et (**H3**), alors il existe une unique topologie $\mathcal{T}$ sur X telle que pour tout $x \in X$, $\mathcal{B}(x)$ soit une base de voisinages de x formée d'ensembles ouverts. En effet, soit $\mathcal{B} = \bigcup\limits_{x\in X} \mathcal{B}(x)$, alors $\mathcal{B}$ vérifie les propriétés (**B1**) et (**B2**), voir page 3. Par conséquent, il existe une unique topologie $\mathcal{T}$ sur X pour laquelle $\mathcal{B}$ est une base. En appliquant la proposition précédente et l'axiome (**H3**), on en déduit que pour tout $x \in X$, $\mathcal{B}(x)$ est une base de voisinages de x formée d'ensembles ouverts.

1.2 Intérieur, adhérence, frontière d'une partie

Définition 1.2.1. Soient X un espace topologique, $x \in X$ et $A \subset X$.

1. On dit que x est intérieur à A lorsque A est un voisinage de x. L'ensemble des points intérieurs à A s'appelle **l'intérieur** de A et se note $\overset{\circ}{A}$.
2. On dit que x est adhérent à A lorsque tout voisinage de x rencontre A. L'ensemble des points adhérents à A s'appelle **l'adhérence** de A et se note $\overline{A}$.
3. On dit que x est un point frontière de A, s'il est à la fois adhérent à A et à $X \setminus A$. L'ensemble des points frontières de A s'appelle **la frontière** de A et se note $\mathrm{Fr}(A)$. Autrement dit, on a $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.

4. On dit que x est un **point d'accumulation** de A si tout voisinage de x dans X contient un point de A distinct de x lui-même (x n'est pas forcément dans A). L'ensemble des points d'accumulation de A s'appelle **ensemble dérivée** de A et se note A'.
5. On dit qu'un point $a \in A$ est un **point isolé** dans A s'il existe un voisinage V de a dans X tel que $V \cap A = \{a\}$.

Remarque 1.2.1. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, $x \in X$ et $A \subset X$. Alors on a :

1. $\overset{\circ}{A} \subset A$ et $A \subset \overline{A}$.
2. $x \in \overset{\circ}{A} \iff$ il existe un ouvert U de X tel que $x \in U \subset A$.
3. $x \in \overline{A} \iff$ pour tout voisinage V de x dans X, on a $V \cap A \neq \emptyset$.
4. $x \in \mathrm{Fr}(A) \iff$ pour tout voisinage V de x dans X, on a $V \cap A \neq \emptyset$ et $V \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$.
5. $x \in A' \iff$ pour tout voisinage V de x dans X, on a $(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Donc on a $\overline{A} \setminus A \subset A' \subset \overline{A}$ et $\overline{A} = A \cup A'$. Notons aussi que comme on a $V \cap (A \setminus \{x\}) = (V \setminus \{x\}) \cap A$, alors $x \in A' \iff x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.
6. Un point x de X est un point isolé dans X si et seulement si le singleton $\{x\}$ est un ouvert de X.
7. Si $\mathcal{T}$ est la topologie discrète, alors $A' = \emptyset$. Donc en général $A \not\subset A'$.

Remarque 1.2.2. Soient X un espace topologique, $A \subset X$, $x \in X$ et $\mathcal{B}_x$ une base de voisinages de x. Alors on a :

1. $x \in \overset{\circ}{A}$ si et seulement s'il existe $V \in \mathcal{B}_x$ tel que $V \subset A$.
2. $x \in \overline{A}$ si et seulement si pour tout $V \in \mathcal{B}_x$, on a $V \cap A \neq \emptyset$.

Proposition 1.2.1. *Soient A et B des sous-ensembles d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$.*

1. *Si $A \subset B$, alors on a $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$.*
2. *$\overset{\circ}{A}$ est un ouvert de X et si U est un ouvert de X tel que $U \subset A$, alors on a $U \subset \overset{\circ}{A}$. Donc l'intérieur de A est le plus grand ouvert de X contenu dans A. Autrement dit, $\overset{\circ}{A}$ est la réunion des ouverts de X contenus dans A.*
3. *$\overline{A}$ est un fermé de X et si F est un fermé de X tel que $A \subset F$, alors on a $\overline{A} \subset F$. Donc l'adhérence de A est le plus petit fermé de X contenant A. Autrement dit, $\overline{A}$ est l'intersection des fermés de X contenant A.*
4. *A est ouvert si et seulement si $A = \overset{\circ}{A}$.*
5. *A est fermé si et seulement si $A = \overline{A}$.*

Démonstration. 1. Soit $x \in \overset{\circ}{A}$, alors il existe un ouvert U de X tel que $x \in U \subset A$, d'où on a $x \in U \subset B$, et par conséquent $x \in \overset{\circ}{B}$, donc on a $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.
Soit $x \in \overline{A}$, alors pour tout voisinage V de x dans X, on a $V \cap A \neq \emptyset$. Or on a $V \cap A \subset V \cap B$, donc $V \cap B \neq \emptyset$, et par conséquent $x \in \overline{B}$, d'où $\overline{A} \subset \overline{B}$.
2. Pour montrer que $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert de X, il suffit de montrer que $\overset{\circ}{A}$ est réunion d'une

famille d'ouverts de X. Soit $x \in \overset{\circ}{A}$, alors il existe un ouvert U_x de X tel que $x \in U_x \subset A$. Pour tout $y \in U_x$, U_x est un voisinage de y dans X et on a $y \in U_x \subset A$, donc $y \in \overset{\circ}{A}$, et par conséquent $U_x \subset \overset{\circ}{A}$. Ainsi, $\overset{\circ}{A}$ est voisinage de chacun de ses points. On déduit de la proposition 1.1.2 que $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert de X. Soit U un ouvert de X tel que $U \subset A$. Soit $x \in U$, alors on a $x \in U \subset A$ et U est un ouvert de X, donc $x \in \overset{\circ}{A}$ et par conséquent $U \subset \overset{\circ}{A}$.
3. Pour montrer que $\overline{A}$ est un fermé de X, on montre que $X \setminus \overline{A}$ est un ouvert de X. Soit $x \in X \setminus \overline{A}$, alors il existe un ouvert V_x de X tel que $x \in V_x$ et $V_x \cap A = \emptyset$. Pour tout $y \in V_x$, V_x est un voisinage de y dans X et on a $V_x \cap A = \emptyset$, d'où $y \notin \overline{A}$. Donc on a $V_x \cap \overline{A} = \emptyset$ et par conséquent $V_x \subset X \setminus \overline{A}$. Ainsi, $X \setminus \overline{A}$ est voisinage de chacun de ses points, donc $X \setminus \overline{A}$ est un ouvert de X. Par conséquent $\overline{A}$ est un fermé de X. Soit F un fermé de X tel que $A \subset F$. Pour montrer que $\overline{A} \subset F$, il suffit de montrer que l'on a $X \setminus F \subset X \setminus \overline{A}$. Soit $x \in X \setminus F$. Puisque $X \setminus F$ est un ouvert de X, alors $X \setminus F$ est un voisinage de x dans X. Or on a $(X \setminus F) \cap A = \emptyset$, d'où $x \notin \overline{A}$. Donc on a $x \in X \setminus \overline{A}$. Par conséquent, on a $X \setminus F \subset X \setminus \overline{A}$.
4. Si $A = \overset{\circ}{A}$, alors d'après 2, A est un ouvert de X. Réciproquement, on suppose que A est un ouvert de X. Alors il résulte du 2 que l'on a $A \subset \overset{\circ}{A}$. Or on a toujours $\overset{\circ}{A} \subset A$, donc on a $A = \overset{\circ}{A}$.
5. Si $A = \overline{A}$, alors d'après 3, A est un fermé de X. Réciproquement, on suppose que A est un fermé de X, alors d'après 3, on a $\overline{A} \subset A$. Or on toujours $A \subset \overline{A}$, donc on a $A = \overline{A}$. ■

Remarque 1.2.3. Soient X un espace topologique, $A \subset X$ et U un ouvert de X. Si $A \cap U = \emptyset$, alors $\overline{A} \cap U = \emptyset$. En effet, on a $A \cap U = \emptyset$, d'où $A \subset X \setminus U$. Or $X \setminus U$ est fermé dans X, il résulte de la proposition précédente que l'on a $\overline{A} \subset X \setminus U$. Donc on a $\overline{A} \cap U = \emptyset$.

Proposition 1.2.2. *Soit A un sous-ensemble d'un espace topologique X. Alors on a :*

$$\overset{\circ}{\overbrace{X \setminus A}} = X \setminus \overline{A} \quad et \quad \overline{X \setminus A} = X \setminus \overset{\circ}{A}.$$

Démonstration. On a $A \subset \overline{A}$, d'où $X \setminus \overline{A} \subset X \setminus A$. Comme $X \setminus \overline{A}$ est un ouvert de X, d'après la proposition précédente, on a $X \setminus \overline{A} \subset \overset{\circ}{\overbrace{X \setminus A}}$. Réciproquement, soit $x \in \overset{\circ}{\overbrace{X \setminus A}}$, alors il existe un ouvert V de X tel que $x \in V$ et $V \subset X \setminus A$, d'où $V \cap A = \emptyset$. Donc $x \notin \overline{A}$. Autrement dit, on a $x \in X \setminus \overline{A}$. Donc on a $\overset{\circ}{\overbrace{X \setminus A}} \subset X \setminus \overline{A}$. Par conséquent, on a $X \setminus \overline{A} = \overset{\circ}{\overbrace{X \setminus A}}$.

D'après ce qui précède, on a $X \setminus \overline{X \setminus A} = \overset{\circ}{\overbrace{X \setminus (X \setminus A)}} = \overset{\circ}{A}$, d'où $X \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{X \setminus A}$. ■

Définition 1.2.2. Soit X un espace topologique. Une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de X est dite **localement finie** si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V de x dans X tel que $A_i \cap V = \emptyset$ pour tout $i \in I$, sauf peut-être pour un nombre fini d'indices $i \in I$.

Proposition 1.2.3. *Soient X un espace topologique et $(A_i)_{i\in I}$ une famille localement finie de parties de X.*

1. *La famille $(\overline{A_i})_{i\in I}$ est aussi localement finie.*
2. *On a $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$. Par conséquent, la réunion d'une famille localement finie de parties fermées de X est fermée dans X.*

Démonstration. 1. Soit $x \in X$, il existe un voisinage ouvert V de x dans X et un sous-ensemble fini J de I tel que $V \cap A_i = \emptyset$ pour tout $i \in I \setminus J$. Comme V est un ouvert, on en déduit que pour tout $i \in I \setminus J$, on a $V \cap \overline{A_i} = \emptyset$. Donc la famille $(\overline{A_i})_{i\in I}$ est localement finie.
2. Pour tout $j \in I$, on a $\overline{A_j} \subset \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$, d'où $\bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \subset \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$. Inversement, soit $x \in X$ tel que $x \notin \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$. Soient V un voisinage de x dans X et J un sous-ensemble fini de I tel que $V \cap A_i = \emptyset$ pour tout $i \in I \setminus J$. Pour tout $j \in J$, il existe un voisinage V_j de x dans X tel que $V_j \cap A_j = \emptyset$. Soit $W = \bigcap_{j\in J} V \cap V_j$, alors W est un voisinage de x dans X et on a $W \cap \bigcup_{i\in I} A_i = \emptyset$, donc $x \notin \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$. Par conséquent, on a $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} \subset \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$, d'où $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$. ■

Définition 1.2.3. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subset X$.

1. On dit que A est **dense** dans X ou **partout dense** si $\overline{A} = X$.
2. On dit que X est **séparable** s'il existe une partie au plus dénombrable A de X dense dans X.

Exemple 1.2.1. L'espace $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle est séparable. En effet, les sous-ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$, voir Appendice B. Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, alors $\mathbb{R}$ est séparable.

Remarque 1.2.4. Soient X un espace topologique et $A \subset X$. On déduit de la proposition 1.2.2 que l'on a :

1. A est dense dans $X \iff \overbrace{X \setminus A}^{\circ} = \emptyset$.
2. $\mathring{A} = \emptyset \iff X \setminus A$ est dense dans X.

Proposition 1.2.4. *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, $\mathcal{B}$ une base d'ouverts de X et A un sous-ensemble de X. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) A est dense dans X.

(ii) Pour tout ouvert non vide U de X, on a $A \cap U \neq \emptyset$.

(iii) Pour tout $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \neq \emptyset$, on a $A \cap B \neq \emptyset$.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Supposons A dense dans X, *i.e.* $\overline{A} = X$. Alors pour tout $x \in X$ et tout voisinage V de x dans X, on a $A \cap V \neq \emptyset$. Soit U un ouvert non vide de X. Comme U est voisinage de chacun de ses points, on en déduit que $A \cap U \neq \emptyset$.
L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (iii) est triviale.

Preuve de (iii) $\Longrightarrow$ (i). Supposons que pour tout $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \neq \emptyset$, on a $A \cap B \neq \emptyset$. Si $\overline{A} \neq X$, alors $X \setminus \overline{A}$ est un ouvert non vide de X et on a $\big(X \setminus \overline{A}\big) \cap A = \emptyset$. Donc il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \neq \emptyset$, $B \subset X \setminus \overline{A}$ et $A \cap B = \emptyset$, ce qui contredit l'hypothèse, donc on a $\overline{A} = X$. ■

Proposition 1.2.5. *Soit X un espace topologique séparable. Alors toute famille d'ouverts non vides deux à deux disjoints de X est au plus dénombrable.*

Démonstration. Soient $D = \{x_n \ ; \ n \geq 0\}$ une partie au plus dénombrable et dense dans X et $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts non vides deux à deux disjoints de X. D'après la proposition précédente, pour tout $i \in I$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in U_i$. Soit $n_i = \inf \big\{n \in \mathbb{N} \ ; \ x_n \in U_i\big\}$, alors $i \longmapsto n_i$ est une application injective de I dans $\mathbb{N}$, donc I est au plus dénombrable. ■

Définition 1.2.4. Soit X espace topologique.

1. On dit que X vérifie **le premier axiome de dénombrabilité** si tout point $x \in X$ admet un système fondamental au plus dénombrable de voisinages.
2. On dit que X vérifie **le second axiome de dénombrabilité** si la topologie de X admet une base au plus dénombrable d'ouverts.

Tout espace topologique vérifiant le second axiome de dénombrabilité vérifie aussi le premier axiome de dénombrabilité, voir proposition 1.1.3. La réciproque est en général fausse ; il suffit de considérer un ensemble X infini non dénombrable et muni de la topologie discrète.

Exemple 1.2.2. L'espace $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle admet une base dénombrable d'ouverts. En effet, soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des intervalles ouverts d'extrémités rationnelles, *i.e.* $\mathcal{B} = \big\{]a, b[\ ; \ a, b \in \mathbb{Q} \text{ et } a < b\big\}$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dénombrable, alors $\mathcal{B}$ l'est aussi. Pour montrer que $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de $\mathbb{R}$, d'après la proposition 1.1.3, il suffit de montrer que tout point de $\mathbb{R}$ a une base de voisinages constituée par de tels intervalles. Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, pour tout $n \geq 1$, il existe $p_n, q_n \in \mathbb{Q}$ tels que $x - \frac{1}{n} < p_n < x < q_n < x + \frac{1}{n}$. Alors la famille des intervalles $]p_n, q_n[$ forme une base de voisinages de x.
De même l'espace $\overline{\mathbb{R}}$ muni de la topologie usuelle admet une base dénombrable d'ouverts. En effet, la réunion de $\mathcal{B}$ et des ensembles $\big\{[-\infty, -n[\ ; \ n \in \mathbb{N}\big\}$ et $\big\{]n, +\infty] \ ; \ n \in \mathbb{N}\big\}$ est une base d'ouverts dénombrable de $\overline{\mathbb{R}}$.

Théorème 1.2.1. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique admettant une base au plus dénombrable d'ouverts. Alors X est séparable.*

Démonstration. Soit $\mathcal{B} = \big\{U_n \ ; \ n \geq 0\big\}$ une base au plus dénombrable d'ouverts de X. On peut supposer que pour tout $n \geq 0$, $U_n \neq \emptyset$, et soit $x_n \in U_n$. Montrons que l'ensemble $A = \{x_n \ ; \ n \geq 0\}$ est dense dans X. Soit U un ouvert non vide de X. Puisque $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de X, alors il existe un sous-ensemble non vide J de $\mathbb{N}$ tel que $U = \bigcup\limits_{n \in J} U_n$. Par conséquent, on a $\{x_n \ ; \ n \in J\} \subset U$, donc $A \cap U \neq \emptyset$. Il résulte de la proposition 1.2.4 que A est dense dans X. Donc X est séparable. ■

Remarque 1.2.5. La réciproque du théorème précédent est en général fausse, voir exemple ci-dessous ou exercice 1.18. Mais elle est vraie si par exemple l'espace X est « métrique », voir théorème 2.2.2.

Exemple 1.2.3. Soient X un ensemble infini non dénombrable et $a \in X$. On pose $\mathcal{T} = \{U \subset X \; ; \; a \in U\} \cup \{\emptyset\}$. Alors $\mathcal{T}$ est une topologie sur X, voir exemples 1.1.1 et 1.1.5. L'ensemble $\{a\}$ est dense dans X, donc X est séparable. Supposons que X admet une base dénombrable d'ouverts. Et soit $(U_n)_{n\geq 0}$ une telle base. Comme pour tout $x \in X$, l'ensemble $\{a, x\}$ est un ouvert de X et que tout ouvert de X contenant x contient a, alors pour tout $x \in X$, il existe $n \geq 0$ tel que $U_n = \{a, x\}$. Soit $n_x = \inf\{n \geq 0 \; ; \; U_n = \{a, x\}\}$. Alors l'application $x \longmapsto n_x$ est injective de X dans $\mathbb{N}$. Ce qui est impossible car X est infini non dénombrable. Donc X n'admet pas une base dénombrable d'ouverts.

1.3 Applications continues

Définition 1.3.1. Soient X, Y deux espaces topologiques, $x_0 \in X$ et $f : X \longrightarrow Y$ une application. On dit que f est **continue en** x_0 si elle vérifie l'une des deux conditions équivalentes suivantes :

(i) Pour tout voisinage W de $f(x_0)$ dans Y, $f^{-1}(W)$ est un voisinage de x_0 dans X.

(ii) Pour tout voisinage W de $f(x_0)$ dans Y, il existe un voisinage V de x_0 dans X tel que $f(V) \subset W$.

On peut énoncer cette définition sous la forme plus imagée suivante : dire que f est continue en x_0 signifie que $f(x)$ est aussi voisin qu'on veut de $f(x_0)$ dès que x est assez voisin de x_0.

Essayons de traduire la définition de la continuité d'une application en un point dans le cas où $X = Y = \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Alors f est continue en x_0 si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $|x - x_0| < \eta$, on ait $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Définition 1.3.2. Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application.

1. On dit que f est **continue** ou **continue sur** X si elle est continue en tout point de X.
2. On dit que f est un **homéomorphisme de** X **sur** Y si elle est bijective et si f et f^{-1} sont continues.
3. On dit que les espaces topologiques X et Y sont **homéomorphes** s'il existe un homéomorphisme de X sur Y.

Les propriétés d'un espace topologique qui se conservent par homéomorphisme sont appelées **propriétés topologiques**.

Exemple 1.3.1. Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques, on a :

1. L'application identique suivante est continue.

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{id}_X : & (X, \mathcal{T}) & \longrightarrow & (X, \mathcal{T}) \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

2. Toute application constante de $(X, \mathcal{T})$ dans $(Y, \mathcal{T}')$ est continue.

3. Si $\mathcal{T} = \mathcal{T}_g$ est la topologie grossière sur X et si Y est séparé, voir définition 1.5.1, alors pour qu'une application f de X dans Y soit continue il faut et il suffit que f soit constante.
4. Si $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$ est la topologie discrète sur X, alors toute application de X dans Y est continue.
5. Si $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_g$ est la topologie grossière sur Y, alors toute application de X dans Y est continue.

Remarque 1.3.1. Une application continue bijective n'est pas nécessairement un homéomorphisme.
Premier exemple. Si $X = Y = \mathbb{R}$ et si $\mathcal{T}_1 = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ la topologie discrète de $\mathbb{R}$ et si $\mathcal{T}_2$ est la topologie usuelle de $\mathbb{R}$, alors l'application identique $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_1) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_2)$ est continue bijective, mais n'est pas un homéomorphisme.
Deuxième exemple. Si X est un ensemble contenant au moins deux points, $\mathcal{T}_d$ la topologie discrète sur X et $\mathcal{T}_g$ la topologie grossière sur X. Alors l'application identique $\mathrm{id} : (X, \mathcal{T}_d) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_g)$ est bijective continue, mais elle n'est pas un homéomorphisme.

Proposition 1.3.1. *Soient X, Y et Z des espaces topologiques, $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ des applications.*

1. *Si f est continue en un point $x \in X$ et si g est continue en $f(x)$, alors $g \circ f$ est continue en x.*
2. *Si f et g sont continues, leur composée $g \circ f$ est continue.*

Démonstration. 1. Soit W un voisinage de $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ dans Z. On a $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$. Puisque g est continue en $f(x)$, alors $g^{-1}(W)$ est un voisinage de $f(x)$ dans Y et par conséquent $f^{-1}(g^{-1}(W))$ est un voisinage de x dans X car f est continue en x. Donc $(g \circ f)^{-1}(W)$ est un voisinage de x dans X, d'où la continuité de $g \circ f$ en x.
2. Ceci résulte de 1. ■

Proposition 1.3.2. *Soient f et g deux applications continues d'un espace topologique X dans $\mathbb{R}$, alors on a :*

1. *L'application $f + g : x \longmapsto f(x) + g(x)$ est continue de X dans $\mathbb{R}$.*
2. *L'application $fg : x \longmapsto f(x)g(x)$ est continue de X dans $\mathbb{R}$.*
3. *Si g ne s'annule pas, l'application $\dfrac{f}{g} : x \longmapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est continue de X dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. 1. Soit $x_0 \in X$. Montrons que $f + g$ est continue en x_0. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en x_0, alors il existe un voisinage V_1 de x_0 dans X tel que pour tout $x \in V_1$, on ait $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. De même, comme g est continue en x_0, alors il existe un voisinage V_2 de x_0 dans X tel que pour tout $x \in V_2$, on ait $|g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $V = V_1 \cap V_2$, alors V est un voisinage de x_0 dans X et pour tout $x \in V$, on a :

$$|f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Donc $f + g$ est continue en x_0. Par conséquent, $f + g$ est continue.
2. Soit $x_0 \in X$. Montrons que fg est continue en x_0. Soit $\varepsilon > 0$. Soit

$$\eta = \inf\left(1, \frac{\varepsilon}{|g(x_0)| + 1 + |f(x_0)|}\right).$$

Alors $\eta > 0$ et on a $\eta\big(|g(x_0)|+\eta\big)+|f(x_0)|\eta \le \varepsilon$. Comme f et g sont continues en x_0, alors il existe un voisinage V de x_0 dans X tel que pour tout $x \in V$, on ait $|f(x) - f(x_0)| < \eta$ et $|g(x) - g(x_0)| < \eta$. Donc pour tout $x \in V$, on a

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)| &= |f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)| \\
&\le |f(x) - f(x_0)|\,|g(x)| + |f(x_0)|\,|g(x) - g(x_0)| \\
&\le |f(x) - f(x_0)|\,\big(|g(x_0)| + \eta\big) + |f(x_0)|\,|g(x) - g(x_0)| \\
&< \eta\big(|g(x_0)| + \eta\big) + |f(x_0)|\eta \le \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Donc fg est continue en x_0. Par conséquent, fg est continue.

3. D'après 2, il suffit de montrer que l'application $\dfrac{1}{g} : x \longmapsto \dfrac{1}{g(x)}$ est continue de X dans $\mathbb{R}$. Soient $x_0 \in X$ et $\varepsilon > 0$. Soit $\eta = \inf\left(\dfrac{\varepsilon\,|g(x_0)|^2}{2}, \dfrac{|g(x_0)|}{2}\right)$, alors $\eta > 0$. Comme g est continue en x_0, alors il existe un voisinage V de x_0 dans X tel que pour tout $x \in V$, on ait $|g(x) - g(x_0)| < \eta$. Alors pour tout $x \in V$, on a $\dfrac{|g(x_0)|}{2} < |g(x)|$ et

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\right| = \frac{|g(x) - g(x_0)|}{|g(x)|\,|g(x_0)|} \le \frac{2|g(x) - g(x_0)|}{|g(x_0)|^2} < \frac{2\eta}{|g(x_0)|^2} \le \varepsilon\,.$$

Donc l'application $\dfrac{1}{g}$ est continue en x_0. Par conséquent, $\dfrac{1}{g}$ est continue. ■

Théorème 1.3.1. *Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) f est continue.

(ii) Pour tout ouvert U de Y, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X.

(iii) Si $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de Y, alors pour tout $U \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X.

(iv) Pour toute partie B de Y, on a $f^{-1}\big(\overset{\circ}{B}\big) \subset \overbrace{f^{-1}(B)}^{\circ}$.

(v) Pour tout fermé F de Y, $f^{-1}(F)$ est un fermé de X.

(vi) Pour toute partie A de X, on a $f\big(\overline{A}\big) \subset \overline{f(A)}$.

(vii) Pour toute partie B de Y, on a $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}\big(\overline{B}\big)$.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit U un ouvert de Y. Pour tout $x \in f^{-1}(U)$, U est un voisinage de $f(x)$ dans Y, donc $f^{-1}(U)$ est un voisinage de x dans X car f est continue en x. Par conséquent, $f^{-1}(U)$ est voisinage de chacun de ses points. Il résulte de la proposition 1.1.2 que $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X.

Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soient $x \in X$ et W un voisinage de $f(x)$ dans Y. Alors il existe un ouvert U de Y tel que $f(x) \in U \subset W$, d'où on a $x \in f^{-1}(U) \subset f^{-1}(W)$ et $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X, donc $f^{-1}(W)$ est un voisinage de x dans X. Donc f est continue en x. Par conséquent, f est continue.

L'équivalence (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) résulte du fait que pour toute famille $(U_j)_{j\in J}$ de parties de

Y, on a $f^{-1}\big(\bigcup_{j\in J} U_j\big) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(U_j)$.

Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (iv). Soit B une partie de Y. Comme $\overset{\circ}{B}$ est un ouvert de Y, alors $f^{-1}\big(\overset{\circ}{B}\big)$ est un ouvert de X et on a $f^{-1}\big(\overset{\circ}{B}\big) \subset f^{-1}(B)$, d'où $f^{-1}\big(\overset{\circ}{B}\big) \subset \overbrace{f^{-1}(B)}^{\circ}$, voir proposition 1.2.1.

Preuve de (iv) $\Longrightarrow$ (ii). Soit U un ouvert de Y, alors on a $U = \overset{\circ}{U}$, d'où $f^{-1}(U) = f^{-1}\big(\overset{\circ}{U}\big) \subset \overbrace{f^{-1}(U)}^{\circ}$. Donc on a $f^{-1}(U) = \overbrace{f^{-1}(U)}^{\circ}$. Il résulte de la proposition 1.2.1 que $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X.

L'équivalence (ii) $\Longleftrightarrow$ (v) résulte du fait que pour toute partie U de Y, on a $f^{-1}(X\setminus U) = X \setminus f^{-1}(U)$.

Preuve de (v) $\Longrightarrow$ (vi). Soit A une partie de X, alors $f^{-1}\big(\overline{f(A)}\big)$ est un fermé de X contenant A, d'où on a $\overline{A} \subset f^{-1}\big(\overline{f(A)}\big)$. Par conséquent, on a $f\big(\overline{A}\big) \subset f\big(f^{-1}\big(\overline{f(A)}\big)\big) \subset \overline{f(A)}$.

Preuve de (vi) $\Longrightarrow$ (vii). Soit B une partie de Y. On pose $A = f^{-1}(B)$, alors on a $f\big(\overline{f^{-1}(B)}\big) = f\big(\overline{A}\big) \subset \overline{f(A)} = \overline{f\big(f^{-1}(B)\big)} \subset \overline{B}$, d'où $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}\big(\overline{B}\big)$.

Preuve de (vii) $\Longrightarrow$ (v). Soit F un fermé de Y, alors on a $F = \overline{F}$, d'où $\overline{f^{-1}(F)} \subset f^{-1}\big(\overline{F}\big) = f^{-1}(F) \subset \overline{f^{-1}(F)}$. Par conséquent, on a $\overline{f^{-1}(F)} = f^{-1}(F)$, donc $f^{-1}(F)$ est un fermé de X. ■

Exemple 1.3.2. Soit A un sous-ensemble d'un espace topologique X. On note par χ_A ou $\mathbf{1}_A$ la **fonction indicatrice** ou **fonction caractéristique** de A. Autrement dit, $\mathbf{1}_A$ est une fonction de X dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A\,, \\ 0 & \text{si} \quad x \notin A\,. \end{cases}$$

Pour tout sous-ensemble U de $\mathbb{R}$, on a :

$$\mathbf{1}_A{}^{-1}(U) = \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad \{0,1\} \cap U = \emptyset\,, \\ A & \text{si} \quad 1 \in U \text{ et } 0 \notin U\,, \\ X \setminus A & \text{si} \quad 0 \in U \text{ et } 1 \notin U\,, \\ X & \text{si} \quad \{0,1\} \subset U\,. \end{cases}$$

Par conséquent, la fonction $\mathbf{1}_A : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue si et seulement si A est à la fois ouvert et fermé dans X.

Remarque 1.3.2. Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. L'image $f(V)$ d'un ouvert (*resp.* d'un fermé) de X n'est pas nécessairement ouverte (*resp.* fermée) dans Y, même lorsque f est continue. En effet, si $X = \mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, $Y = \mathbb{R}$ muni de la topologie grossière et si $f(x) = x^2$, alors f est continue de X dans Y et $f(X) = [0, +\infty[$ n'est ni ouvert ni fermé dans Y.

Définition 1.3.3. Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application.

1. On dit que f est **ouverte** si l'image par f de tout ouvert de X est ouverte dans Y.
2. On dit que f est **fermée** si l'image par f de tout fermé de X est fermée dans Y.

Proposition 1.3.3. *Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) f est une application ouverte.

(ii) Pour toute partie A de X, on a $f\big(\overset{\circ}{A}\big) \subset \overset{\circ}{\overbrace{f(A)}}$.

(iii) Si $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de X, alors pour tout $U \in \mathcal{B}$, $f(U)$ est un ouvert de Y.

(iv) Pour tout $x \in X$ et tout voisinage V de x dans X, $f(V)$ est un voisinage de $f(x)$ dans Y.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit A une partie de X, alors $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert de X et donc $f\big(\overset{\circ}{A}\big)$ est un ouvert de Y contenu dans $f(A)$, d'où $f\big(\overset{\circ}{A}\big) \subset \overset{\circ}{\overbrace{f(A)}}$, voir proposition 1.2.1.

Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soit U un ouvert de X, on a $U = \overset{\circ}{U}$, d'où $f(U) = f\big(\overset{\circ}{U}\big) \subset \overset{\circ}{\overbrace{f(U)}}$. Donc on a $f(U) = \overset{\circ}{\overbrace{f(U)}}$. Par conséquent, $f(U)$ est un ouvert de Y.
L'équivalence (i) $\Longleftrightarrow$ (iii) résulte du fait que pour toute famille $(U_j)_{j\in J}$ de parties de X, on a $f\big(\bigcup_{j\in J} U_j\big) = \bigcup_{j\in J} f(U_j)$.
Preuve de (i) $\Longrightarrow$ (iv). Soient $x \in X$ et V un voisinage de x dans X, alors il existe un ouvert U de X tel que $x \in U \subset V$, d'où $f(U)$ est un ouvert de Y et on a $f(x) \in f(U) \subset f(V)$. Donc $f(V)$ est un voisinage de $f(x)$ dans Y.
Preuve de (iv) $\Longrightarrow$ (i). Soit U un ouvert de X. Alors pour tout $x \in U$, U est un voisinage de x dans X, donc $f(U)$ est un voisinage de $f(x)$ dans Y. Par conséquent, $f(U)$ est voisinage de chacun de ses points. Il résulte de la proposition 1.1.2 que $f(U)$ est un ouvert de Y. ■

Proposition 1.3.4. *Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) f est une application ouverte.

(ii) Pour tout sous-ensemble B de Y et pour tout fermé F dans X tel que $f^{-1}(B) \subset F$, il existe un fermé D dans Y tel que $B \subset D$ et $f^{-1}(D) \subset F$.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soient B un sous-ensemble de Y et F un fermé de X tel que $f^{-1}(B) \subset F$. Comme f est une application ouverte, alors $f(X \setminus F)$ est un ouvert de Y et on a $B \cap f(X \setminus F) = \emptyset$. Soit $D = Y \setminus f(X \setminus F)$, alors D est un fermé de Y tel que $B \subset D$ et $f^{-1}(D) \subset F$.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soient U un ouvert de X et $A = f(U)$. Alors $X \setminus U$ est un fermé de X et on a $f^{-1}(Y \setminus A) \subset X \setminus U$. Donc il existe un fermé D de Y tel que $Y \setminus A \subset D$ et $f^{-1}(D) \subset X \setminus U$. On en déduit que l'on a $D = Y \setminus A$, donc A est un ouvert de Y. Par conséquent, f est une application ouverte. ■

Proposition 1.3.5. *Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) f est fermée.

(ii) Pour toute partie A de X, on a $\overline{f(A)} \subset f\big(\overline{A}\big)$.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit A une partie de X, alors $f(\overline{A})$ est un fermé de Y et on a $f(A) \subset f(\overline{A})$, d'où $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soit F un fermé de X, alors on a $\overline{F} = F$, d'où $\overline{f(F)} \subset f(\overline{F}) = f(F)$. Donc on a $f(F) = \overline{f(F)}$. Par conséquent, $f(F)$ est un fermé de Y, voir proposition 1.2.1. ■

Corollaire 1.3.1. *Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue et fermée. Alors pour toute partie A de X, on a $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$.*

Démonstration. Ceci résulte de la proposition précédente et du théorème 1.3.1. ■

Proposition 1.3.6. *Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *f est une application fermée.*

(ii) *Pour tout sous-ensemble B de Y et pour tout ouvert U dans X tel que $f^{-1}(B) \subset U$, il existe un ouvert V dans Y tel que $B \subset V$ et $f^{-1}(V) \subset U$.*

(iii) *Pour tout point $y \in Y$ et pour tout ouvert U dans X tel que $f^{-1}(\{y\}) \subset U$, il existe un voisinage V de y dans Y tel que $f^{-1}(V) \subset U$.*

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soient B un sous-ensemble de Y et U un ouvert de X tels que $f^{-1}(B) \subset U$. Soit $F = X \setminus U$, alors F est fermé dans X et on a $f(F) \cap B = \emptyset$. Comme f est une application fermée, alors $f(F)$ est un fermé de Y. Donc $V = Y \setminus f(F)$ est un ouvert de Y contenant B et on a $f^{-1}(V) = X \setminus f^{-1}(f(F)) \subset X \setminus F = U$.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soient F un fermé de X et $A = f(F)$. Alors $X \setminus F$ est un ouvert de X et on a $f^{-1}(Y \setminus A) \subset X \setminus F$. Donc il existe un ouvert V de Y tel que $Y \setminus A \subset V$ et $f^{-1}(V) \subset X \setminus F$. Par conséquent, on a $V = Y \setminus A$, d'où A est un fermé de Y. Donc f est une application fermée.
L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (iii) est triviale.
Preuve de (iii) $\Longrightarrow$ (ii). Supposons que pour tout point $y \in Y$ et pour tout ouvert U dans X tel que $f^{-1}(\{y\}) \subset U$, il existe un voisinage V de y dans Y tel que $f^{-1}(V) \subset U$. Soient B un sous-ensemble de Y et U un ouvert dans X tels que $f^{-1}(B) \subset U$. Pour tout $y \in B$, il existe un voisinage ouvert V_y de y dans Y tel que $f^{-1}(V_y) \subset U$. Soit $V = \bigcup_{y \in B} V_y$, alors V est un ouvert de Y tel que $B \subset V$ et $f^{-1}(V) = \bigcup_{y \in B} f^{-1}(V_y) \subset U$. ■

Remarque 1.3.3. Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application bijective. Alors on a :

1. f est ouverte si et seulement si f est fermée.
2. f est continue si et seulement si f^{-1} est ouverte si et seulement si f^{-1} est fermée.

On déduit de ce qui précède le théorème suivant :

Théorème 1.3.2. *Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application bijective. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *f est un homéomorphisme.*

(ii) *f est continue et ouverte.*

(iii) f *est continue et fermée.*

(iv) f *et* f^{-1} *sont ouvertes.*

(v) f *et* f^{-1} *sont fermées.*

(vi) Pour toute partie A *de* X*, on a* $f\big(\overline{A}\big) = \overline{f(A)}$.

1.4 Quelques constructions topologiques

Dans la pratique, pour définir une topologie sur un ensemble X, on ne se donne pas toujours directement l'ensemble $\mathcal{T}$ des ouverts. On aura souvent à construire une topologie satisfaisant à certaines conditions. On donne dans ce paragraphe un certain nombre de constructions topologiques classiques.

I. Comparaison de topologies

Définition 1.4.1. Soient $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux topologies sur un ensemble X. On dit que la topologie $\mathcal{T}_1$ est **moins fine** que la topologie $\mathcal{T}_2$, ou que la topologie $\mathcal{T}_2$ est **plus fine** que la topologie $\mathcal{T}_1$, si l'on a l'inclusion $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ dans l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de X. Autrement dit, la topologie $\mathcal{T}_2$ est plus fine que la topologie $\mathcal{T}_1$ si tout ouvert de X pour $\mathcal{T}_1$ est un ouvert de X pour $\mathcal{T}_2$. Deux topologies dont l'une est plus fine que l'autre sont dites **comparables**.

Ainsi, la topologie discrète est la plus fine, et la topologie grossière est la moins fine, de toutes les topologies sur X.

Remarque 1.4.1. Soient $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux topologies sur un ensemble X. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. La topologie $\mathcal{T}_1$ est moins fine que la topologie $\mathcal{T}_2$.
2. Tout ouvert de X pour $\mathcal{T}_1$ est un ouvert de X pour $\mathcal{T}_2$.
3. Tout fermé de X pour $\mathcal{T}_1$ est un fermé de X pour $\mathcal{T}_2$.
4. L'application identique de X muni de la topologie $\mathcal{T}_2$ dans X muni de la topologie $\mathcal{T}_1$ est continue.
5. L'application identique de X muni de la topologie $\mathcal{T}_1$ dans X muni de la topologie $\mathcal{T}_2$ est ouverte.
6. Pour tout $x \in X$, tout voisinage de x pour $\mathcal{T}_1$ est un voisinage de x pour $\mathcal{T}_2$.
7. Pour toute partie A de X, l'intérieur de A pour $\mathcal{T}_1$ est contenu dans l'intérieur de A pour $\mathcal{T}_2$.
8. Pour toute partie A de X, l'adhérence de A pour $\mathcal{T}_1$ contient l'adhérence de A pour $\mathcal{T}_2$.

Notons enfin que si $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont deux topologies sur un ensemble X et si l'on a $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ et $\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}_2$, alors l'application identique $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}_1) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_2)$ est une application bijective ouverte et non continue.

II. Topologie initiale

Soient X un ensemble, $(Y_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques et pour chaque $i \in I$, soit $f_i : X \longrightarrow Y_i$ une application. La topologie discrète sur X rend continues toutes les applications f_i, mais on cherche ici à construire la topologie la moins fine sur X rendant continues toutes les applications f_i. Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des intersections finies d'ensembles de la forme $f_i^{-1}(U_i)$ où $i \in I$ et U_i ouvert de Y_i. Alors $\mathcal{B}$ vérifie les propriétés (**B1**) et (**B2**), voir page 3. Donc il existe une unique topologie $\mathcal{T}$ sur X pour laquelle $\mathcal{B}$ est une base. Cette topologie est appelée la **topologie initiale** associée à la famille $(f_i)_{i\in I}$. Notons que si Y est un espace topologique et si $f : X \longrightarrow Y$ est une application, alors la topologie initiale associée à f est tout simplement $\mathcal{T} = \{f^{-1}(U)\,;\, U \text{ ouvert de } Y\}$. Dans ce cas, la topologie initiale sur X associée à f est appelée l'**image réciproque** par f de la topologie sur Y. On vérifie facilement le lemme suivant :

Lemme 1.4.1. *Soient X un ensemble et $\big((Y_i, \mathcal{T}_i)\big)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Pour chaque $i \in I$, soit $f_i : X \longrightarrow Y_i$ une application et soit $\mathcal{T}$ la topologie initiale sur X associée à la famille $(f_i)_{i\in I}$.*

1. *Soit $x \in X$, on obtient une base de voisinages de x formée d'ensembles ouverts pour $\mathcal{T}$ en considérant les ensembles de la forme $\bigcap\limits_{i\in J} f_i^{-1}(U_i)$ où J est un sous-ensemble fini de I et U_i est un ouvert de Y_i contenant $f_i(x)$.*
2. *Si pour tout $i \in I$, $\mathcal{B}_i$ est une base d'ouverts de Y_i et si $\mathcal{B}'$ est l'ensemble des intersections finies d'ensembles de la forme $f_i^{-1}(U_i)$ où $i \in I$ et $U_i \in \mathcal{B}_i$, alors $\mathcal{B}'$ est une base d'ouverts de la topologie $\mathcal{T}$.*

Proposition 1.4.1. *Soient X un ensemble et $\big((Y_i, \mathcal{T}_i)\big)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Pour chaque $i \in I$, soit $f_i : X \longrightarrow Y_i$ une application et soit $\mathcal{T}$ la topologie initiale sur X associée à la famille $(f_i)_{i\in I}$.*

1. *La topologie $\mathcal{T}$ est la moins fine sur X rendant continues toutes les applications f_i.*
2. *Soit $g : E \longrightarrow X$ une application d'un espace topologique E dans X muni de la topologie $\mathcal{T}$, alors g est continue en un point $a \in E$ si et seulement si pour tout $i \in I$, $f_i \circ g : E \longrightarrow Y_i$ est continue en a.*
3. *La topologie $\mathcal{T}$ est l'unique topologie sur X ayant la propriété suivante, appelée **propriété universelle** de la topologie initiale : pour tout espace topologique E, une application $g : E \longrightarrow (X, \mathcal{T})$ est continue si et seulement si pour tout $i \in I$, $f_i \circ g : E \longrightarrow Y_i$ est continue.*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f_i \circ g"'] & X \arrow[r, "f_i"] & Y_i \end{tikzcd}$$

Démonstration. 1. Par construction, pour tout $i \in I$ et pour tout ouvert U_i de Y_i, on a $f_i^{-1}(U_i) \in \mathcal{T}$. Donc la topologie initiale $\mathcal{T}$ sur X rend continues toutes les applications f_i. Soit $\mathcal{T}'$ une topologie sur X rendant continues toutes les applications f_i. Alors pour tout $i \in I$ et tout ouvert U_i de Y_i, on a $f_i^{-1}(U_i) \in \mathcal{T}'$, donc on a $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.
2. La composée de deux applications continues en un point est continue, donc si g est continue en $a \in E$, alors pour tout $i \in I$, $f_i \circ g$ est continue en a. Réciproquement, supposons que pour tout $i \in I$, $f_i \circ g$ est continue en a. Soit V un voisinage de $g(a)$