Mathématiques

IUT 1re année

2e édition

Thierry Alhalel
Professeur à l'IUT de Blagnac

Florent Arnal
Professeur à l'IUT de Bordeaux

Laurent Chancogne
Professeur à l'INP de Bordeaux

DUNOD

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.
Le Code de la propriété intellectuelle du 1er juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.
Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

DANGER
LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

© Dunod, Paris, 2017
11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-076552-2

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Chapitre 1. Notions de base **1**

1.1 Généralités sur les fonctions 1

1.1.1 Domaine de définition 1

1.1.2 Propriétés graphiques d'une fonction 2

1.1.3 Parité d'une fonction 3

1.1.4 Périodicité 4

1.1.5 Courbes de fonctions liées à une fonction donnée 5

1.2 Trigonométrie 6

1.3 Les nombres complexes 11

1.3.1 Introduction 11

1.3.2 Généralités 11

1.3.3 Forme trigonométrique 12

1.3.4 Forme exponentielle 14

1.3.5 Résolution d'équations 16

1.3.6 Nombres complexes et géométrie 20

1.4 Fonctions usuelles 21

1.4.1 La fonction logarithme népérien 21

1.4.2 Fonctions exponentielles 21

1.5 Limites de fonctions 23

1.5.1 Limites à droite et à gauche 23

1.5.2 Limites des fonctions usuelles 23

1.5.3 Opérations sur les limites 24

1.5.4 Théorèmes de comparaison 26

1.5.5 Asymptotes à une courbe 27

1.6 Continuité et dérivation 28

1.6.1 Dérivation 28

1.6.2 Continuité 36

1.7 Généralités sur le calcul intégral 38
1.7.1 Définition de l'intégrale de Riemann 39
1.7.2 Primitives et intégrales 40
1.7.3 Propriétés de l'intégrale 41
1.7.4 Applications de l'intégrale : valeurs moyenne et efficace 42
1.7.5 Intégration par parties 43
1.8 Suites numériques 45
1.8.1 Généralités 45
1.8.2 Suites arithmétiques et géométriques 46
1.8.3 Variations 47
1.8.4 Suites majorées, minorées 48
1.8.5 Convergence 48
1.9 Exercices pour s'entraîner 50
1.9.1 Exercices de trigonométrie 50
1.9.2 Exercices sur les complexes 52
1.9.3 Exercices sur les fonctions 54
1.9.4 Exercices d'intégration 56
1.9.5 Exercices sur les suites 57

Chapitre 2. Analyse 61

2.1 Fonctions réciproques 61
2.1.1 Généralités 61
2.1.2 Fonctions monotones 61
2.1.3 Représentation graphique dans un repère orthonormé 62
2.1.4 Fonctions réciproques des fonctions trigonométriques 63
2.2 Méthodes de calcul intégral 69
2.2.1 Changement de variable 69
2.2.2 Cas de certaines fractions rationnelles 70
2.3 Notion d'intégrale généralisée 80
2.3.1 Intégrale d'une fonction bornée sur un intervalle non borné 80
2.3.2 Intégrale d'une fonction non bornée sur un intervalle borné 83
2.4 Suites récurrentes linéaires numériques 84
2.4.1 Suites récurrentes linéaires d'ordre 1 84
2.4.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 85
2.5 Développements limités 88
2.5.1 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis 89
2.5.2 Formules de Taylor 90
2.5.3 Développements limités 91

2.5.4 DL en un réel non nul. Développements asymptotiques 94
2.5.5 Applications 95
2.5.6 Exercices 96
2.6 Résolution d'équations différentielles du 1er ordre 101
2.6.1 Qu'est-ce qu'une équation différentielle ? 101
2.6.2 Comment la résoudre ? Présence et absence des conditions initiales 101
2.6.3 Où trouve-t-on des équations différentielles ? 102
2.6.4 Équations différentielles du 1er ordre à variables séparables 102
2.6.5 Équations différentielles linéaires du 1er ordre avec second membre simple 103
2.6.6 Équations différentielles linéaires du 1er ordre et méthode de Lagrange 105
2.7 Résolution d'équations différentielles du 2e ordre 110
2.7.1 Généralités sur les équations différentielles linéaires du second ordre 110
2.7.2 Où trouve-t-on des équations du second ordre ? 111
2.7.3 Équations différentielles linéaires du 2nd ordre à coefficients constants sans second membre 111
2.7.4 Solution particulière de l'équation avec second membre 113

Chapitre 3. Algèbre linéaire 117

3.1 Matrices et calcul matriciel 117
3.1.1 Définition et interprétation des matrices 117
3.1.2 Utilité d'une matrice 118
3.1.3 Opérations simples sur les matrices 119
3.1.4 Multiplication de matrices entre elles 120
3.1.5 Quelques propriétés des opérations sur les matrices 121
3.1.6 Matrice transposée 122
3.1.7 Matrices carrées (n, n) 123
3.1.8 Matrices carrées inversibles 124
3.2 Système linéaire d'équations-algorithme du pivot de Gauss 135
3.2.1 Position du problème 135
3.2.2 Écriture matricielle du système 135
3.2.3 Algorithme ou méthode du pivot de Gauss 136
3.3 Déterminants de matrices carrées 143
3.3.1 Calcul pour des matrices carrées d'ordre $n = 2$ et $n = 3$ 143
3.3.2 Propriétés générales des déterminants 144
3.3.3 Cas des matrices carrées $n > 3$: mineurs et cofacteurs 144

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit.

3.3.4 Application aux systèmes linéaires à *n* équations et *n* inconnues 146
3.4 Espaces vectoriels 150
3.4.1 Introduction 150
3.4.2 Définitions et exemples 152
3.4.3 Sous-espaces vectoriels 154
3.5 Familles libres et liées 159
3.5.1 Combinaisons linéaires et familles génératrices 159
3.5.2 Familles libres, bases et dimension 160
3.5.3 Représentation matricielle de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ 164
3.5.4 Exercices 166
3.6 Applications linéaires 171
3.6.1 Introduction 171
3.6.2 Image et noyau d'une application linéaire 172
3.6.3 Matrices et applications linéaires 173
3.6.4 Injections, surjections, bijection 175
3.6.5 Applications linéaires et changement de base 177
3.6.6 Exercices 178
3.7 Polynômes et fractions rationnelles 185
3.7.1 Polynômes 185
3.7.2 Fractions rationnelles 188

Chapitre 4. Mathématiques et solution logicielle 197

4.1 Utilisation d'un logiciel de calcul formel : Maxima 197
4.1.1 Présentation de Maxima 197
4.1.2 Généralités 198
4.1.3 Exemples de calculs effectués par Maxima 198
4.2 Résolution approchée d'équations non linéaires 207
4.2.1 Méthodes itératives 207
4.2.2 Méthode de Newton (ou méthode de la tangente) 212
4.2.3 Comparaison avec la méthode de la dichotomie 216
4.3 Algorithme d'Euler 222
4.3.1 Mise en jambes et principe de l'algorithme 222
4.3.2 Algorithme d'Euler 224
4.3.3 Sensibilité de la méthode d'Euler 226
4.3.4 Programmer Euler avec MAXIMA 228

Exercices d'entraînement 231

Notions de base 1

Objectifs

- Rappeler certaines notions, vues en Terminale, dont une bonne maîtrise est indispensable pour aborder sereinement les chapitres suivants
- Rappeler les notions fondamentales de l'analyse
- Revoir les connaissances de base sur l'algèbre des nombres complexes et le plan complexe

Conseils

- Apprenez les formules rappelées dans ce chapitre
- Entraînez-vous sur des exercices

1.1 GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

Les fonctions seront utilisées fréquemment, notamment pour modéliser des phénomènes continus.

1.1.1 Domaine de définition

Définition 1.1

On appelle fonction numérique d'une variable réelle toute application dont les ensembles de départ et d'arrivée sont des ensembles de réels.

On notera :
$$\begin{aligned} f : \quad & D \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto f(x) \end{aligned}$$

L'ensemble D est appelé l'ensemble de définition de f.

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont des sous-ensembles particuliers de $\mathbb{R}$.
Dans le cas où la fonction n'est connue que par l'écriture de $f(x)$, on sous-entend que *le domaine de définition est l'ensemble de tous les réels x tels que $f(x)$ existe*.

Exercice 1 : Recherche d'un domaine de définition

Déterminez l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3}{\sqrt{x^2 - 4}}$.

Solution

$f(x)$ existe si et seulement si $x^2 - 4 > 0$ (l'expression sous le radical doit être positive et le dénominateur doit être non nul). Considérons le polynôme $x^2 - 4$. Ce polynôme admet deux racines : – 2 et 2. On rappelle qu'un trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ à l'intérieur des racines. Ici, $a = 1$ donc $x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$.
On peut donc conclure que le domaine de définition de f est : $]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$.

1.1.2 Propriétés graphiques d'une fonction

On se place dans un repère **orthonormal** du plan $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Définition 1.2

Soit f une fonction définie sur un ensemble I.
L'ensemble des points M de coordonnées $M(x;f(x))$, $x \in I$, est appelé **courbe représentative** de f ou **graphe** de f.
La courbe représentative de f a pour équation $y = f(x)$.

Exemple : Représentation graphique de la fonction « Partie entière »

La fonction partie entière, notée E, est définie sur $\mathbb{R}$ par $E(x) = n$ pour tout x tel que $n \leq x < n + 1$ où $n \in \mathbb{N}$.
Par exemple, on a : $E(0) = 0$; $E(0{,}5) = 0$ et $E(1) = 1$.
La représentation graphique de cette fonction est la suivante :

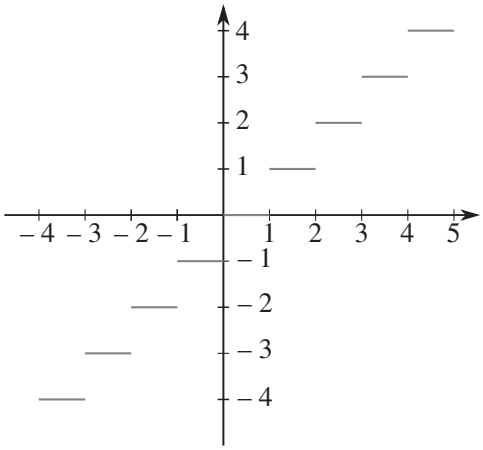

Figure 1.1 Représentation de la fonction « Partie entière »

1.1.3 Parité d'une fonction

Définition 1.3

Un ensemble D de $\mathbb{R}$ est centré en 0 si $\forall x \in D, -x \in D$.

Définition 1.4

Soit f une fonction dont le domaine de définition D est centré en 0.
La fonction est **paire** si $\forall x \in D, f(-x) = f(x)$.

Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de f est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.

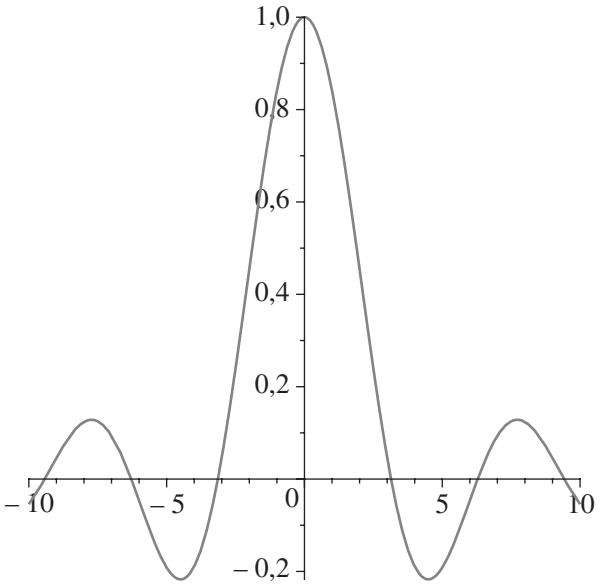

Figure 1.2 Courbe représentant une fonction paire

Définition 1.5

Soit f une fonction réelle dont le domaine de définition D est centré en 0.
La fonction f est dite **impaire** si $\forall x \in D, f(-x) = -f(x)$.

© Dunod – Toute reproduction non autorisée est un délit.

Dans ce cas, la courbe représentative de f est **symétrique par rapport à l'origine** O du repère.

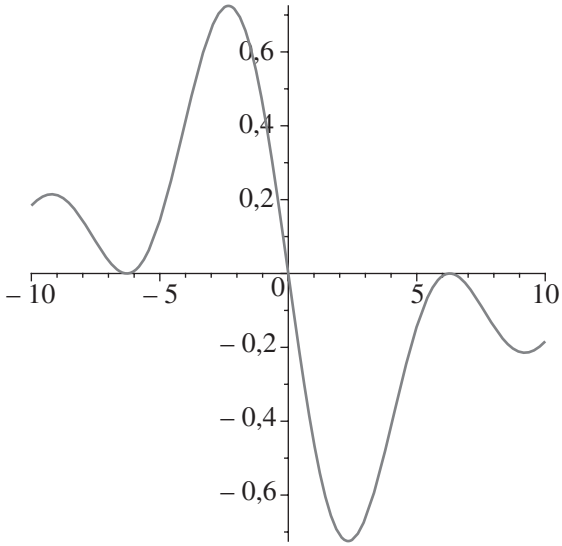

Figure 1.3 Courbe représentant une fonction impaire

- Si f est une fonction impaire définie en 0, alors $f(-0) = -f(0)$ donc $f(0) = 0$.
- Pour l'étude d'une fonction paire ou impaire, on peut donc restreindre l'intervalle d'étude.

1.1.4 Périodicité

Définition 1.6

Soit f une fonction réelle dont le domaine de définition est $\mathbb{R}$.
La fonction f sera dite périodique de période T si T est le plus petit réel positif tel que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x + T) = f(x)$.

Conséquences

En conséquence, on peut restreindre l'étude de la fonction f à un intervalle I de longueur T.
La courbe représentative de f sera obtenue à partir de l'arc d'équation :

$$\begin{cases} y = f(x) & \text{si } x \in I \\ y = 0 & \text{si } x \notin I \end{cases}$$ par des translations de vecteurs $kT\vec{i}$ avec k entier relatif.

Exercice 2

Montrez que la fonction $f : x \mapsto x - E(x)$ est une fonction périodique dont on donnera la période. Représentez cette fonction.

Solution

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel, on a :
$f(x+1) = (x+1) - E(x+1) = (x+1) - [E(x)+1] = x - E(x) = f(x)$.
Avant de conclure sur la périodicité de f, il faut s'assurer que 1 est le plus petit réel T tel que, pour tout réel x, $f(x+T) = f(x)$.
En particulier, on doit avoir : $f(T) = f(0)$.
Or, si $0 < T < 1$ alors $f(T) = T - E(T) = T$ et $f(0) = 0$ donc $f(T) \neq f(0)$.
La fonction *f* est donc périodique de période 1. Il suffit de la représenter sur [0;1[, en utilisant que sur cet intervalle $f(x) = x$, puis d'effectuer des translations de vecteurs $k\vec{i}, k \in \mathbb{Z}$. La représentation graphique est la suivante :

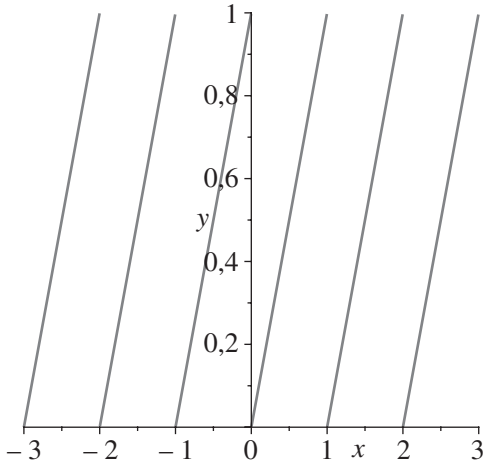

Figure 1.4

1.1.5 Courbes de fonctions liées à une fonction donnée

Nous allons, dans cette partie, considérer les fonctions du type $x \mapsto f(x) + \lambda$ et $x \mapsto f(x+\lambda)$.

Théorème 1.1

La courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(x) + \lambda$ est l'image de la courbe représentative de *f* par la translation de vecteur $\lambda\vec{j}$.
La courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(x+\lambda)$ est l'image de la courbe représentative de *f* par la translation de vecteur $-\lambda\vec{i}$.

© Dunod – Toute reproduction non autorisée est un délit.

Exercice 3

Déterminez une expression « envisageable » de la fonction g dont la courbe est donnée ci-dessous (on fera le lien avec la fonction « Inverse »).

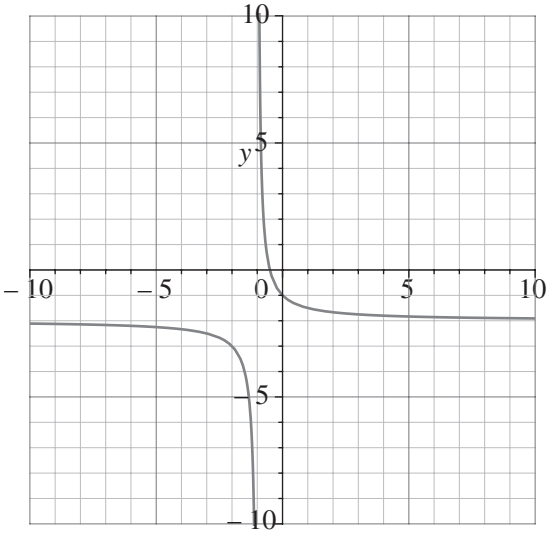

Figure 1.5

Solution

Cette courbe semble être l'image de la courbe de la fonction « Inverse » $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ par la translation de vecteur $-\vec{i} - 2\vec{j}$ qu'on peut décomposer en deux translations : l'une de vecteur $-\vec{i}$ et l'autre de vecteur $-2\vec{j}$.

La translation de vecteur $-\vec{i}$ est associée à $f(x+1) = \dfrac{1}{x+1}$. La translation de vecteur $-2\vec{j}$ conduit à considérer : $g(x) = f(x+1) - 2 = \dfrac{1}{x+1} - 2 = \dfrac{-2x-1}{x+1}$.

1.2 TRIGONOMÉTRIE

Pour tout ce chapitre, le plan sera rapporté au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Définition 1.7

On appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O, de rayon 1, orienté dans le sens direct.

Définition 1.8
Soit M un point sur ce cercle, tel que $\left(\vec{i};\overrightarrow{OM}\right) = x$.
On appelle cosinus de l'angle orienté $\left(\vec{i};\overrightarrow{OM}\right)$ l'abscisse de M.
On appelle sinus de l'angle $\left(\vec{i};\overrightarrow{OM}\right)$ l'ordonnée de M.

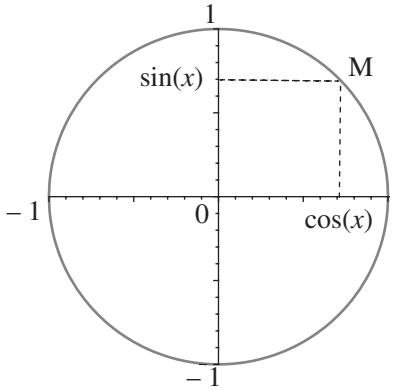

Figure 1.6 Cercle trigonométrique

L'essentiel

- $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$.
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- Les fonctions $\cos : x \mapsto \cos(x)$ et $\sin : x \mapsto \sin(x)$ sont définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[-1;1]$.
- Ces fonctions sont périodiques, de période $T = 2\pi$.
- La fonction sin est impaire ; la fonction cos est paire.
- On a les formules suivantes : $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ et $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$.
- La formule $\cos(x) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ montre que la courbe d'équation $y = \cos(x)$ se déduit de la courbe d'équation $y = \sin(x)$ par la translation de vecteur $-\dfrac{\pi}{2}\vec{i}$.

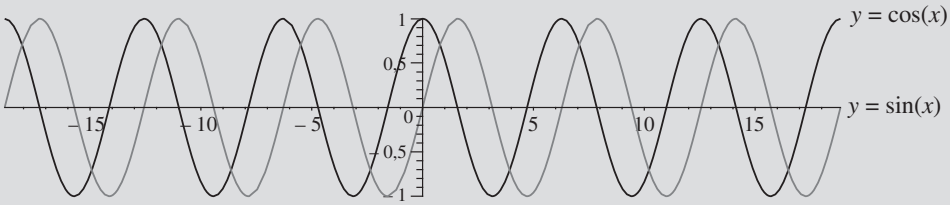

Figure 1.7 Courbes représentatives des fonctions sin et cos

© Dunod – Toute reproduction non autorisée est un délit.

Définition 1.9

La fonction tangente, notée tan, est définie par $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ pour tout x tel que $\cos(x) \neq 0$.

Son ensemble de définition est $\mathbb{R}\text{-}\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\,,\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D'après les propriétés vues précédemment, on a :

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$$

et $\tan(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \dfrac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$.

Ainsi, cette fonction est périodique, de période π, et impaire. Il suffit de l'étudier sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

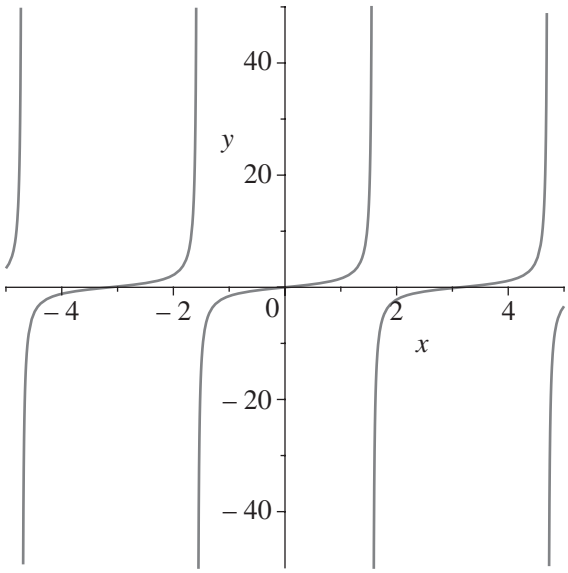

Figure 1.8 Représentation graphique de la fonction tan

Formules de trigonométrie		
$\cos(-x) = \cos(x)$	$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$	$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
$\sin(-x) = -\sin(x)$	$\sin(\pi - x) = \sin(x)$	$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$		$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$		$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$

Valeurs remarquables					
Valeur de x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non définie

Formules d'addition et duplication	
$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$	$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$
$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$	$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$	$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$

Formules de développement et de factorisation	
$\cos a \cos b = \frac{\cos(a + b) + \cos(a - b)}{2}$	$\sin a \cos b = \frac{\sin(a + b) + \sin(a - b)}{2}$
$\sin a \sin b = \frac{\cos(a - b) - \cos(a + b)}{2}$	
$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p + q}{2}\right)\cos\left(\frac{p - q}{2}\right)$	$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p + q}{2}\right)\sin\left(\frac{p - q}{2}\right)$
$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p + q}{2}\right)\cos\left(\frac{p - q}{2}\right)$	$\sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p + q}{2}\right)\sin\left(\frac{p - q}{2}\right)$

© Dunod – Toute reproduction non autorisée est un délit.

Équations trigonométriques

$$\cos a = \cos b \Leftrightarrow b = a + 2k\pi \quad \text{ou} \quad b = -a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$\sin a = \sin b \Leftrightarrow b = a + 2k\pi \quad \text{ou} \quad b = \pi - a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$\tan a = \tan b \Leftrightarrow b = a + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Exercice 4

On considère un signal continu donné par la fonction f définie par : $f(t) = a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t)$.

a. *Transformez $f(t)$ sous la forme $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ où $A > 0$.*

b. *Exprimez sous la forme précédente les fonctions définies par :*
$f_2(t) = \sin(t) + \cos(t)$ et $f_3(t) = \sin(t) - \cos(t)$.

c. *Tracez sur un même graphe les courbes représentatives des fonctions f_1, f_2 et f_3 où f_1 est définie par : $f_1(t) = \sqrt{2}\sin(t)$.*

Solution

a. On a : $A\sin(\omega t + \varphi) = A[\sin(\omega t)\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\cos(\omega t)]$ donc
$A\sin(\omega t + \varphi) = [A\cos(\varphi)]\sin(\omega t) + [A\sin(\varphi)]\cos(\omega t)$.
En identifiant, on obtient : $a = A\cos(\varphi)$ et $b = A\sin(\varphi)$ soit :
$\cos(\varphi) = \dfrac{a}{A}$ et $\sin(\varphi) = \dfrac{b}{A}$.

En utilisant $\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$, il vient $\left(\dfrac{a}{A}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{A}\right)^2 = 1$ soit $a^2 + b^2 = A^2$.

A correspondant à l'amplitude du signal, on le prend positif.
On a donc : $A = \sqrt{a^2 + b^2}$.

b. Considérons $f_2(t) = \sin(t) + \cos(t)$. D'après ce qui précède, en considérant $a = b = 1$, on obtient :
$A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$, $\cos(\varphi) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\varphi) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. On prend : $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.
On a donc : $f_2(t) = \sqrt{2}\sin\left(t + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Par un raisonnement similaire, on obtient : $f_3(t) = \sqrt{2}\sin\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

c. La première courbe (en rose) s'obtient en traçant une courbe similaire à celle de sin mais avec une amplitude de $\sqrt{2}$, au lieu de 1.
Les courbes de f_2 et f_3 (respectivement en gris et en noir) se déduisent de la première à l'aide de translations de vecteurs respectifs : $-\dfrac{\pi}{4}\vec{i}$ et $\dfrac{\pi}{4}\vec{i}$.

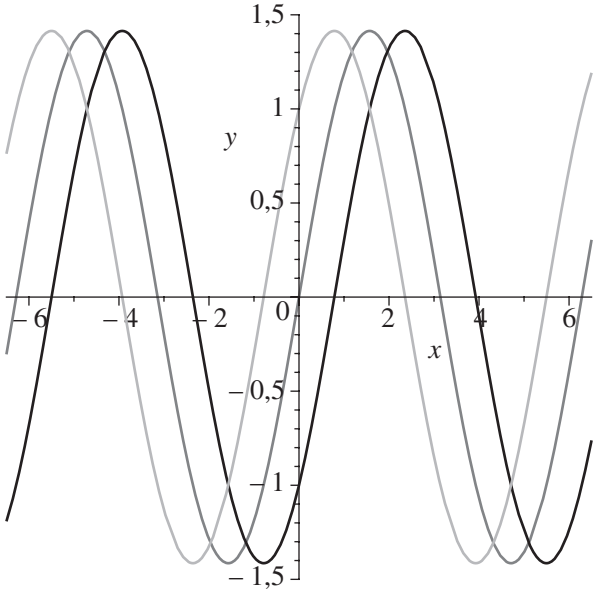

Figure 1.9 Courbes représentatives des trois fonctions

1.3 LES NOMBRES COMPLEXES

1.3.1 Introduction

Les nombres complexes permettent de résoudre certaines équations n'admettant pas de solution réelle. Ils sont très utiles en géométrie mais aussi dans certains domaines de la physique, notamment en électronique (notions de phase, amplitude d'un signal, gain…).

On définit le nombre imaginaire i tel que $i^2 = -1$. Nous tenons à préciser que, dans certaines disciplines, par exemple en électronique, on remplace la lettre i par la lettre j (i étant associée à l'intensité d'un courant).

L'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, est tel que : $\mathbb{C} = \{a + ib, (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

Enfin, on munit cet ensemble des lois « + » et « × » telles que celles-ci prolongent les lois de $\mathbb{R}$. Il est à noter que : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

1.3.2 Généralités

Définition 1.10

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe ($(a, b) \in \mathbb{R}^2$).
$a + ib$ est appelée forme algébrique de z.
La partie réelle de z est le réel, noté $\mathrm{Re}(z)$, défini par $\mathrm{Re}(z) = a$.
La partie imaginaire de z est le réel, noté $\mathrm{Im}(z)$, défini par $\mathrm{Im}(z) = b$.

© Dunod – Toute reproduction non autorisée est un délit.

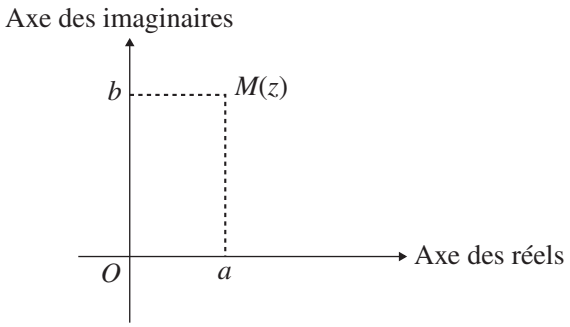

Figure 1.10

Propriété 1.1

Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

Ainsi : $a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$.

Définition 1.11

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe ($(a, b) \in \mathbb{R}^2$).

Le nombre complexe $\overline{z}$, conjugué de $z = a + ib$, est défini par $\overline{z} = a - ib$.

Propriété 1.2

Pour tous nombres complexes z et z', n étant un entier, on a :

- $\overline{(z + z')} = \overline{z} + \overline{z'}$ $\quad \overline{(z \times z')} = \overline{z} \times \overline{z'}$ $\quad \overline{z^n} = (\overline{z})^n$ $\quad \overline{\overline{z}} = z$
- si $z \neq 0$ alors : $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ et $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$ et $\begin{cases} z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z) \\ z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z) \end{cases}$

1.3.3 Forme trigonométrique

Module et argument d'un nombre complexe

Définition 1.12

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe ($(a, b) \in \mathbb{R}^2$).

Le module de z , noté $|z|$, est défini par : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Géométriquement, le module de $|z|$ correspond à la longueur OM.

Définition 1.13

Soit z un nombre complexe non nul.
Un argument de z est le réel, noté $\arg(z)$, correspondant à une mesure de l'angle orienté $(\vec{u};\overrightarrow{OM})$.

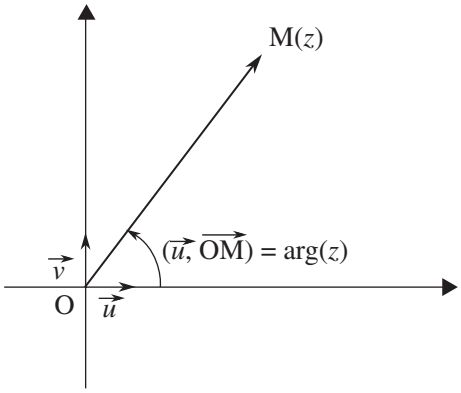

Figure 1.11

Propriété 1.3

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

$|zz'| = |z||z'|$ et $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \quad (2\pi)$

$|\bar{z}|=|z|$ et $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \quad (2\pi)$

$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ et $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \quad (2\pi)$

$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ et $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \quad (2\pi)$

Notation et relations entre les formes trigonométriques et algébriques

Propriété 1.4

Soit z un nombre complexe non nul, on note $\rho = |z|$ et θ un argument de z.

On a : $z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ avec $\begin{cases} a = \rho\cos(\theta) \\ b = \rho\sin(\theta) \end{cases}$ soit $\begin{cases} \rho = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos\theta = \dfrac{a}{\rho} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{\rho} \end{cases}$

© Dunod – Toute reproduction non autorisée est un délit.

Exemple

Considérons le nombre complexe $z = -1 + \sqrt{3}i$.

$|z| = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = 2$. On a donc : $\cos\theta = \dfrac{-1}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Un argument de z est donc $\dfrac{2\pi}{3}$.

On a donc : $z = 2\left[\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right]$.

1.3.4 Forme exponentielle

Définition 1.14

Pour tout réel θ, on note : $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Ainsi, si $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ alors $z = \rho\mathrm{e}^{i\theta}$ (avec $\rho = |z|$).

Propriété 1.5

Soient $z = \rho\mathrm{e}^{i\theta}$ et $z' = \rho'\mathrm{e}^{i\theta'}$ deux nombres complexes non nuls.

$zz' = \rho\rho'\mathrm{e}^{i(\theta+\theta')}$; $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{\rho}\mathrm{e}^{-i\theta}$; $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{\rho}{\rho'}\mathrm{e}^{i(\theta-\theta')}$; $\overline{z} = \rho\mathrm{e}^{-i\theta}$.

Propriété 1.6 (formule de Moivre)

Soient θ un réel et n un entier relatif.

On a : $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

Exercice 5

Montrez la propriété précédente.

Solution

$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{i\theta n} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

Propriété 1.7 (formules d'Euler)

Pour tout réel θ, on a : $\cos\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}$.