J. FRESLON | S. GUGGER | J. POINEAU

MATHS PC – PSI

j'intègre

EXERCICES INCONTOURNABLES

3e édition

DUNOD

Conception et création de couverture : Hokus Pokus Créations

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.
Le Code de la propriété intellectuelle du 1er juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

© Dunod, 2018

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-077662-7

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Avant-propos

Cet ouvrage s'adresse aux élèves de deuxième année de classes préparatoires scientifiques des filières PC et PSI. Il leur propose de mettre en pratique les notions abordées en cours de mathématiques par le biais d'exercices, assortis d'une correction détaillée, dans laquelle l'accent est mis sur la méthode qui mène à la solution.

Le livre est divisé en quinze chapitres, chacun étant consacré à une partie du programme. Nous avons regroupé les chapitres selon les thèmes classiques : Algèbre, Topologie, Analyse et Probabilités. Au sein d'un même chapitre, les exercices, classés par ordre croissant de difficulté, ont été choisis de façon à passer en revue les notions à connaître, mais aussi à présenter les techniques susceptibles d'être utilisées.

En ce qui concerne les corrections, nous avons choisi de séparer clairement la réflexion préliminaire, comprenant analyse du problème et tâtonnements, de la rédaction finale, rigoureuse et précise. Cette dernière étape est signalée, dans le texte, par la présence d'un liseré gris sur la gauche et du pictogramme . Insistons sur le fait que nous ne prétendons nullement présenter l'unique cheminement permettant d'aboutir à la solution d'un exercice donné, ni la seule rédaction acceptable. Dans les deux cas, bien des possibilités existent.

Par ailleurs, lorsque nous avons souhaité mettre en lumière un point important, nous l'avons rédigé sur un fond grisé et indiqué par . De même, la présence d'un piège dont il faut se méfier est signalée par . Quelques exercices sont seulement au programme de PSI, cela est clairement signalés dans leur titre. Nous avons également séparé les rédactions d'un corrigé lorsque les programmes de PC et PSI appelaient deux réponses différentes.

Nous remercions Sabrina Bergez, qui a collaboré à la réalisation de ce livre en le relisant en détail et en nous faisant bénéficier de ses nombreuses remarques pertinentes.

Table des matières

Algèbre

1 Algèbre linéaire 8
2 Réduction 31
3 Espaces euclidiens 67

Topologie

4 Topologie des espaces vectoriels normés 93
5 Fonctions vectorielles et arcs paramétrés 115

Analyse

6 Séries numériques 136
7 Suites et séries de fonctions 151
8 Séries entières 175
9 Intégration 201
10 Calcul différentiel 243
11 Équations différentielles 263

Probabilités

12 Espaces probabilisés 283
13 Variables aléatoires discrètes 295

Index 317

Partie 1

Algèbre

Algèbre

1 Algèbre linéaire **8**

1.1 : Utilisation des polynômes de Lagrange 8
1.2 : Polynôme et racines n-ièmes 11
1.3 : Utilisation d'un polynôme annulateur (PSI) 12
1.4 : Somme de projecteurs 14
1.5 : Somme de sous-espaces de polynômes 15
1.6 : Calcul par blocs 16
1.7 : Propriétés de la trace 18
1.8 : Réduction des matrices de trace nulle 20
1.9 : Réduction d'une matrice antisymétrique 22
1.10 : Intersection de p hyperplans (PSI) 24
1.11 : Un calcul de déterminant 26

2 Réduction **31**

2.1 : Éléments propres d'un endomorphisme d'un espace de polynômes 31
2.2 : Éléments propres d'un endomorphisme d'un espace de fonctions 33
2.3 : Diagonalisation 37
2.4 : Réduction d'une matrice d'ordre 3 41
2.5 : Trigonalisation 43
2.6 : Réduction d'une matrice à paramètres 47
2.7 : Diagonalisabilité un endomorphisme induit (PC) 49
2.8 : Diagonalisation simultanée 51
2.9 : Étude d'un endomorphisme d'un espace d'endomorphismes (PSI) 53
2.10 : Réduction (PSI) 56
2.11 : Théorème de Cayley-Hamilton (PSI) 59
2.12 : Diagonalisabilité et sous-espaces stables 64

3 Espaces euclidiens **67**

3.1 : Famille de polynômes orthogonaux 67
3.2 : Un problème de minimisation 70
3.3 : Une caractérisation des isométries antisymétriques 71
3.4 : Centre de O(E) 73
3.5 : Partie génératrice du groupe orthogonal 75
3.6 : Isométries matricielles 77
3.7 : Applications conservant le produit vectoriel (PSI) 79
3.8 : Étude d'une rotation en dimension 3 (PSI) 81
3.9 : Formes quadratiques 82
3.10 : Quotients de Rayleigh 85
3.11 : Décomposition polaire 86

CHAPITRE

1

Algèbre linéaire

Exercice 1.1 : Utilisation des polynômes de Lagrange

On se fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts.
1. Montrer que pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, il existe un unique $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout j entre 0 et n, $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$ (le symbole de Kronecker, qui vaut 0 si $i \neq j$, 1 si $i = j$).
2. Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, quelles sont ses coordonnées dans cette base ?
3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall x \in [0, n]$, $|P(x)| \leqslant 1$. Montrer que :

$$|P(-1)| \leqslant 2^{n+1} - 1 \quad \text{et} \quad |P(n+1)| \leqslant 2^{n+1} - 1.$$

1. Pour montrer l'existence et l'unicité, il y a deux possibilités : on peut montrer d'une part l'unicité et d'autre part l'existence, mais il faudra avoir une idée de quoi poser dans l'existence. On peut également raisonner par analyse/synthèse. L'intérêt de ce dernier mode de raisonnement est qu'il n'y aura pas à réfléchir dans la phase de synthèse, pour savoir quoi poser.

► **Analyse :**
Dans la phase d'analyse, on suppose avoir un objet vérifiant la propriété voulue et on trouve son expression exacte. Ceci montrera l'unicité.

Soit $i \in \{0, \dots, n\}$. Supposons avoir $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout j entre 0 et n, $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$. L_i admet alors tous les a_j (pour $j \neq i$) comme racines. Ce sont n réels deux à deux distincts, et $\deg(L_i) \leqslant n$, donc on a toutes les racines de L_i. La forme factorisée de L_i est alors de la forme :

$$L_i = \lambda \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (X - a_j).$$

On trouve enfin la valeur de λ grâce à $L_i(a_i) = 1$:

$$1 = L_i(a_i) = \lambda \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (a_i - a_j) \quad \text{donc} \quad \lambda = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{a_i - a_j},$$

où l'on peut diviser car $a_i \neq a_j$ pour $j \neq i$. Ainsi

$$L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

et on a l'unicité.

► **Synthèse :**
Dans la phase de synthèse, on pose l'objet trouvé dans la phase d'analyse, et on démontre qu'il convient effectivement.

Soit $i \in \{0, \ldots, n\}$. Posons

$$L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

Alors $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ (il est de degré n), $L_i(a_j) = 0$ si $j \neq i$ et $L_i(a_i) = 1$. On a donc l'existence.

La phase d'analyse montre toujours l'unicité, la phase de synthèse l'existence. Cette dernière est indispensable, puisque la phase d'analyse montre simplement que si l'objet cherché existe, il est d'une certaine forme, mais pas que cette forme convient effectivement.

2. La famille $(L_0, \ldots, L_n)$ comporte autant d'éléments que la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$. Il suffit donc de montrer qu'elle est libre.

La dimension de $\mathbb{R}_n[X]$ est $n+1$ et non n, puisque sa base canonique $(X^0, \ldots, X^n)$ comporte $n+1$ éléments.

Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\lambda_0 L_0 + \cdots + \lambda_n L_n = 0$. Pour $i \in \{0, \ldots, n\}$, on a, en évaluant en a_i,

$$0 = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j L_j(a_i) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \delta_{j,i} = \lambda_i.$$

Ainsi la famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est libre. Elle a $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ éléments, c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a alors $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $P = \lambda_0 L_0 + \cdots + \lambda_n L_n$. Comme plus haut, pour $i \in \{0, \ldots, n\}$, on a, en évaluant en a_i,

$$P(a_i) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j L_j(a_i) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \delta_{j,i} = \lambda_i.$$

Les coordonnées de P dans la base $(L_0, \dots, L_n)$ sont donc $(P(a_0), \dots, P(a_n))$.

3. Pour démontrer les inégalités proposées, on cherche à appliquer les questions précédentes. L'hypothèse étant vérifiée sur $[0, n]$, on pense à poser $a_i = i$ pour tout i entre 0 et n. On a alors P qui s'exprime en fonction des $P(i)$ (de valeur absolue plus petite que 1) et des L_i. Il faut donc majorer les $|L_i(-1)|$ et $|L_i(n+1)|$.

On applique les questions précédentes à $(a_0, \dots, a_n) = (0, \dots, n)$. Notons $L_0, \dots, L_n$ les polynômes d'interpolation de Lagrange associés, on a

$$P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i = \sum_{i=0}^{n} P(i) L_i.$$

Pour i entre 0 et n, on a alors :

$$\begin{aligned}
|L_i(-1)| &= \left| \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{-1-j}{i-j} \right| = \prod_{j=0}^{i-1} \frac{j+1}{i-j} \prod_{j=i+1}^{n} \frac{j+1}{j-i} \\
&= \prod_{j=0}^{i-1} (j+1) \prod_{j=0}^{i-1} \frac{1}{i-j} \prod_{j=i+1}^{n} (j+1) \prod_{j=i+1}^{n} \frac{1}{j-i} \\
&= (i!) \times \frac{1}{i!} \times \frac{(n+1)!}{(i+1)!} \times \frac{1}{(n-i)!} = \frac{(n+1)!}{(i+1)!\,(n-i)!} \\
&= \binom{n+1}{i+1}.
\end{aligned}$$

Ainsi, par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}
|P(-1)| &= \left| \sum_{i=0}^{n} P(i) L_i(-1) \right| \leqslant \sum_{i=0}^{n} |P(i) L_i(-1)| \leqslant \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i+1} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} - 1 = 2^{n+1} - 1.
\end{aligned}$$

De même, on trouve

$$\begin{aligned}
|L_i(n+1)| &= \left| \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{n+1-j}{i-j} \right| = \prod_{j=0}^{i-1} \frac{n+1-j}{i-j} \prod_{j=i+1}^{n} \frac{n+1-j}{j-i} \\
&= \prod_{j=0}^{i-1} (n+1-j) \prod_{j=0}^{i-1} \frac{1}{i-j} \prod_{j=i+1}^{n} (n+1-j) \prod_{j=i+1}^{n} \frac{1}{j-i} \\
&= \frac{(n+1)!}{(n+1-i)!} \times \frac{1}{i!} \times ((n-i)!) \times \frac{1}{(n-i)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{i!\,(n+1-i)!} = \binom{n+1}{i}.
\end{aligned}$$

Puis, par l'inégalité triangulaire,

$$|P(n+1)| = \left|\sum_{i=0}^{n} P(i)L_i(n+1)\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n} |P(i)L_i(n+1)|$$
$$\leqslant \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} = 2^{n+1} - 1.$$

On aurait également pu appliquer le résultat concernant $P(-1)$ au polynôme $Q = P(n - X)$ qui satisfait les mêmes hypothèses que P.

Exercice 1.2 : Polynôme et racines n-ièmes

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{Z}$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.
1. Calculer $\sum_{x \in \mathbb{U}_n} x^p$.
2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 1$. On suppose avoir $M > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{U}_n, \quad |P(x)| \leqslant M.$$

Montrer que les coefficients de P sont bornés par M.

1. Il s'agit d'un simple calcul d'une somme géométrique, il suffit de bien se souvenir de l'énumération classique de $\mathbb{U}_n$.

Lors du calcul d'une somme géométrique, il est indispensable de bien distinguer le cas où la raison vaut 1.

On sait que $\mathbb{U}_n$ est l'ensemble de $\mathrm{e}^{2ik\pi/n}$, k variant entre 0 et $n - 1$. Ainsi, si p n'est pas un multiple de n, on a $e^{2ip\pi/n} \neq 1$ et donc :

$$\sum_{x \in \mathbb{U}_n} x^p = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{2ik\pi/n}\right)^p = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{2ikp\pi/n} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{2ip\pi/n}\right)^k$$
$$= \frac{1 - \mathrm{e}^{2ip\pi}}{1 - \mathrm{e}^{2ip\pi/n}} = 0$$

Si maintenant p est un multiple de n, on a

$$\sum_{x \in \mathbb{U}_n} x^p = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{2ik\pi/n}\right)^p = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{2ikp\pi/n} = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n.$$

2. Comme P est de degré inférieur ou égal à $n-1$, il s'écrit sous la forme $\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$.
Pour isoler le coefficient de degré k, on pense, avec la question précédente, à regarder la somme de $P(x)x^{-k}$ pour $x \in \mathbb{U}_n$: les puissances autres que k vont s'annuler, et il ne restera que $n\,a_k$.

Comme P est de degré inférieur ou égal à $n-1$, on a $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que :

$$P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k.$$

Pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$, on a, d'après la question précédente,

$$\sum_{x\in\mathbb{U}_n} P(x)x^{-k} = \sum_{x\in\mathbb{U}_n} \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^{j-k} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \sum_{x\in\mathbb{U}_n} x^{j-k} = na_k$$

puisque pour $j \neq k$, $j-k$ n'est pas un multiple de n.
Ainsi, par l'inégalité triangulaire :

$$|a_k| = \frac{1}{n}\left|\sum_{x\in\mathbb{U}_n} P(x)x^{-k}\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{x\in\mathbb{U}_n} \left|P(x)x^{-k}\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{x\in\mathbb{U}_n} M = M.$$

Exercice 1.3 : Utilisation d'un polynôme annulateur (PSI)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & -6 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer un polynôme annulateur de A.
2. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
3. Exprimer A^k en fonction de A et I_3 pour tout $k \in \mathbb{N}$.

1. Pour déterminer un polynôme annulateur de A, on commence par calculer A^2 et on cherche si on peut l'exprimer comme combinaison linéaire de A et I_3.
Ici, dans le calcul de A^2, on reconnait en-dehors de la diagonale les coefficients de $6A$.
On calcule ensuite $A^2 - 6A$ et on constate qu'il s'agit d'une matrice scalaire.

On calcule

$$A^2 = \begin{pmatrix} 10 & 6 & -12 \\ 18 & 22 & -36 \\ 6 & 6 & -8 \end{pmatrix}.$$

Par suite, on trouve $A^2 - 6\,A = -8\,\mathrm{I}_3$, donc $A^2 - 6\,A + 8\,\mathrm{I}_3 = 0$ et $X^2 - 6\,X + 8$ est un polynôme annulateur de A.

On aurait pu utiliser le théorème de Cayley-Hamilton et calculer le polynôme caractéristique de A pour obtenir un autre polynôme annulateur. Cependant ce polynôme est de degré 3, et complique les calculs que nous allons mener par la suite.

2. On montre que A est inversible et on exhibe son inverse en isolant d'un côté le terme en I_3 dans l'équation $A^2 - 6\,A + 8\,\mathrm{I}_3 = 0$.

De $A^2 - 6\,A + 8\,\mathrm{I}_3 = 0$, on déduit que

$$\frac{1}{8}(6\,\mathrm{I}_3 - A)\,A = \mathrm{I}_3$$

donc A est inversible, d'inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{8}(6\,\mathrm{I}_3 - A) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

On sait qu'une matrice carrée est inversible si et seulement si elle est inversible à droite ou à gauche. Il est donc inutile de vérifier que le produit dans l'autre sens donne aussi I_3.

3. Pour calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$, on exploite le polynôme annulateur de A calculé au 1 ($P = X^2 - 6\,X + 8$) comme vu dans le cours.
On cherche le reste R dans la division euclidienne de X^k par P : $X^k = PQ + R$. Comme R est de degré plus petit que 1, il est de la forme $aX + b$, et on trouve a et b en évaluant aux deux racines de P, qui sont 2 et 4.
On résout alors le système associé pour trouver a et b, puis R. On aura alors

$$A^k = P(A)Q(A) + R(A) = R(A).$$

Soit $k \in \mathbb{N}$, notons $X^k = PQ + R$ la division euclidienne de X^k par le polynôme $P = X^2 - 6\,X + 8$.
Comme P est de degré 2, $\deg(R) \leqslant 1$ et R est de la forme $aX + b$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Comme P a pour racines 2 et 4, on en déduit qu'on a le système :

$$\begin{cases} 2a + b = 2^k \\ 4a + b = 4^k \end{cases}$$

En effectuant $L_2 - L_1$, on trouve $2a = 4^k - 2^k$, donc $a = \dfrac{4^k - 2^k}{2}$ et

$$b = 2^k - 2a = 2^k - (4^k - 2^k) = 2^{k+1} - 4^k.$$

Ainsi, comme $A^k = P(A)Q(A) + R(A) = R(A)$, on trouve :

$$A^k = \frac{4^k - 2^k}{2} A + (2^{k+1} - 4^k)\,\mathrm{I}_3.$$

Exercice 1.4 : Somme de projecteurs

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient $p_1, \ldots, p_n$ des projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie tels que $p_1 + \ldots + p_n = \mathrm{Id}_E$.
1. Montrer que pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathrm{rg}(p_i) = \mathrm{tr}(p_i)$.
2. Montrer que $E = \mathrm{Im}(p_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Im}(p_n)$.

1. Pour calculer la trace de l'un des p_i, il faut calculer sa matrice dans une base de E. On choisit une base adaptée à la décomposition $E = F_i \oplus G_i$, si p_i projette sur F_i parallèlement à G_i.

Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. Notons F_i et G_i les sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F_i \oplus G_i$, et que p_i projette sur F_i parallèlement à G_i.
Soit $(e_1, \ldots, e_q)$ une base de F_i et $(e_{q+1}, \ldots, e_n)$ une base de G_i. Alors $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.
Pour $k \in \{1, \ldots, q\}$, on a $p_i(e_k) = e_k$. Pour $k \in \{q+1, \ldots, n\}$, on a $p_i(e_k) = 0$.
Dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$, la matrice de p_i est donc

$$\begin{pmatrix} I_q & 0_{q,n-q} \\ 0_{n-q,q} & 0_{q,q} \end{pmatrix}$$

et $\mathrm{tr}(p_i) = q = \dim(F_i)$. Comme $F_i = \mathrm{Im}(p_i)$, on obtient $\mathrm{tr}(p_i) = \mathrm{rg}(p_i)$.

Il est toujours utilise de se souvenir que si p est un projecteur, il projette sur $F = \mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $G = \mathrm{Ker}(p)$.

2. La question précédente nous donne immédiatement une information sur les dimensions : la somme des rangs de p_i est la somme de leurs traces, qui est $\mathrm{tr}(\mathrm{Id}_E)$ (par linéarité de la trace) donc qui vaut $d = \dim(E)$.
Il suffit donc de montrer que la somme est directe, ou qu'elle vaut E. L'hypothèse nous permettra de montrer plus facilement le fait qu'elle vaut E.

Soit $x \in E$. On a $x = p_1(x) + \cdots + p_n(x)$ par hypothèse, donc

$$x \in \mathrm{Im}(p_1) + \cdots + \mathrm{Im}(p_n).$$

Comme $\mathrm{Im}(p_1) + \cdots + \mathrm{Im}(p_n)$ est clairement inclus dans E, on en déduit que

$$\mathrm{Im}(p_1) + \cdots + \mathrm{Im}(p_n) = E.$$