UE 4 TOUT EN FICHES

Biostatistiques, Mathématiques, Probabilités

Nicolas Meyer
Professeur des universités et praticien hospitalier au CHU de Strasbourg, il enseigne à la faculté de médecine de Strasbourg

Daniel Fredon
Maître de conférences à l'université de Limoges

Myriam Maumy-Bertrand
Maître de conférences à l'université de Strasbourg

Frédéric Bertrand
Maître de conférences à l'université de Strasbourg

3e édition

EdiScience

11, rue Paul Bert 92240 Malakoff
ISBN 978-2-10-077798-3

www.dunod.com

Table des matières

Outils mathématiques

Statistique descriptive

Probabilités

Statistique inférentielle

Applications aux sciences de la vie

Avant-propos

Pourquoi un livre par fiches courtes ?

Pour votre concours, il existe un programme national, mais celui-ci peut faire l'objet d'interprétations variées. De nombreuses fiches courtes permettent une utilisation adaptée à votre programme personnel, même si tous les choix locaux ne sont pas couverts.
Par ailleurs, l'accès rapide à chaque notion de ce livre est facilité par un index détaillé.
Les fiches sont de plusieurs types :

- *Cours* : l'essentiel de ce que vous devez savoir.
- *Méthodes* : des savoirs faire incontournables.
- *Entraînement* : des QCM en vue du concours, avec corrections détaillées.

Qui sommes-nous ?

Une équipe qui regroupe des compétences variées, mais toutes au service de l'enseignement des biostatistiques.

Quels choix de notations ?

Les notations varient beaucoup suivant les auteurs. Nous avons respecté la règle suivante : des lettres grecques pour une population (μ, σ^2, π), des lettres latines pour un échantillon ($\overline{x}$, s^2, p).
Nous savons bien que, dans un cours spécialisé, il faut être précis.
Mais pour vous, nous avons choisi la simplicité. Par exemple, une variable aléatoire qui suit une loi de Student devrait se noter T_v (où v est le degré de liberté). Mais nous avons choisi, T dans la mesure où le plus souvent il n'y a aucune ambiguïté.

Et vous ?

Nous ne pouvons pas travailler à votre place. Et même placé sous votre oreiller, le contenu de ce livre ne rentrera pas sans effort.
Alors bon courage!
Toutes vos remarques, vos commentaires, vos critiques, et même vos encouragements, seront accueillis avec plaisir :
nmeyer@unistra.fr ; daniel.fredon@laposte.net
mmaumy@unistra.fr ; fbertran@unistra.fr

[Outils mathématiques]

FICHE COURS 1

Grandeurs physiques

1. Généralités

a. Grandeur physique

On appelle **grandeur physique** toute propriété de la nature qui peut être quantifiée par la mesure ou par le calcul, et dont les différentes valeurs possibles s'expriment à l'aide d'un nombre accompagné d'une unité de mesure.

Exemples

Un temps, une longeur, une masse.

b. Étalons

Un **étalon** est un modèle de poids ou de mesure qui sert de point de référence. Aujourd'hui, les étalons fondamentaux donnent des définitions très précises des unités de base.

c. Système International d'unités (SI)

Le SI fixe des règles pour les préfixes, les unités dérivées... Le SI est fondé sur un choix de 7 unités de base bien définies et considérées comme indépendantes du point de vue dimensionnel.

grandeurs de base	unités	symboles
masse	kilogramme	kg
longueur	mètre	m
temps	seconde	s
intensité du courant électrique	ampère	A
température	kelvin	K
quantité de matière	mole	mol
intensité lumineuse	candela	cd

d. Préfixes

facteurs	noms	symboles
10^3	kilo	k
10^6	méga	M
10^9	giga	G
10^{12}	téra	T

facteurs	noms	symboles
10^{-3}	milli	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p

e. Constantes fondamentales

Les **constantes fondamentales** régissent les théories de la physique les plus générales, comme :

- c la vitesse de la lumière ;
- G la constante gravitationnelle.

Certaines de ces constantes sont fixées (comme c) et donc de valeur exacte, d'autres sont mesurées (comme G) et donc de valeur approchée.

2. Analyse dimensionnelle

a. Dimension d'une grandeur physique

Les grandeurs fondamentales du SI vont être désignées par des lettres majuscules :
masse M ; longueur L ; temps T ; intensité du courant électrique I ; température Θ ; quantité de matière N ; intensité lumineuse J.
On attribue à toutes les grandeurs dérivées, une dimension qui s'exprime par un produit (avec des puissances entières positives, négatives ou nulles) des dimensions des grandeurs fondamentales.

Exemples

- Dans le cas d'un mouvement rectiligne, l'**accélération** s'écrit $a = \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$ où x est une longueur et t un temps. On lui attribue la dimension : $[a] = \dfrac{[x]}{[t]^2} = \dfrac{L}{T^2} = LT^{-2}$.

  Notez bien la différence entre minuscule et majuscule.
- Une **force** F est le produit d'une masse et d'une accélération.

On lui attribue la dimension : $[F] = [m] \times [a] = MLT^{-2}$.

b. Équation aux dimensions

L'analyse dimensionnelle consiste à déterminer les dimensions attribuées aux expressions reliant des grandeurs physiques. Cela permet de contrôler la cohérence de formules ou d'égalités.
En effet, pour additionner, ou égaler, deux expressions reliant des grandeurs physiques, il est nécessaire (mais pas suffisant) qu'elles aient la même dimension.

FICHE COURS 2

Mesure des grandeurs

1. Généralités

a. Vocabulaire

La **mesure** est l'ensemble des opérations ayant pour but de déterminer une valeur numérique d'une grandeur physique (voir Fiche 1).
Le **mesurande** est définie comme « la grandeur soumise à mesurage ».

b. Mesurage

L'objectif d'un **mesurage** est d'obtenir la valeur x d'un mesurande X.
Mais divers types d'erreurs apparaissent :

- des **erreurs systématiques** dues à la technique de mesure, à l'appareil, à l'opérateur ;
- des **erreurs aléatoires**.

Ces erreurs entraînent un écart entre le résultat du mesurage et la valeur vraie (inaccessible) du mesurande.

c. Présentation d'un résultat

- Après avoir réduit les erreurs, il reste toujours une **incertitude** $\pm I$. L'affichage $x \pm I$ signifie que la valeur vraie du mesurande appartient à l'intervalle $[x - I\ ;\ x + I]$ avec une forte probabilité.

L'incertitude I dépend de la probabilité choisie.

- Si les erreurs restantes sont surtout aléatoires, on peut penser que les mesures correspondent à une loi normale (voir Fiche 23). Dans ce cas, on choisit souvent $I = 2\sigma$ (où la notation σ représente l'écart-type), qui correspond à une probabilité de plus de 95 % que la vraie valeur du mesurande soit dans l'intervalle calculé.
- Dans l'affichage du résultat, pensez aussi à ne conserver qu'un nombre de chiffres après la virgule qui ait du sens.

Exemple

Ne concluez pas avec 128,589 657 ± 3,259, mais plutôt avec 128,6 ± 3,3.

Arrondissez la mesure au plus près, et l'incertitude par augmentation.

2. Utilisation d'un grand nombre de mesures

Supposons que les erreurs systématiques aient été réduites autant que possible et qu'il ne reste que les erreurs aléatoires. Ces erreurs sont alors indépendantes et les diverses variances s'additionnent, ce qui n'est pas le cas des écarts type (voir Fiche 10 pour une définition).
Quand on répète n fois une mesure et qu'on calcule la moyenne des résultats, l'incertitude mesurée par des écarts type est alors réduite : elle est multipliée par $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

[IMPORTANT]

Pour comprendre ce phénomène, il suffit de penser que les différences (avec la vraie valeur) positives et négatives se compensent en partie.

3. Incertitude en métrologie

En métrologie (science de la mesure) l'incertitude désigne d'après Vold[1] la marge d'« imprécision », sur la valeur de la mesure d'une grandeur physique ou, d'après le VIM (Vocabulaire International de Métrologie), la dispersion des valeurs qui pourraient raisonnablement être attribuées à une grandeur.

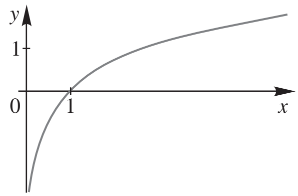
1. Vold (2005) Expressions of uncertainty in scientific research articles, Akademisk Prosa, 3, 113-127.

FICHE COURS 3

Fonctions logarithmes, exponentielles et puissances

1. Fonctions logarithmes et exponentielles

a. Fonction logarithme népérien



Elle est définie pour $x > 0$ par :

$$\begin{cases} \ln 1 = 0 ; \\ \forall x > 0 \quad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

Elle est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty.$$

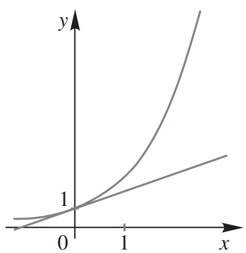
L'unique solution de l'équation $\ln x = 1$ est notée e ($e \approx 2{,}718$).

Propriétés algébriques

$\forall a > 0 \quad \forall b > 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\ln(a \times b) = \ln a + \ln b \quad ; \quad \ln(a^\alpha) = \alpha \ln a ;$$
$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a \quad ; \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b.$$

b. Fonction exponentielle



C'est la fonction réciproque de la fonction ln. Elle est notée exp(x) ou e^x.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (e^x)' = e^x ;$$
$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty.$$

Elle est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0 ; +\infty[$, strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Propriétés algébriques

$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad \forall r \in \mathbb{Q}$

$$e^{a+b} = e^a \times e^b \quad ; \quad e^{ra} = (e^a)^r \quad ; \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a} \quad ; \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}.$$

c. Fonction logarithme de base a

La fonction logarithme de base a ($a > 0$; $a \neq 1$) est la fonction définie par :

$$\forall x > 0 \qquad \log_a(x) = \frac{\ln\ x}{\ln\ a}.$$

$$\forall x > 0 \quad (\log_a x)' = \frac{1}{\ln\ a} \times \frac{1}{x}.$$

Ses propriétés algébriques sont les mêmes que celles de la fonction ln. Si $a = 10$, $\log_a$ est le logarithme décimal. Il est noté log.

d. Fonction exponentielle de base a

La fonction exponentielle de base a ($a > 0$) est la fonction définie par : :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp_a(x) = a^x = \mathrm{e}^{x\ \ln\ a}.$$

Pour $a \neq 1$, c'est la fonction réciproque de la fonction $\log_a$.

$$(y > 0 \text{ et } a > 0)\ y = a^x \iff \ln y = x \ln a \iff x = \log_a(y).$$

$$\forall x \in\ \mathbb{R} \quad (a^x)' = \ln\ a \times a^x.\ (a > 0)$$

[IMPORTANT]

Remarquez bien qu'ici, la variable x est en exposant.

Ses propriétés algébriques sont les mêmes que celles de la fonction exp.

2. Fonctions puissances

La fonction $x \mapsto x^r$, pour $x > 0$ et $r \in \mathbb{Q}$, est déjà connue. On la généralise, pour $x > 0$ et $a \in \mathbb{R}$, en posant :

$$x^a \ = \ e^{a \ln x}.$$

Les propriétés connues pour les exposants rationnels sont prolongées ; en particulier $(x^a)' = ax^{a-1}$.

[IMPORTANT]

Remarquez bien qu'ici l'exposant a est constant.

Calcul de primitives

1. Primitive d'une fonction continue

a. Définition

f étant définie sur un intervalle I, une fonction F, définie sur I, est une primitive de f, si elle est dérivable sur I et si :

$$\forall t \in I \qquad F'(t) = f(t).$$

b. Théorèmes

- Deux primitives de f diffèrent d'une constante, c'est-à-dire que, si F est une primitive de f sur un intervalle I, toutes les primitives de f sur I sont de la forme : $t \mapsto F(t)+C$ où C est une constante réelle quelconque.
- Pour toute primitive h de f sur I, on a :

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = [h(t)]_a^x = h(x) - h(a).$$

Le calcul d'intégrales de fonctions continues se ramène donc à la recherche de primitives.

c. Primitives usuelles

$f(t)$	$F(t)$	$f(t)$	$F(t)$	$f(t)$	$F(t)$
$t^n\ (n \neq -1)$	$\dfrac{t^{n+1}}{n+1}$	$\dfrac{1}{t}$	$\ln\lvert t\rvert$	$\mathrm{e}^{\lambda t}\,(\lambda \in \mathbb{C}^*)$	$\dfrac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{\lambda t}$
$\cos t$	$\sin t$	$\sin t$	$-\cos t$	$\ln t$	$t \ln t - t$

2. Méthodes de calcul

a. Utilisation de la dérivée de u^n

Si u est une fonction de t, la dérivée de u^n par rapport à t est :

$$n\,u^{n-1}(t)\,u'(t).$$

Donc, si vous cherchez une primitive d'une fonction du type $u^k(t)\,u'(t)$ [ou $(at+b)^k$ car alors $u'(t)=a$ est une constante], introduisez $u^{k+1}(t)$ et dérivez cette expression pour ne pas vous tromper sur le coefficient à introduire.

b. Intégration par parties

- **Théorème**
  Soit u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ (c'est-à-dire dérivable et dont la dérivée est continue) sur un intervalle I, et a et b des réels de I.
  On a :
  $$\int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t = \big[u(t)\,v(t)\big]_a^b - \int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t,$$
  ce qui s'écrit aussi, en terme de primitives :
  $$\int u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t = u(t)\,v(t) - \int u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t.$$
- **Cas classiques d'utilisation**
  Soit P une fonction polynomiale, α un réel non nul, β un réel, a et b deux réels de I tels que $a<b$.

  ➢ Pour calculer $I=\int_a^b P(t)\sin(\alpha t+\beta)\,\mathrm{d}t$, posez $v(t)=P(t)$:
  $$u'(t)=\sin(\alpha t+\beta) \quad ; \quad v(t)=P(t)$$
  $$u(t)=-\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha t+\beta) \quad ; \quad v'(t)=P'(t).$$
  Ainsi $I=\left[-\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha t+\beta)\;P(t)\right]_a^b+\frac{1}{\alpha}\int_a^b P'(t)\cos(\alpha t+\beta)\,\mathrm{d}t.$

  On recommence si nécessaire autant de fois que le degré de $P(t)$.

  ➢ Pour $\int_a^b P(t)\cos(\alpha t+\beta)\,\mathrm{d}t$, posez $v(t)=P(t)$.

  ➢ Pour $\int_a^b P(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t+\beta}\,\mathrm{d}t$, posez $v(t)=P(t)$.

  ➢ Pour $\int_a^b P(t)\ln t\,\mathrm{d}t$, posez $v(t)=\ln t$.

c. Intégration par changement de variable

Soit u une fonction bijective de classe $\mathcal{C}^1$ de $[\alpha;\beta]$ sur $[a;b]$, et f une fonction continue sur $[a;b]$. Alors :
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f\big(u(t)\big)u'(t)\,\mathrm{d}t.$$

FICHE COURS 5

Équations différentielles du premier ordre

1. Équations à variables séparables

Lorsque l'équation est de la forme :

$$x'(t)f\big(x(t)\big) = g(t),$$

où f et g sont des fonctions données définies et continues sur un intervalle I dont on connaît des primitives F et G, on a :

$$F\big(x(t)\big) = G(t) + C \quad \text{(où } C \text{ est une constante réelle quelconque).}$$

De plus si F possède une fonction réciproque notée F^{-1}, on en tire :

$$x(t) = F^{-1}\big(G(t) + C\big),$$

relation qui donne toutes les solutions de l'équation.

[IMPORTANT]

On peut écrire l'équation sous la forme : $f(x)\,\mathrm{d}x = g(t)\,\mathrm{d}t$, puis intégrer formellement les deux membres :

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int g(t)\,\mathrm{d}t,$$

et exprimer x en fonction de t.

2. Équations linéaires

a. Définition

Ce sont des équations de la forme :

$$a(t)x'(t) + b(t)x(t) = f(t) \qquad \textbf{(1)}$$

où a, b et f sont des fonctions données, continues sur un intervalle I. Pour la résolution, on se place sur un intervalle $J \subset I$ tel que a ne s'annule pas sur J.

b. Théorème dû à la linéarité

Toute solution de **(1)** est de la forme $x_P(t)+x_S(t)$ où $x_P(t)$ est une solution particulière de **(1)** et $x_S(t)$ la solution générale de l'**équation homogène associée** :

$$a(t)x'(t)+b(t)x(t)=0. \qquad \textbf{(2)}$$

On est donc conduit à deux problèmes : rechercher la solution générale $x_S(t)$ de l'équation homogène (2), puis une solution particulière $x_p(t)$ de l'équation complète (1).

c. Résolution de l'équation homogène associée

C'est une équation à variables séparables. Ses solutions sont du type :

$$x_S(t)=K\ \mathrm{e}^{-A(t)} \text{ où } A(t)=\int_{t_0}^{t} a(u)\,\mathrm{d}u$$

avec K une constante réelle quelconque et t_0 un élément quelconque de I. Elles comportent donc la fonction nulle et des fonctions qui ne s'annulent jamais.

d. Recherche d'une solution particulière (méthode de Lagrange)

x_1 étant une solution non nulle de **(2)**, on introduit une fonction auxiliaire inconnue $K(t)$ telle que $x(t) = K(t)\ x_1(t)$ soit solution de **(1)**.
On calcule $x'(t)$; on reporte $x'(t)$ et $x(t)$ dans **(1)**.
On observe que $K(t)$ disparaît, ce qui fournit une auto-vérification.
Il reste $K'(t)$, ce qui permet de calculer $K(t)$ puis $x(t)$.
Vous avez le choix entre deux variantes (équivalentes : ne faites pas les deux) :

- cherchez toutes les fonctions $K(t)$ avec une constante d'intégration (n'oubliez pas de reporter dans $x(t)$) ;
- ou cherchez une fonction $K(t)$, reporter dans $x(t)$ et additionnez avec $x_S(t)$.

[IMPORTANT]

Cette méthod s'appelle aussi **méthode de variation de la constante**. Ce mot curieux (une constante qui varie !) vient du fait qu'on remplace la constant K obtenue en résolvant l'équation homogène par une function $K(t)$.

FICHE COURS 6

Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

1. Généralités

a. Définition

Ce sont des équations de la forme :

$$a\,x''(t)+b\,x'(t)+c\,x(t)=\ f(t) \qquad \textbf{(1)}$$

où a, b et c sont des constantes réelles données avec $a \neq 0$ et f une fonction donnée définie et continue sur un intervalle I.

b. Théorèmes dûs à la linéarité

- Toute solution de **(1)** est de la forme :

$$x_P(t)+x_S(t)$$

où $x_P(t)$ est une solution particulière de **(1)**, et $x_S(t)$ la solution générale de l'**équation homogène associée** :

$$a\,x''(t)+b\,x'(t)+c\,x(t)=0 \qquad (\textbf{2}).$$

- Si $x_1(t)$ est une solution particulière de

$$ax''(t)+b\,x'(t)+c\,x(t)=f_1(t)$$

et $x_2(t)$ une solution particulière de

$$a\,x''(t)+b\,x'(t)+c\,x(t)=f_2(t)$$

alors $x_1(t)+x_2(t)$ est une solution particulière de

$$a\,x''(t)+b\,x'(t)+c\,x(t)=f_1(t)+f_2(t).$$

2. Résolution de l'équation homogène

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{rt}$ est solution de **(2)** si, et seulement si, le nombre réel ou complexe r vérifie l'équation caractéristique :

$$ar^2+br+c=0,$$

ce qui conduit à calculer le discriminant $\Delta=b^2-4ac$.

- **Si** $\Delta > 0$, l'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes notées r_1 et r_2. On a alors :

$$x_S(t) = K_1 \, e^{r_1 t} + K_2 \, e^{r_2 t}$$

où K_1 et K_2 sont des constantes réelles quelconques.

- **Si** $\Delta = 0$, l'équation caractéristique a une racine réelle double notée r_0. On a alors :

$$x_S(t) = (K_1 \, t + K_2) \, e^{r_0 t}$$

où K_1 et K_2 sont des constantes réelles quelconques.

- **Si** $\Delta < 0$, l'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$. On a alors :

$$x_S(t) = e^{\alpha t}(K_1 \cos \beta t + K_2 \sin \beta t)$$

où K_1 et K_2 sont des constantes réelles quelconques.

3. Recherche d'une solution particulière dans certains cas

a. Cas où la fonction f est un polynôme P de degré n

Il existe une solution particulière de **(1)** sous la forme d'un polynôme de degré : n si $c \neq 0$;

$n+1$ si $c = 0$ et $b \neq 0$;

$n+2$ si $c = b = 0$ et $a \neq 0$.

La recherche de cette solution se fait par identification.

b. Cas où $f(t) = e^{kt} P(t)$ avec P polynôme et k constante réelle

On peut effectuer le changement de fonction inconnue

$$x(t) = e^{kt} \, z(t)$$

où z est une nouvelle fonction inconnue. En reportant x, x' et x'' dans **(1)**, on est alors conduit à une équation en z du type précédent.

FICHE COURS 7

Fonctions de plusieurs variables

Pour simplifier l'écriture, les définitions et résultats seront énoncés dans le cas de deux variables. Ils se prolongent sans peine à plus de variables.

1. Généralités

a. Fonction de deux variables

Une fonction f, définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles, fait correspondre à tout vecteur X de D un réel unique $f(X)$.
X se note (x, y) ou (x_1, x_2).
L'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$:

$$S = \left\{\left(x, y, f(x, y)\right) \ ; \ (x, y) \in D\right\}$$

est la **surface représentative** de f ; c'est l'analogue de la courbe représentative d'une fonction d'une variable.

b. Fonctions partielles

Soit f une fonction de $D \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et $A = (a_1, a_2)$ un point de D non situé sur le bord. Les fonctions :

$$x_1 \mapsto f(x_1, a_2) \quad \text{et} \quad x_2 \mapsto f(a_1, x_2)$$

définies sur un intervalle ouvert contenant respectivement a_1 et a_2, sont appelées les **fonctions partielles** associées à f au point A.

c. Lignes de niveau

Soit $k \in \mathbb{R}$; l'ensemble $\{(x, y) \in D \ ; \ f(x, y) = k\}$ est la **courbe de niveau** k de la fonction f.
Pour les fonctions de 3 variables, la notion analogue est celle de **surface de niveau**.

2. Dérivées partielles

a. Dérivées partielles d'ordre 1

Soit $(x_0, y_0) \in D$. Les dérivées partielles d'ordre 1 de f en (x_0, y_0) sont les dérivées des fonctions partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)}{k}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ se lit : « d rond f » sur « d rond x ».

Si ces deux fonctions sont continues, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

b. Notation différentielle

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

On dit que d f est la **différentielle totale** de f.

En sciences expérimentales, la différentielle est utilisée pour estimer la variation de f au voisinage d'un point en fonction des variations Δx et Δy des variables :

$$\Delta f=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)\approx\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y.$$

c. Application au calcul d'incertitudes

[IMPORTANT]

Si votre cours comporte les fiches 1 et 2, ce paragraphe est inutile. Mais il est encore souvent enseigné.

Les variables x et y sont des mesures obtenues avec des incertitudes respectives Δx, Δy.

Que peut-on dire sur l'incertitude du résultat du calcul de $f(x,y)$?

On a vu que :

$$\Delta f\approx\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y.$$

L'**incertitude** I sur f ou incertitude absolue, (on dit parfois « erreur absolue », mais si on connaissait l'erreur, on la corrigerait !) est un majorant de Δf. On retient :

$$I=\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta y.$$

Le **taux d'incertitude** ou incertitude relative, (on dit parfois « erreur relative ») est un majorant de $\left|\dfrac{\Delta f}{f}\right|$. On prend : $\dfrac{I}{|f|}$. Il s'exprime en pourcentage.

FICHE QCM 8

Entraînement sur les outils mathématiques

Énoncés

Pour chaque QCM, cochez la (ou les) réponse(s) exacte(s).

1. *(D'après concours PACES Strasbourg)*
En vous servant des relations ci-dessous, retrouvez l'équation aux dimensions du potentiel électrique.

$$P = IV \; ; \; E = -\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} \; ; \; F = qE \; ; \; I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}.$$

❑ **a.** M L T^2 I^{-1} ❑ **b.** M L^2 T^{-3} I^{-1}

❑ **c.** M L^2 T^{-2} I^{-2} ❑ **d.** M^{-1} L^2 T^{-2} I^{-1}. ❑ **e.** Autre réponse.

2. *(D'après concours PACES Bordeaux)*
La pression osmotique d'une solution diluée est donnée par la loi de Van't Hoff:

$$\pi = RTc$$

T représente la température, c la concentration et R la constante des gaz parfaits.

❑ **a.** Dans le système international, l'unité de pression est le bar (symbole bar).
❑ **b.** L'équation aux dimensions de la pression est $[\pi] = M.L^{-1}.T^{-2}$.
❑ **c.** Dans le système international, l'unité d'énergie est le joule (symbole J).
❑ **d.** L'équation aux dimensions de l'énergie est $[E] = M.L.T^{-2}$.
❑ **e.** L'unité de R dans le système international est $J.mol.K^{-1}$.

3. *(D'après concours PACES Strasbourg)*
On mesure 100 fois une longueur L. La moyenne calculée des 100 mesures est $< L >$ = 78,612 68 mm et l'écart type des mesures est σ = 8,436 21 mm.
Écrivez correctement, selon la norme ISO, le résultat de la mesure de L :

❑ **a.** 78,613 ± 1,687 ❑ **b.** 78,61 ± 0,84
❑ **c.** 78,6 ± 8,4 ❑ **d.** 78,6 ± 1,7. ❑ **e.** Autre réponse.

4. *(D'après concours PACES Amiens)*
La surface corporelle d'un patient peut se calculer en utilisant la formule :

$$S = \sqrt{\frac{LM}{3600}}$$

avec S la surface corporelle exprimée en m^2, L la taille exprimée en cm, et M la masse exprimée en kg.
Un patient X, âgé de 52 ans, mesurant 1,80 m et pesant 80 kg reçoit chaque semaine un traitement sous forme d'une injection par voie intraveineuse du médicament V.
Sachant que la posologie du médicament V est fonction de la surface corporelle du patient, à savoir 5mg/m^2/semaine, quelle est la dose de médicament V qui va être injectée à X chaque semaine ?

❑ **a.** 0,005 g ❑ **b.** 10 mg ❑ **c.** 0,01 g
❑ **d.** 10^2 mg ❑ **e.** Une autre valeur.

5. *(D'après concours PACES Limoges)*
Le pH d'une solution tampon est donné :

$$\text{pH} = \text{pKa} + \log\frac{[B]}{[A]}$$

Calculez la concentration $[B]$ (en mol.L^{-1}) sachant que la solution a un pH de 6,6.
Données : pKa = 7,2 ; $[A]$ = 0,080 mol.L^{-1}.

❑ **a.** 0,320 ❑ **b.** 0,040 ❑ **c.** 0,012
❑ **d.** 0,020 ❑ **e.** Aucune de ces réponses n'est exacte.

6. *(D'après concours PACES Limoges)*
Lors de la désintégration radioactive d'un élément, le nombre $N(t)$ de noyaux présents à l'instant t est donné par :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

où N_0 est le nombre de noyaux présents au temps initial et λ la constante radioactive de l'élément.

Si l'on est en présence de cobalt 60 ($\lambda = 0{,}131$ an^{-1}), au bout de combien de temps (en années) le nombre de noyaux est-il divisé par 5 par rapport au nombre initial de noyaux ($N_0 = 2 \times 10^5$) ?

❑ **a.** 0,21 ❑ **b.** 12,29 ❑ **c.** 5,29
❑ **d.** 0,09 ❑ **e.** 26 200.

7. En admettant, qu'après une injection, la concentration plasmatique $C(t)$ d'héparine est sensiblement de la forme :

$$C(t) = a\,\mathrm{e}^{-\alpha t} + b\,\mathrm{e}^{-\beta t}.$$

On cherche à estimer les valeurs de a, b, α, β, sachant que α est très supérieur à β et qu'il a été observé :

t	0	1	2	10	12
C	9	4,3	3	1,5	1,3

À 10^{-2} près, on obtient :
❑ **a.** $a = 4{,}98$; $b = 2{,}56$; $\alpha = 1{,}28$; $\beta = 1{,}26$
❑ **b.** $a = 5{,}93$; $b = 3{,}07$; $\alpha = 1{,}41$; $\beta = 0{,}07$
❑ **c.** $a = 3{,}07$; $b = 5{,}93$; $\alpha = 1{,}41$; $\beta = 0{,}07$.
❑ **d.** Il manque des informations pour répondre.
❑ **e.** On ne peut jamais répondre.

8. *(D'après concours PACES Grenoble)*
Le nombre de cellules en culture cellulaire sur plaque est approximé par :

$$N(t) = N_c(1 - \mathrm{e}^{-kt})^2$$

où k est une constante positive, N_c est positif et correspond à la capacité d'accueil de la plaque et t correspond au temps avec $t \geqslant 0$, $t = 0$ correspondant au début de la manipulation avec l'ensemencement de la cellule.
❑ **a.** $N'(t) = 2N_c(1 - \mathrm{e}^{-kt})$
❑ **b.** $N'(t) = 2N_c\mathrm{e}^{-kt}(1 - \mathrm{e}^{-kt})$
❑ **c.** $N'(t) = -2N_c\mathrm{e}^{-kt}(1 - \mathrm{e}^{-kt})$
❑ **d.** $N'(t) = 2N_c k\mathrm{e}^{-kt}(1 - \mathrm{e}^{-kt})$.
❑ **e.** Tous les items précédents sont faux.

9. *(D'après concours PACES Grenoble)*
La fraction de l'intensité de lumière transmise à travers une solution d'un colloïde par rapport à l'intensité de lumière incidente est décrite par une fonction $A(x)$ avec :

$$A(x) = -\log(1 - x)$$

où log désigne le logarithme décimal.
On cherche l'approximation à l'ordre 1 de la fonction $A(a + h)$ au voisinage de $a = 0$:

❑ **a.** $A(0 + h) \approx h$ ❑ **b.** $A(0 + h) \approx -h\ln 10$

❑ **c.** $A(0+h) \approx \dfrac{h}{\ln\ 10}$ ❑ **d.** $A(0+h) \approx -\dfrac{h}{\ln\ 10}$.

❑ **e.** Tous les items précédents sont faux.

10. *(D'après concours PACES Limoges)*
On sait que la vitesse d'un fluide dans un tube circulaire dépend du rayon r du tube. Elle est régie par l'expression suivante (où A et B sont des constantes positives) :

$$V(r) = \frac{A}{\pi}(Br^2 - r^3) \qquad r \in I \text{ tel que } V(r) \geqslant 0.$$

La vitesse maximale sera atteinte lorsque :

❑ **a.** La dérivée de la fonction $V(r)$ atteint sa valeur maximale.
❑ **b.** La dérivée de la fonction $V(r)$ est égale à 0.
❑ **c.** L'aire sous la courbe représentant la fonction $V(r)$ entre 0 et r est maximale.

Pour les valeurs des constantes A = 31,8 et B = 3 cette vitesse (en unités arbitraires) serait de :

❑ **d.** 31,8 ❑ **e.** 52,2.

11. *(D'après concours PACES Strasbourg)*
Après administration orale, la quantité plasmatique $S(t)$ d'un médicament évolue en fonction du temps t selon l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} + 2S = 100\,\mathrm{e}^{-t}.$$

À quel instant t, la quantité S est-elle maximale ? (Les temps sont exprimés en heure, $S = 0$ à $t = 0$).