

PHYSIQUE
CHIMIE

PHYSIQUE CHIMIE

PTSI

Jean-Michel Bauduin • Thierry Bars • Mélanie Cousin • Yves Josse •
Frédéric Legrand • Josiane Manasses • Hélène Michel

DUNOD

Avec la collaboration scientifique de Nicolas Champavert

Conception et création de couverture : Dominique Raboin

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du

Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 2017

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-076219-4

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Avant-propos

« Quiconque a pensé pensera toujours, et l'entendement, une fois exercé à la réflexion, ne peut plus rester au repos. »

J.-J. Rousseau, *Émile, ou de l'éducation*

Les sciences physiques

Les sciences physiques ont pour objectif d'expliquer et de prévoir les phénomènes que nous pouvons observer. Par principe leurs lois, établies dans notre environnement terrestre, ont un caractère universel : valables dans nos laboratoires, elles sont réputées applicables en tout lieu, jusqu'aux confins de l'Univers, à toute date, dans le passé depuis la naissance de celui-ci, dans le présent et dans le futur, le plus lointain soit-il.

L'expérimentation y joue un rôle central. Une théorie, un modèle, ne valent que si leurs prévisions sont en accord avec les résultats expérimentaux, aux incertitudes près.

Expérimentation et développement théorique sont des moteurs qui se relaient l'un l'autre dans l'évolution des connaissances. Il est ainsi des étapes lors desquelles l'expérience permet de mettre en évidence un phénomène qui ne peut être expliqué par les théories existantes. Le travail du scientifique consiste alors à retoucher ces dernières, à les compléter, à en mettre de nouvelles en chantier pour rendre compte du phénomène observé. Il est à l'inverse d'autres étapes lors desquelles l'édifice théorique permet de prévoir un phénomène jusque-là inconnu. Le travail consiste alors à imaginer, à concevoir des expériences permettant de l'observer effectivement ou non et ainsi de confirmer ou d'infirmer certains éléments de l'édifice théorique.

L'histoire des sciences est riche d'exemples tels que mécanique newtonienne et observation du mouvement des planètes, théorie de l'électromagnétisme et prévision de l'existence des ondes électromagnétiques, modèle standard de la physique des particules et prévision de l'existence du boson de Higgs...

L'ouvrage

Son contenu est conforme à celui des programmes en vigueur.

Mais, au-delà de cela, nous avons délibérément pris le parti de faire découvrir au lecteur les concepts, les lois de la physique et de la chimie dans le cadre de problématiques concrètes, en utilisant aussi souvent que possible des résultats expérimentaux. Au travers de cette démarche, notre ambition est de lui donner le goût de l'expérimentation en le sensibilisant à la richesse d'une telle approche.

En cela, **nous avons cherché à mettre en avant l'esprit des programmes**, qui valorisent le travail mené à partir de données expérimentales.

Ainsi, nous avons également voulu **tenir compte de la tendance actuelle des problèmes de concours**, qui évaluent de plus en plus l'aptitude à commenter et à exploiter des résultats expérimentaux.

Toutes les expériences décrites et exploitées, aussi bien dans le cours que dans les exercices, ont été effectivement conçues pour la rédaction de l'ouvrage. Pour la plupart elles ont été mises au point et réalisées par Frédéric Legrand, que nous remercions tous chaleureusement.

Sa structure

La structure de chaque chapitre est la suivante.

- **L'essentiel du cours**, déroulé à partir d'une contextualisation servant de fil conducteur, présentant les concepts essentiels et les méthodes importantes. Des pictogrammes sont utilisés pour en faciliter la lecture :

□ : pour des **questions destinées à structurer l'exposé**, questions qu'un étudiant curieux pourrait être amené à se poser; nous l'incitons d'ailleurs à tenter d'y répondre au moins partiellement avant de poursuivre sa lecture,



! : pour attirer l'attention sur un point important,



💡 : pour mettre en valeur **une remarque** intéressante ou **une astuce**.

- Une **interrogation de cours** sous forme d'un QCM permettant au lecteur de tester rapidement sa compréhension des notions introduites dans l'essentiel du cours.
- Des **exercices** de niveaux progressifs, comprenant des liens avec les méthodes développées en cours (des méthodes vers les exercices et des exercices vers les méthodes) qui permettent une lecture croisée de l'ouvrage.
- Les **corrigés** de l'interrogation de cours et des exercices.

Remerciements

Nous tenons à remercier l'ensemble du personnel du laboratoire de sciences physiques du lycée Chateaubriand de Rennes pour son assistance et ses encouragements dans la réalisation des nombreuses expériences conçues pour cet ouvrage. Nous remercions Joëlle Vidal, professeur de chimie à l'université de Rennes 1, pour ses conseils concernant la partie chimie. Merci également aux collègues qui nous ont fait part de leurs observations. Enfin, ces remerciements ne sauraient être complets sans une mention spéciale à tous nos proches pour leur infinie patience!

Table des matières

Partie 1 Signaux physiques

1	Oscillateur harmonique	7
2	Propagation et superposition des signaux	21
3	Optique géométrique	51
4	Introduction au monde quantique	81
5	Circuits électriques dans l'ARQS	101
6	Circuits linéaires du premier ordre.....	127
7	Oscillateurs amortis	147
8	Oscillateurs en régime sinusoïdal forcé	169
9	Filtrage linéaire	189

Partie 2 Mécanique

10	Cinématique du point et du solide.....	221
11	Loi de la quantité de mouvement.....	249
12	Approche énergétique.....	273
13	Mouvements de particules chargées.....	303
14	Loi du moment cinétique.....	323
15	Champ de force centrale	351

Partie 3 Thermodynamique

16	Système thermodynamique à l'équilibre.....	375
----	--	-----

17 Échanges d'énergie – Premier principe	399
18 Second principe	425
19 Machines thermiques.....	447

Partie 4 Induction et forces de Laplace

20 Champ magnétique et ses actions	469
21 Circuit fixe dans un champ variable	489
22 Circuit mobile dans un champ stationnaire.....	511

Partie 5 Architecture de la matière

23 Atomes et éléments	541
24 Molécules et solvants	569
25 Solides cristallins	593

Partie 6 Transformation de la matière

26 Équilibre thermodynamique d'un système chimique.....	617
27 Évolution temporelle d'un système chimique	635

Partie 7 Transformations chimiques en solution aqueuse

28 Réactions acido-basiques	659
29 Dissolution et précipitation	687
30 Réactions d'oxydo-réduction.....	701
31 Diagrammes potentiel-pH.....	725
Index.....	747

Partie 1

Signaux physiques

Oscillateur harmonique

L'essentiel du cours

Contexte

Les systèmes oscillatoires sont nombreux dans notre quotidien. Il suffit d'observer par sa fenêtre : un enfant joue à la balançoire, un oiseau passe en battant des ailes, une branche d'arbre oscille après le passage d'une rafale de vent, une voisine fait ses vocalises... Bien qu'il s'agisse de phénomènes physiques bien différents, on peut se demander si un même modèle mathématique simple peut les décrire.

Pour tenter de répondre à cette question, nous avons étudié **expérimentalement** trois phénomènes physiques différents : les vibrations d'une branche d'un diapason et le son qu'il émet, ainsi que le mouvement d'une masse accrochée à un ressort.

■ 1 Du signal sinusoïdal...

Considérons une grandeur physique $x(t)$ oscillant de façon sinusoïdale. Elle est décrite par une fonction $x(t) = C \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$, dont la représentation graphique est précisée sur la figure 1.1.

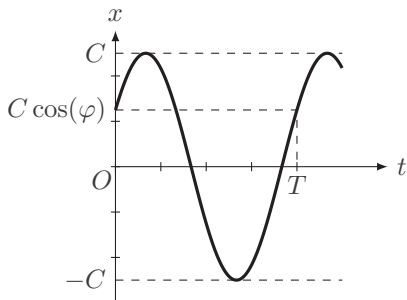


Figure 1.1. Une fonction sinusoïdale.

Quelques éléments de vocabulaire concernant $x(t)$:

- C est l'**amplitude**. Elle est positive et son unité est la même que celle de x .
- T est la **période**. Positive, elle s'exprime en secondes.
- φ est la **phase à l'origine**. Appartenant à l'intervalle $]-\pi, +\pi]$, elle s'exprime en radians.

La phase à l'origine est l'argument du cosinus lorsque $t = 0$. Nous pouvons lire sur le graphe $x(0) = C \cos(\varphi)$.

La fonction cosinus étant 2π -périodique ($\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$), la fonction $x(t)$ est T -périodique. Nous pouvons le vérifier rapidement :

$$x(t + T) = C \cos\left(\frac{2\pi}{T}(t + T) + \varphi\right) = C \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + 2\pi + \varphi\right) = C \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) = x(t)$$

Nous pouvons définir deux autres grandeurs caractérisant la périodicité de la fonction $x(t)$:

- Sa **fréquence** : $f = \frac{1}{T}$. Elle représente le nombre de répétitions du signal par seconde et s'exprime en Hz.

- Sa **pulsation** : $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ (en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$).

On en déduit trois expressions équivalentes de la fonction $x(t)$:

$$x(t) = C \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) = C \cos(2\pi ft + \varphi) = C \cos(\omega t + \varphi)$$

Expérience du diapason (figure 1.2)

Un diapason, emboîté sur sa caisse de résonance (C), est mis en vibration au moyen d'un marteau en caoutchouc. Le son émis est capté avec un microphone M placé à une distance d de l'ouverture de la caisse et relié à un amplificateur non représenté. La position, selon un axe (Ox), d'une branche du diapason est déterminée par intégration temporelle de son accélération $a_x(t)$ mesurée à l'aide d'un accéléromètre A fixé à sa base. Le microphone et l'accéléromètre délivrent des tensions analogiques proportionnelles au volume du son émis, pour l'un et à l'accélération, pour l'autre.

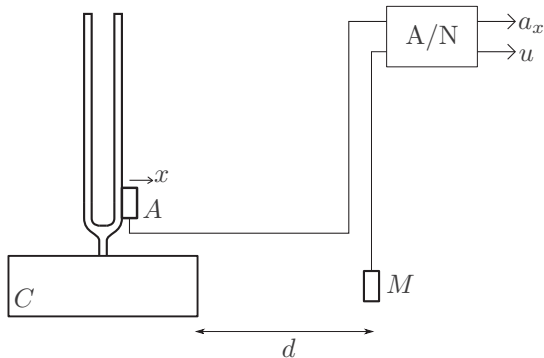


Figure 1.2. Dispositif expérimental.

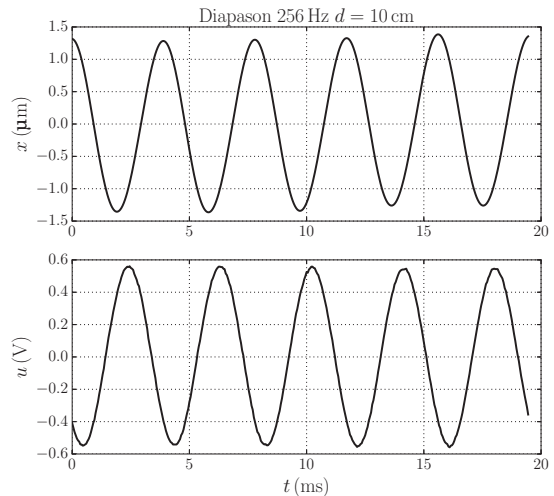


Figure 1.3. Résultats expérimentaux.

Le bloc (A/N) représenté figure 1.2 est un convertisseur analogique-numérique qui permet de convertir les signaux analogiques délivrés par nos capteurs en signaux numériques pouvant être acquis et traités par ordinateur. La double intégration temporelle de l'accélération permettant d'obtenir la position est réalisée à l'aide d'un script Python.

Le déplacement $x(t)$ de la branche du diapason autour de sa position d'équilibre et la tension $u(t)$ à la sortie de l'amplificateur sont représentés sur la figure 1.3. Nous constatons que ces deux signaux ont des allures très proches de celle d'une sinusoïde. Une analyse spectrale, méthode qui sera développée dans le chapitre 2 consacré à la propagation d'un signal, permet de le confirmer. Nous allons donc les modéliser comme étant deux signaux sinusoïdaux.

□ Comment déterminer les caractéristiques de ces signaux sinusoïdaux ?

- Cherchons $x(t)$ sous la forme $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi_x)$.
Sur la courbe $x(t)$ de la figure 1.3, on mesure $T = 3,9 \text{ ms}$, $X_m = 1,3 \mu\text{m}$ et $x(0) = 1,3 \mu\text{m}$.
On en déduit $f = \frac{1}{T} = 2,6 \cdot 10^2 \text{ Hz}$ et $\omega = 2\pi f = 1,6 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Par ailleurs, $x(0) = X_m \cos(\varphi_x) = X_m$ implique que $\cos(\varphi_x) = 1$ et par conséquent $\varphi_x = 0$. Au final, nous avons $x(t) = X_m \cos(\omega t)$ avec $X_m = 1,3 \mu\text{m}$.

- De la même manière, cherchons $u(t)$ sous la forme $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$.

Sur la courbe $u(t)$ de la figure 1.3, on mesure la même période que pour $x(t)$ donc la même fréquence et la même pulsation, et $U_m = 0,55 \text{ V}$. Enfin $u(0) = U_m \cos(\varphi_u) = -0,42 \text{ V}$ permet de déterminer $\cos(\varphi_u) = -0,42/0,55$. On en déduit $\varphi_u = \pm 2,4 \text{ rad}$. Pour choisir entre ces deux valeurs, intéressons-nous au signe de la dérivée de $u(t)$ à $t = 0$. $\frac{du}{dt} = -U_m \omega \sin(\omega t + \varphi_u)$ donc $\frac{du}{dt}(0) = -U_m \omega \sin(\varphi_u)$. La fonction $u(t)$ étant décroissante à $t = 0$, $\sin(\varphi_u) > 0$, et la solution qui convient est $\varphi_u = 2,4 \text{ rad}$. Au final, nous obtenons $u(t) = U_m \cos(\omega t + 2,4)$ avec $U_m = 0,55 \text{ V}$ et $\omega = 2\pi f = 1,6 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Méthode 1.1 : Détermination des caractéristiques d'un signal sinusoïdal

Soit un signal sinusoïdal de la forme $x(t) = C \cos(\omega t + \varphi)$.

- Pour déterminer l'amplitude $C = \frac{z_{\max} - z_{\min}}{2}$, mesurer z_{\max} et z_{\min} .
- Pour déterminer la pulsation ω , mesurer la période T et en déduire $\omega = \frac{2\pi}{T}$.
- Pour déterminer φ , mesurer $z(0) = C \cos(\varphi)$, en déduire $\varphi = \pm \arccos\left(\frac{z(0)}{C}\right)$ puis choisir le bon signe en fonction du sens de variation de $u(t)$ à $t = 0$.

➔ Exercice (1.1)

La fonction $\arccos(\varphi)$ est définie sur l'intervalle $[-1, 1]$ et donne des valeurs sur l'intervalle $[0, \pi]$.



Le signal $x(t) = C \cos(\omega t + \varphi)$ peut être mis sous la forme $x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$.

Pour justifier cette remarque, développons la première expression de $x(t)$:

$$C \cos(\omega t + \varphi) = C \cos(\varphi) \cos(\omega t) - C \sin(\varphi) \sin(\omega t)$$

Par identification à la seconde expression de $x(t)$, nous obtenons :

$$A = C \cos(\varphi) \quad \text{et} \quad B = -C \sin(\varphi) \quad \text{avec} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

Si on connaît C et φ ces relations permettent de déterminer A et B . Si à l'inverse on connaît A et B , on peut en déduire C et φ tels que : $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ et $\tan(\varphi) = -\frac{B}{A}$.



La fonction $\arctan(\varphi)$ est définie sur \mathbb{R} et donne des valeurs sur l'intervalle $]-\pi/2, +\pi/2[$. Pour déterminer φ qui est défini sur $[-\pi, +\pi]$, il est important d'étudier au préalable le signe de $\cos(\varphi) = \frac{A}{C}$ ou de $\sin(\varphi) = -\frac{B}{C}$.

■ 2 ... à l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique

Les lois de la physique se traduisent souvent, comme nous le verrons dans les chapitres suivants, par des équations différentielles, c'est-à-dire des équations faisant intervenir les fonctions étudiées et leurs dérivées. Parmi les équations différentielles que nous pouvons rencontrer, certaines sont chargées de sens pour le physicien. Nous nous proposons d'aller à la découverte de l'une d'elles.

Reprenons le cas d'une fonction $x(t)$ de la forme $x(t) = C \cos(\omega t + \varphi)$. En la dérivant deux fois par rapport au temps, nous obtenons $\frac{dx}{dt} = -\omega C \sin(\omega t + \varphi)$ puis $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 C \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$. Nous en déduisons l'équation différentielle suivante :

$$(1.1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Cette équation est une **équation différentielle linéaire** (c'est une combinaison linéaire de la fonction étudiée et de ses dérivées), **du deuxième ordre** (la dérivée d'ordre le plus élevé est la dérivée seconde) **sans second membre** (on dit aussi **homogène**). Un système physique dont le comportement est régi par cette équation porte le nom d'**oscillateur harmonique**.



Nous venons d'établir qu'une fonction de la forme $x(t) = C \cos(\omega t + \varphi)$ est solution de l'équation 1.1. En fait, on peut montrer que **toute** solution de cette équation peut se mettre sous la forme $x(t) = C \cos(\omega t + \varphi)$, qui constitue donc sa **solution générale**.

Définition : L'oscillateur harmonique

Un oscillateur harmonique est un système dont la grandeur $x(t)$ qui le caractérise vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

ω_0 est la **pulsation propre** de l'oscillateur et se mesure en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$.



Attention aux signes des coefficients : $\frac{d^2x}{dt^2} - \omega_0^2 x = 0$ est aussi une équation différentielle linéaire homogène du second ordre, mais ce n'est pas celle de l'oscillateur harmonique !

Expérience d'une masse accrochée à un ressort (figure 1.4)

Un petit solide (S), de centre de masse M et de masse m , est accroché à une potence par l'intermédiaire d'un ressort vertical. La position de M est repérée sur un axe vertical descendant dont l'origine O est confondue avec sa position d'équilibre.

Le solide (S) étant à l'équilibre sous l'effet de son poids et de la force exercée par le ressort, nous l'avons écarté vers le bas d'une valeur $x_0 = 4,8 \text{ cm}$ et l'avons lâché sans vitesse. Nous avons filmé son mouvement puis, en utilisant un logiciel d'analyse vidéo, nous avons extrait la position $x(t)$ du point M au cours du temps. Enfin, à l'aide de Python, nous avons tracé le graphe de $x(t)$.

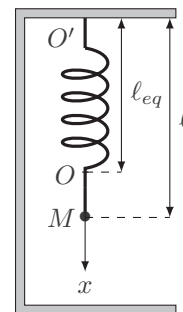


Figure 1.4. Oscillateur mécanique.

Le graphe obtenu est présenté figure 1.5. Nous constatons une allure sinusoïdale qui peut être confirmée par une analyse spectrale, méthode que nous avons déjà évoquée dans l'expérience du diapason et qui sera développée dans le chapitre 2.

Cela nous amène à considérer que le corps (S) accroché au ressort se comporte comme un oscillateur harmonique et que $x(t)$ doit être solution de l'équation différentielle $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$. Nous en déduisons que $x(t)$ peut se mettre sous une des deux formes équivalentes :

$$\begin{cases} x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \\ x(t) = C \cos(\omega_0 t + \varphi) \end{cases}$$

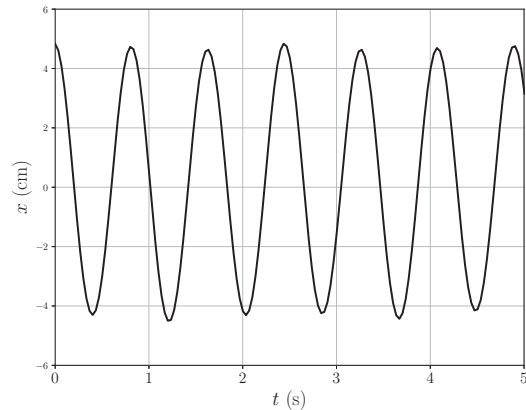


Figure 1.5. Position expérimentale.

Étude théorique du mouvement d'une masse accrochée à un ressort

Une étude théorique nécessite d'être capable d'exprimer la force exercée par le ressort sur le solide (S). Ce ressort est caractérisé par sa constante de raideur k (en $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$) et sa longueur à vide ℓ_0 (en m). Lorsque la longueur ℓ du ressort est égale à sa longueur à vide, le ressort n'exerce aucune force sur le solide. Par contre, si le ressort est étiré ($\ell > \ell_0$) il tire sur le solide, alors que s'il est comprimé ($\ell < \ell_0$) il pousse dessus.

La force exercée par un ressort est donnée par la loi phénoménologique de Hooke.

Définition : Loi de Hooke

La **force de rappel** exercée par un ressort, de constante de raideur k (en $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$) et de longueur à vide ℓ_0 , sur un solide relié en M à l'une de ses extrémités, s'écrit :

$$\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_x$$

où ℓ est la longueur du ressort et \vec{u}_x est le vecteur unitaire dirigé du point de fixation du ressort vers le point M .

Les lois de la mécanique newtonienne, qui seront abordées dans des chapitres ultérieurs, permettent la mise en équations du problème. En repérant la position de M sur un axe vertical descendant dont l'origine est confondu avec sa position d'équilibre, nous sommes amenés à poser $x = \ell - \ell_{eq}$. La loi de la quantité de mouvement (voir chapitre 11) conduit alors à l'équation différentielle $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$. Nous reconnaissons celle de l'oscillateur harmonique et identifions la pulsation propre de notre système à $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Sa période est alors $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$. La masse du corps (S) et la constante de raideur du ressort utilisé valant respectivement $m = 275 \text{ g}$ et $k = 15,7 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, nous trouvons $T = 0,83 \text{ s}$. Cela correspond à la valeur expérimentale que nous pouvons déduire de la courbe de la figure 1.5.

■ 3 Solutions de l'équation différentielle

Lorsque les lois de la physique nous conduisent à une équation différentielle devant être satisfaite par la grandeur étudiée, il nous faut rechercher parmi **l'ensemble des solutions** de cette équation, **celle** qui satisfait aux **conditions initiales** de notre problème.

Reprenons l'expérience de la masse accrochée à un ressort (figure 1.4). Nous savons que $x(t)$, solution de l'équation différentielle $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2x = 0$, est de la forme $x(t) = A \cos(\omega_0t) + B \sin(\omega_0t)$. Nous connaissons par ailleurs les conditions initiales : $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$.

$$x(t) = A \cos(\omega_0t) + B \sin(\omega_0t) \implies \dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0t) + B\omega_0 \cos(\omega_0t)$$

$$\text{Nous en déduisons : } \begin{cases} x(0) = x_0 = A \\ \dot{x}(0) = 0 = B\omega_0 \end{cases} \implies x(t) = x_0 \cos(\omega_0t)$$

Nous pouvons également utiliser la forme $x(t) = C \cos(\omega_0t + \varphi)$:

$$x(t) = C \cos(\omega_0t + \varphi) \implies \dot{x}(t) = -\omega C \sin(\omega_0t + \varphi)$$

$$\text{Nous en déduisons : } \begin{cases} x(0) = x_0 = C \cos(\varphi) \\ \dot{x}(0) = 0 = -\omega_0 C \sin(\varphi) \end{cases} \implies \begin{cases} C \cos(\varphi) = x_0 \\ \sin(\varphi) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \varphi = 0 \\ C = x_0 \end{cases}$$

puisque $x_0 > 0$ et $C > 0$. Nous retrouvons bien le résultat précédent $x(t) = x_0 \cos(\omega_0t)$.



La forme $x(t) = A \cos(\omega_0t) + B \sin(\omega_0t)$ est mieux adaptée aux calculs des constantes d'intégration à partir des conditions initiales que la forme $x(t) = C \cos(\omega_0t + \varphi)$.

Méthode 1.2 : Recherche de la solution de l'équation homogène

L'équation différentielle **homogène** de l'oscillateur harmonique est :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2x = 0$$

- Sa solution générale est $x(t) = A \cos(\omega_0t) + B \sin(\omega_0t) = C \cos(\omega_0t + \varphi)$.
- La solution satisfaisant au problème physique est obtenue en calculant les constantes d'intégration (A, B) ou (C, φ) à partir des conditions initiales.

➔ Exercice (1.2)

□ **Comment le choix de l'origine influe-t-il sur la forme de l'équation différentielle ?**

Reprenons encore une fois notre expérience d'une masse accrochée à un ressort (figure 1.4). Nous pouvons choisir de prendre l'origine de l'axe au point O' où le ressort est accroché à la potence. Dans ce cas, $x(t) = \ell(t)$, $x_{eq} = \ell_{eq}$ et $x(t) = x_{eq} + C \cos(\omega_0t + \varphi)$. En dérivant deux fois par rapport au temps nous obtenons : $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 C \cos(\omega_0t + \varphi)$, soit : $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2(x(t) - x_{eq})$.

Nous aboutissons à une équation différentielle un peu différente de la précédente :

$$(1.2) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2x(t) = \omega_0^2x_{eq}$$

C'est l'équation de l'**oscillateur harmonique avec second membre constant** où ω_0 est la **pulsation propre** de l'oscillateur harmonique et où x_{eq} repère sa **position à l'équilibre**.



On peut montrer que **toute** solution de cette équation peut se mettre sous une des deux formes équivalentes $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + x_{eq}$ ou $x(t) = C \cos(\omega_0 t + \varphi) + x_{eq}$ qui constituent donc les formes de sa **solution générale**.

Méthode 1.3 : Recherche de la solution de l'équation avec second membre

L'équation différentielle de l'oscillateur harmonique avec second membre constant est :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = K \text{ avec } K \in \mathbb{R}$$

Pour trouver la **solution au problème physique** étudié il faut procéder par étapes :

- Écrire la solution générale de l'équation différentielle sans second membre (équation homogène) : $x_1(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) = C \cos(\omega_0 t + \varphi)$.
- Déterminer la solution particulière constante x_2 de l'équation différentielle complète, avec second membre constant : $x_2 = K/\omega_0^2$. C'est la position d'équilibre du système.
- Écrire la solution générale de l'équation différentielle complète, avec second membre constant sous la forme $x(t) = x_1(t) + x_2$.
- Calculer les constantes d'intégration (A, B) ou (C, φ) à partir des conditions initiales.

➔ Exercice (1.2)



Dans l'étude d'un oscillateur il est souvent plus simple de prendre l'origine à la position d'équilibre. L'équation différentielle à laquelle on aboutit est alors homogène.

■ 4 Aspect énergétique

Nous verrons dans les chapitres suivants que l'étude d'un système oscillant ne peut aboutir à l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique, homogène ou avec second membre constant, que si les **phénomènes dissipatifs d'énergie sont négligés**.

□ **Comment se comporte au cours du temps l'énergie d'un oscillateur harmonique ?**

Reprenons une dernière fois notre expérience d'une masse accrochée à un ressort (figure 1.4), en prenant **l'origine à la position d'équilibre**. Nous verrons au chapitre 12 que pour un **tel système mécanique** nous pouvons définir **trois types d'énergie** :

- L'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$.
- L'énergie potentielle $E_p = \frac{1}{2} k x^2$.
- L'énergie mécanique $E_m = E_p + E_c$.

Nous savons que $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$ avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Nous en déduisons :

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k x_0^2 \cos^2(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m x_0^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t)$$

$$\text{D'où : } E_m = E_p + E_c = \frac{1}{2}kx_0^2 \cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}m\dot{x}_0^2 \sin^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2}kx_0^2(\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)) = \frac{1}{2}kx_0^2.$$

Ainsi, l'énergie mécanique de l'oscillateur reste constante au cours de son mouvement, ce qui est en cohérence avec le fait que pour aboutir à l'équation de l'oscillateur harmonique il faille négliger les phénomènes dissipatifs d'énergie.

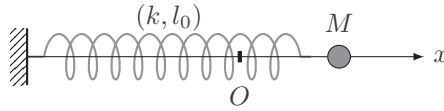
Bilan

Nous verrons au chapitre 12, qu'un système effectuant des oscillations de faible amplitude autour d'une position d'équilibre stable se comporte, si les phénomènes dissipatifs d'énergie sont négligeables, comme un oscillateur harmonique. C'est ce qui fait l'importance de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique, homogène ou avec second membre constant.

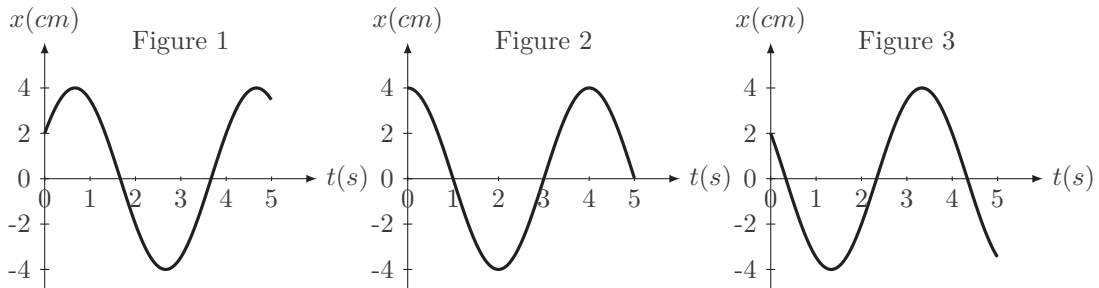
L'énergie d'un tel système reste constante au cours du temps.

Interro de cours

Une petite perle de masse m percée en son centre est enfilée sur un axe horizontal. Accrochée à l'extrémité d'un ressort horizontal de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 , elle peut glisser sans frottement sur l'axe.



1. La perle est assimilée à un point M dont la position est repérée par le paramètre $x = OM$. Sachant que l'origine de l'axe (Ox) est pris au niveau de la position d'équilibre de la perle, déterminer l'expression du paramètre x en fonction de la longueur ℓ du ressort et de ℓ_0 .
 - (a) $x = \ell$.
 - (b) $x = \ell - \ell_0$.
 - (c) $x = \ell + \ell_0$.
 - (d) $x = \ell_0 - \ell$.
2. Le système masse-ressort décrit précédemment constitue un oscillateur harmonique dont l'équation du mouvement est : $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$. Rappeler l'expression de la solution générale $x(t)$ de cette équation différentielle et préciser l'expression de la pulsation propre des oscillations en fonction des données.
 - (a) $x(t) = A \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t)$ et $\omega_0 = k/m$.
 - (b) $x(t) = C \cos(\omega_0 t + \varphi)$ et $\omega_0 = \sqrt{m/k}$.
 - (c) $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ et $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.
 - (d) $x(t) = C \cos(\omega_0 t)$ et $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.
3. On lance la perle depuis sa position initiale $\overrightarrow{OM}(0) = x_0 \vec{u}_x$ avec une vitesse $\vec{v}(0) = v_0 \vec{u}_x$. En déduire l'expression de la solution $x(t)$ vérifiant ces conditions initiales.
 - (a) $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$.
 - (b) $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + v_0 \sin(\omega_0 t)$.
 - (c) $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) - v_0 \sin(\omega_0 t)$.
 - (d) $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$.
4. Sachant que $x_0 > 0$ et $v_0 > 0$, déterminer la représentation graphique correspondant à l'expérience décrite précédemment.



- (a) Figure 1.
- (b) Figure 2.
- (c) Figure 3.

On souhaite écrire $x(t)$ sous la forme $x(t) = C \cos(\omega_0 t + \varphi)$.

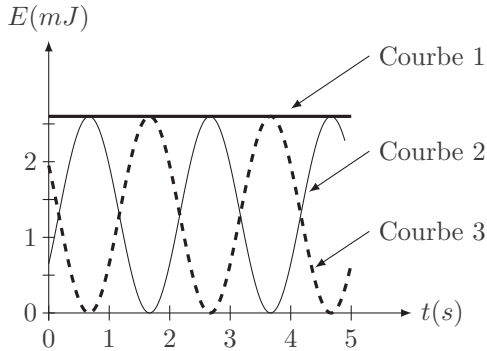
5. Par lecture graphique, déterminer la valeur de la pulsation propre ω_0 et de l'amplitude C des oscillations.

- (a) $\omega_0 = 1,9 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $C = 4 \text{ cm}$.
- (b) $\omega_0 = 1,3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $C = 8 \text{ cm}$.
- (c) $\omega_0 = 1,6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $C = 4 \text{ cm}$.

6. Par lecture graphique, déterminer la valeur de la phase à l'origine φ .

- (a) $\varphi = 0 \text{ rad}$.
- (b) $\varphi = \pi/3 \text{ rad}$.
- (c) $\varphi = -\pi/3 \text{ rad}$.

7. Sur la figure ci-dessous, sont représentées les énergies cinétique, potentielle et mécanique de l'oscillateur. Pouvez-vous identifier ces trois courbes ?



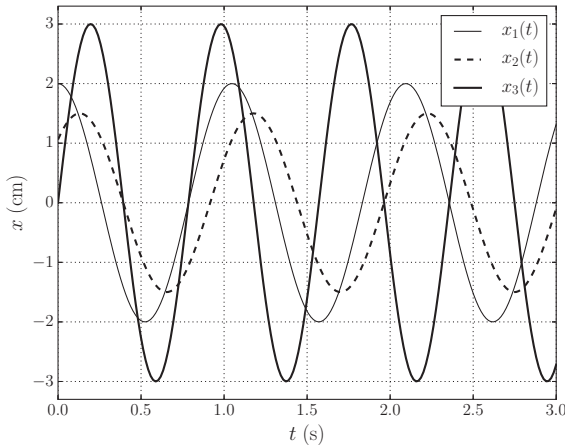
- (a) Courbe (1) = E_m , courbe (2) = E_p et courbe (3) = E_c .
- (b) Courbe (1) = E_p , courbe (2) = E_m et courbe (3) = E_c .
- (c) Courbe (1) = E_m , courbe (2) = E_c et courbe (3) = E_p .

Exercices

Exercice 1.1 Où sont les phases ?

➔ Méthode (1.1)

Étudiant en PTSI, Patrick réalise l'enregistrement du mouvement de trois oscillateurs harmoniques rappelé sur la figure ci-dessous.



Il propose les expressions suivantes :

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t) \quad ; \quad x_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t)$$

et $x_3(t) = A_3 \cos(\omega_3 t)$

avec $A_1 = 2,0 \text{ m}$, $A_2 = 1,5 \text{ m}$, $A_3 = 3,0 \text{ m}$,
 $\omega_1 = \omega_2 = 6,0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$, $\omega_3 = 8,0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$.

1. Vérifier les valeurs des amplitudes et des pulsations proposées par Patrick en portant un soin particulier aux unités proposées. Corriger si nécessaire.
2. Patrick a omis d'indiquer la phase à l'origine dans les trois cas. Réparer cet oubli et proposer des expressions de $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$.

Exercice 1.2 Apprendre à écrire

➔ Méthodes (1.2) (1.3)

L'abscisse $x(t)$ d'un point matériel M obéit à l'équation différentielle suivante : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_e$.
 La position et la vitesse initiales de M sont respectivement $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = v_0$.

1. En écrivant la solution $x(t)$ sous la forme $x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) + x_p$, exprimer A , B , x_p et ω .
2. Montrer que $x(t)$ peut aussi s'écrire sous la forme $x(t) = C \cos(\omega t + \varphi) + x_p$. Déterminer les expressions de C et $\tan(\varphi)$.
3. On prend $x_e = 0,0 \text{ m}$ et $\omega_0 = 6,0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Calculer A , B , x_p puis C et φ avec les conditions initiales :
 - a. $x_0 = 1,0 \text{ m}$ et $v_0 = 6,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
 - b. $x_0 = -1,0 \text{ m}$ et $v_0 = 6,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Exercice 1.3 Dessiner, c'est peser !

Amandine dessine à l'aide d'un crayon à l'extrémité duquel une figurine oscille joyeusement. Cette dernière est reliée au crayon par l'intermédiaire d'un ressort de raideur $k = 0,20 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.

1. La fréquence d'oscillation est $f_1 = 1,0 \text{ Hz}$. En déduire la masse m_1 de la figurine.
2. Amandine change de figurine. La période des oscillations est alors $T_2 = 1,2 \text{ s}$. Quelle est la masse m_2 de la nouvelle figurine ?

Exercice 1.4 La bonne équation

Le mouvement d'un point matériel M suit la loi horaire $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$.

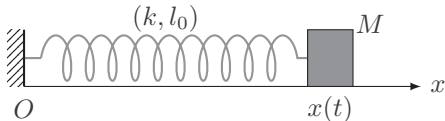
1. Parmi les équations suivantes, laquelle est vérifiée par $x(t)$?

$$(1) : \ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_e \quad (2) : \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (3) : \ddot{x} - \omega_0^2 x = 0 \quad (4) : \ddot{x} + 2\omega_0^2 x = 0$$

2. Les solutions de l'équation (3) sont-elles harmoniques ?

Exercice 1.5 Une énergie bien conservée

Nous considérons un oscillateur harmonique constitué d'un objet M assimilé à un point matériel de masse $m = 1,0 \cdot 10^2 \text{ g}$ et d'un ressort de raideur $k = 4,0 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ et de longueur à vide $l_0 = 8,0 \text{ cm}$.



Nous négligeons tout frottement avec le sol et M est repéré par son abscisse $x(t)$. À l'instant initial, $x(0) = l_0 - a$ avec $a = 2,0 \text{ cm}$ et $\dot{x}(0) = 0$.

1. On pose $X(t) = x(t) - l_0$. L'équation différentielle vérifiée par $X(t)$ est $\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$. Préciser ω_0 puis résoudre l'équation différentielle avec les conditions initiales proposées.
2. Exprimer l'énergie cinétique $E_c(t)$ de M à l'instant t puis son énergie potentielle $E_p(t)$. On rappelle que l'énergie potentielle élastique s'écrit $\frac{1}{2}kX(t)^2$.
3. Calculer l'énergie mécanique $E_m(t)$ de M . Que remarque-t-on ?
4. Calculer la valeur moyenne de $E_c(t)$ puis de $E_p(t)$ sur une période. On rappelle que la valeur moyenne des fonctions $\cos^2(\omega t)$ et $\sin^2(\omega t)$ est $1/2$. Conclure.

Corrections

Interro de cours

- Réponse (b).
- Réponse (c).
- Réponse (d) : la solution générale s'écrit sous la forme $A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ avec $x(0) = x_0 = A$ et $\dot{x}(0) = v_0 = B\omega_0$.
- Réponse (a) : initialement, $\dot{x}(0) = v_0 > 0$.
- Réponse (c) : la période est $T_0 = 4,0 \text{ s}$ d'où $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 1,6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et l'amplitude vaut $C = 4 \text{ cm}$.
- Réponse (c) : $C \cos(\varphi) = 2$ et $\dot{x}(0) = -C\omega_0 \sin(\varphi) > 0$.
- Réponse (a) : l'énergie mécanique de l'oscillateur se conservant, comme initialement le ressort s'allonge, l'énergie potentielle commence par augmenter (courbe 2), l'énergie cinétique diminuant (courbe 3).

Exercice 1.1

- Patrick a vraiment commis de nombreuses erreurs : $A_1 = 2,0 \text{ cm}$, $A_2 = 1,5 \text{ cm}$ et $A_3 = 3,0 \text{ cm}$, les périodes sont $T_1 = T_2 = 1,05 \text{ s}$, $T_3 = 0,78 \text{ s}$, donc $\omega_1 = \omega_2 = \frac{2\pi}{T_1} = 6,0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\omega_3 = 8,0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Notons que les unités proposées par Patrick pour les pulsations sont incorrectes.
- $\varphi_1 = 0$, donc $x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t)$; $x_2(t)$ est en retard par rapport à $x_1(t)$, le décalage temporel entre deux passages par 0 est $\delta t = 0,13 \text{ s} = \frac{\varphi_2}{2\pi} T_2$, soit $\varphi_2 = 0,78 \text{ rad} \approx \frac{\pi}{4}$, on obtient donc :
 $x_2(t) = A_2 \cos(\omega_1 t - \pi/4)$. Quant à $x_3(t)$, on reconnaît clairement la courbe d'un sinus :
 $x_3(t) = A_3 \sin(\omega_3 t) = A_3 \cos(\omega_3 t - \pi/2)$.

Exercice 1.2

- On réinjecte la forme donnée dans l'équation différentielle : $\ddot{x}(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t) - B\omega^2 \sin(\omega t)$, d'où $-A\omega^2 \cos(\omega t) - B\omega^2 \sin(\omega t) + \omega_0^2(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) + x_p) = \omega_0^2 x_e$ pour tout t . On en déduit immédiatement $\omega = \omega_0$ et $x_p = x_e$.

Les valeurs de A et B s'obtiennent par la prise en compte des conditions initiales. On obtient :

$$x(0) = A + x_e = x_0, \text{ d'où } A = x_0 - x_e, \text{ et } \dot{x}(0) = v_0 = B\omega_0, \text{ soit } B = \frac{v_0}{\omega_0}.$$

L'expression finale est ainsi $x(t) = (x_0 - x_e) \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + x_e$.

- On développe $C \cos(\omega_0 t + \varphi)$ en $C \cos(\omega_0 t) \cos(\varphi) - C \sin(\omega_0 t) \sin(\varphi)$. Par identification à l'expression précédente on obtient $C \cos(\varphi) = A$ et $-C \sin(\varphi) = B$, soit $\tan(\varphi) = -B/A = -\frac{v_0}{(x_0 - x_e)\omega_0}$ et :

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{(x_0 - x_e)^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}.$$

- Dans les deux cas, $x_p = 0,0 \text{ m}$.

a. Nous trouvons $A = x_0 = 1,0 \text{ m}$ et $B = 1,0 \text{ m}$. Nous en déduisons $C = \sqrt{A^2 + B^2} = 1,4 \text{ m}$. Enfin, $\arctan\left(-\frac{B}{A}\right) = -45^\circ$ et $\sin(\varphi) = -\frac{B}{C} < 0$: $\varphi = \arctan\left(-\frac{B}{A}\right) = -45^\circ$.

b. Nous trouvons $A = x_0 = -1,0 \text{ m}$ et $B = 1,0 \text{ m}$. Nous en déduisons $C = \sqrt{A^2 + B^2} = 1,4 \text{ m}$. Enfin, $\arctan\left(-\frac{B}{A}\right) = 45^\circ$ et $\sin(\varphi) = -\frac{B}{C} < 0$: $\varphi = \arctan\left(-\frac{B}{A}\right) - 180 = -135^\circ$.

Exercice 1.3

- On peut supposer que la figurine a la même équation d'évolution qu'une masse m placée à l'extrémité d'un ressort. Son élongation $z(t)$ vérifie l'équation d'un oscillateur harmonique : $\ddot{z} + \frac{k}{m_1}z = 0$. La fréquence d'oscillation est $f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_1}}$, d'où $m_1 = \frac{k}{4\pi^2 f_1^2} = 5,1 \text{ g}$.
- Sachant que $T_2 = \frac{1}{f_2}$, nous aurons $m_2 = \frac{kT_2^2}{4\pi^2} = 7,3 \text{ g}$

Exercice 1.4

- $x(t)$ est une fonction sinusoïdale pure de pulsation ω_0 qui vérifie l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation ω_0 , c'est à dire l'équation (2).
- Les solutions de l'équation (3) sont de la forme $x(t) = A \exp(\omega_0 t) + B \exp(-\omega_0 t)$: ce ne sont donc pas des solutions harmoniques.

Exercice 1.5

- M vérifie l'équation de l'oscillateur harmonique suivante : $\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$.
On cherche la solution sous la forme $X(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$. En utilisant les conditions initiales, il vient : $X(0) = -a = A$ et $\dot{X}(0) = \dot{x}(0) = 0 = B\omega_0$, soit $B = 0$. On obtient ainsi $x(t) = l_0 - a \cos(\omega_0 t)$.
- $E_c(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m a^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t)$ et $E_p(t) = \frac{1}{2} k a^2 \cos^2(\omega_0 t)$.
- Il vient donc $E_m(t) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 a^2$ car $k = m \omega_0^2$. L'énergie mécanique se conserve au cours du temps.
- $\langle E_c(t) \rangle = \frac{1}{4} m a^2 \omega_0^2$, $E_p(t) = \frac{1}{4} k a^2 = \langle E_c(t) \rangle$: l'énergie cinétique et l'énergie potentielle ont la même valeur moyenne temporelle, mais elles sont en quadrature de phase : il y a constamment un transfert énergétique entre énergie cinétique et potentielle, leur somme restant constante et leurs valeurs moyennes étant identiques.

Propagation et superposition des signaux

L'essentiel du cours

Contexte

Tout en écoutant jouer un orchestre symphonique, un physicien mélomane se pose de nombreuses questions. Comment les musiciens ont-ils réussi à accorder leurs instruments en quelques secondes en début de concert ? Comment expliquer que deux notes de même hauteur, jouées par deux instruments de musique différents, semblent si différentes ? Comment la propagation du son dans la salle conduit-elle à tous ces effets sonores ?

■ 1 Notions de signal et de spectre

Définition : Signal

Un **signal** est une **grandeur physique** définie localement qui peut varier au cours du temps.

Nous pouvons citer quelques exemples de signaux dans une salle de concert :

- Le déplacement transversal d'un point d'une corde d'un instrument à cordes (piano, violon, guitare, etc.) lorsqu'un musicien en joue.
- La surpression locale $p(t)$ de l'air par rapport à la pression d'équilibre P_0 lors du passage d'une onde sonore. Cette surpression, aussi appelée pression acoustique, est alors la composante variable de la pression totale de l'air $P(t) = P_0 + p(t)$.
- Le déplacement de la membrane d'un microphone sous l'effet de l'onde sonore qu'il capte ou d'un haut-parleur sous l'effet d'une tension délivrée par un amplificateur.
- La tension générée par un microphone lors de l'enregistrement d'un son.

On trouve des signaux dans tous les domaines de la physique. Ils peuvent être mécaniques (déplacement, surpression), électriques (tension, intensité), électromagnétiques (champ électrique ou magnétique), quantiques (fonction d'onde décrivant une particule quantique).

Spectre d'un signal constitué d'une superposition de signaux sinusoïdaux

Lorsqu'un signal est une superposition de signaux sinusoïdaux, il est intéressant d'accompagner la description de son **évolution temporelle** par une **représentation fréquentielle**.

À titre d'exemple, considérons le signal $u(t)$ dont l'évolution temporelle est donnée figure 2.1 et la représentation fréquentielle figure 2.2.

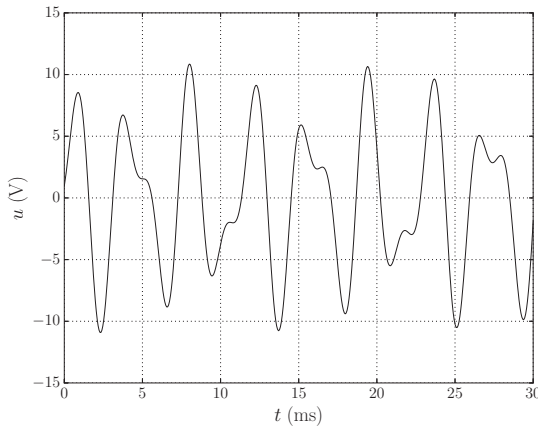


Figure 2.1. Évolution temporelle.

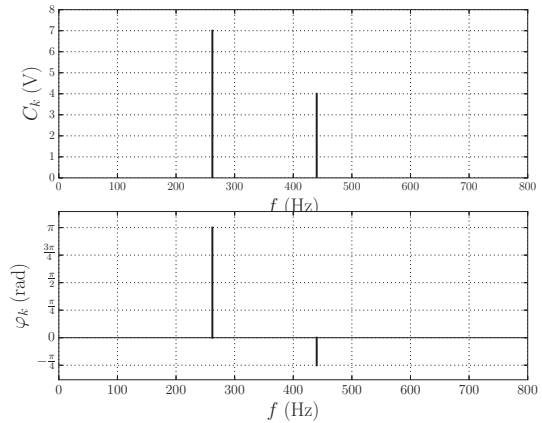


Figure 2.2. Représentation fréquentielle.

Définition : Représentation fréquentielle d'un signal

Soit un signal $s(t)$ résultant de la superposition de signaux sinusoïdaux de fréquences f_n , d'amplitudes $C_n \in \mathbb{R}^+$ et de phase à l'origine $\varphi_n \in [-\pi, +\pi]$:

$$s(t) = \sum_n C_n \cos(2\pi f_n t + \varphi_n)$$

Sa représentation fréquentielle est composée de deux graphiques :

- **Spectre en amplitude** : barres verticales de longueurs C_n et d'abscisses f_n .
- **Spectre de phase à l'origine** : segments verticaux de coordonnées $[(f_n, 0), (f_n, \varphi_n)]$.

□ **Comment reconstituer le signal $u(t)$ à l'aide de sa représentation fréquentielle ?**

D'après sa représentation fréquentielle donnée figure 2.2, le signal $u(t)$ comporte deux composantes sinusoïdales de fréquences $f_1 = 262$ Hz et $f_2 = 440$ Hz. La lecture des amplitudes sur la figure 2.2 nous permet d'écrire :

$$u(t) = C_1 \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1) + C_2 \cos(2\pi f_2 t + \varphi_2) \text{ avec } C_1 = 7,0 \text{ V}, \varphi_1 = \pi, C_2 = 4,0 \text{ V et } \varphi_2 = -\pi/4.$$

Analyse spectrale d'un signal périodique

Cette analyse spectrale s'appuie sur un théorème mathématique, **le théorème de Fourier** qui permet de considérer un **signal périodique** comme une somme de signaux sinusoïdaux et de le décomposer en **série de Fourier**.

Définition : Décomposition en série de Fourier d'un signal périodique

Un signal $s(t)$ périodique de période T , de fréquence $f = 1/T$, peut s'écrire comme une somme de signaux sinusoïdaux de fréquences multiples de f , soit nf , constituant sa décomposition en **série de Fourier** :

$$s(t) = s_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [A_n \cos(2\pi nft) + B_n \sin(2\pi nft)] = s_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(2\pi nft + \phi_n)$$

où $n \in \mathbb{N}^*$, $C_n \in \mathbb{R}^+$, $\phi_n \in]-\pi, +\pi]$ et $(A_n, B_n) \in \mathbb{R}^2$.

Le théorème de Fourier donne les moyens de calculer les coefficient A_n , B_n et C_n :

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos(2\pi nft) dt \quad B_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(2\pi nft) dt \quad C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$

Ces expressions ne sont toutefois pas au programme.

Quelques éléments de vocabulaire :

- s_0 est la **valeur moyenne du signal** : $s_0 = \langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T s_M(t) dt$.
- $C_n \cos(2\pi nft + \phi_n)$ est son **harmonique de rang n** , un signal sinusoïdal dont la fréquence est un multiple entier de la fréquence f .
- L'harmonique de rang $n = 1$ porte le nom de **fondamental**.
- $f_n = nf$, C_n et ϕ_n sont respectivement la fréquence, l'amplitude et la phase à l'origine de l'harmonique de rang n .

À titre d'exemple, intéressons-nous à une même note de musique, un Do₃, jouée par deux instruments différents, un piano et une guitare. À l'aide d'une carte d'acquisition et d'un ordinateur nous avons mémorisé la tension $u(t)$ prélevée aux bornes du microphone utilisé pour les enregistrements. Puis nous avons réalisé une analyse spectrale de ces signaux avec Python. Les résultats sont donnés ci-dessous :

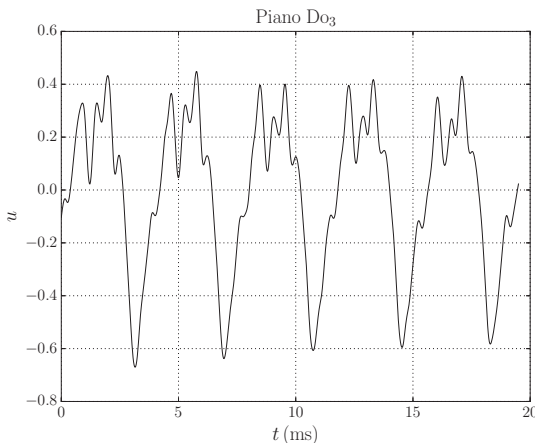


Figure 2.3. Évolution temporelle.

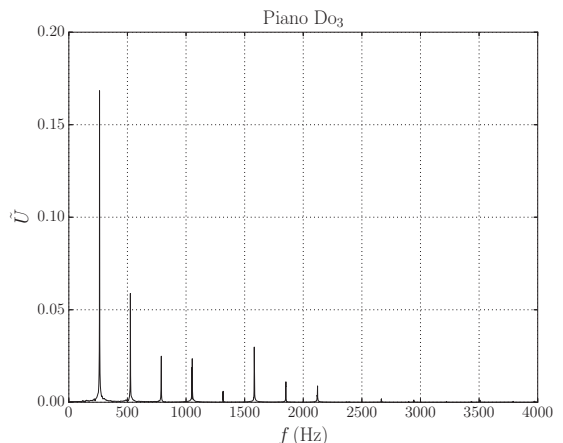


Figure 2.4. Spectre en amplitude.

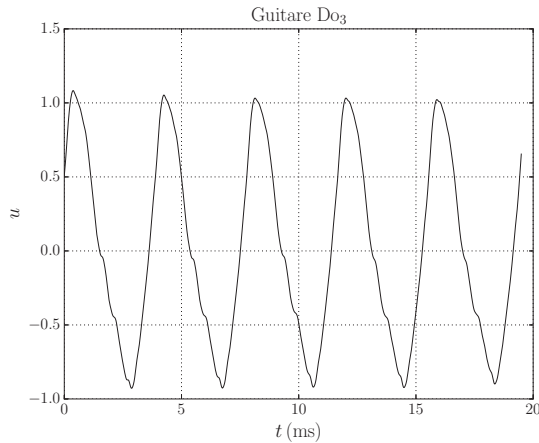


Figure 2.5. Évolution temporelle.

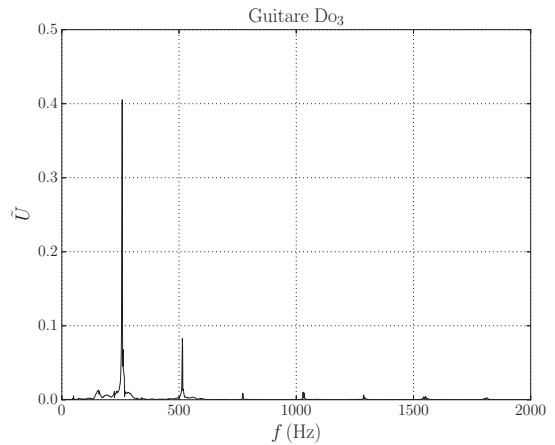


Figure 2.6. Spectre en amplitude.

Sur les deux courbes d'évolution temporelle nous mesurons une période $T = 3,8$ ms, qui correspond à une fréquence $f = 2,6 \cdot 10^2$ Hz. Sur les deux spectres en amplitude, nous relevons un premier pic, le plus important, pour une fréquence $f = 262$ Hz. C'est la **fréquence fondamentale**. Elle correspond à une période $T = 3,82$ ms, en accord avec les mesures faites sur les courbes de représentation temporelle. Nous observons par ailleurs sur chaque spectre la présence d'**harmoniques** dont les fréquences sont des multiples de la fréquence fondamentale.

Ainsi les deux notes jouées correspondent à des signaux de même période, dont les harmoniques fondamentales ont même fréquence. C'est cette fréquence fondamentale, égale à l'inverse de la période du signal, qui fait la **hauteur** de la note. En revanche les spectres diffèrent par le nombre de leurs harmoniques et les valeurs relatives de leurs amplitudes par rapport à celle du fondamental. Ce sont ces harmoniques qui font le **timbre** de l'instrument de musique. Tout en ayant la même hauteur les deux notes ne sont pas perçues de la même façon.

Sur les exemples précédents nous avons noté que l'amplitude du fondamental est plus grande que celles des harmoniques, qui décroissent lorsque leur rang n augmente.

Ce n'est pas toujours le cas comme le montre le spectre du Do_3 joué par une clarinette et représenté sur la figure 2.7.

Nous remarquons dans ce cas un fondamental à 259 Hz (la clarinette n'est pas accordée avec les deux instruments précédents). Nous notons également l'absence des premiers harmoniques de rangs pairs et l'importance des premiers harmoniques de rangs impairs. L'harmonique de rang 2 est quasiment absent, les harmoniques de rang 3 (octave + quinte) et de rang 5 (double octave + tierce) sont plus intenses que le fondamental. Les amplitudes des harmoniques de rangs plus élevés sont ensuite globalement de plus en plus faibles.

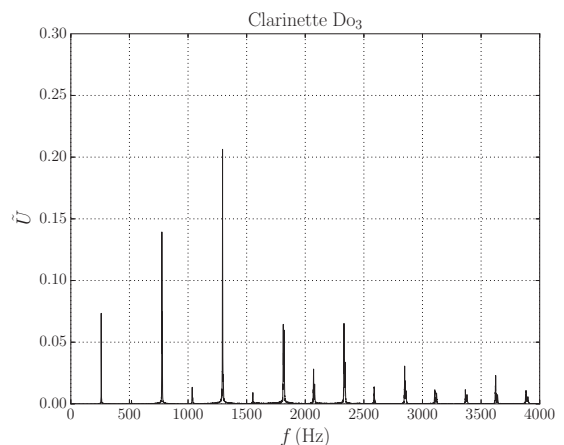


Figure 2.7. Spectre en amplitude.

Les ordres de grandeur des fréquences des signaux rencontrés sont très différents d'un domaine à l'autre de la physique. Citons par exemple :

- Son audible par l'oreille humaine : $f \in [20 \text{ Hz}, 20 \text{ kHz}]$.
- Ondes électromagnétiques du domaine radioélectrique : $f \in [9 \text{ kHz}, 300 \text{ GHz}]$.
- Lumière visible par l'œil humain : $f \in [4 \cdot 10^{14} \text{ Hz}, 8 \cdot 10^{14} \text{ Hz}]$.

■ 2 Ondes progressives

Un signal sonore est engendré par une très faible variation de pression de l'air autour de la pression d'équilibre, appelée pression acoustique. Dans la partie précédente, nous avons enregistré à l'aide d'un microphone un son émis par un instrument de musique. Il a donc fallu que la **perturbation** que constitue la **pression acoustique**, générée au voisinage immédiat de l'instrument, se propage de proche en proche jusqu'à la membrane du microphone, générant ainsi ce qu'on appelle une **onde progressive**.

Définition : Onde progressive

Une **onde progressive** est la propagation de **proche en proche** dans l'espace de **variations temporelles** d'un signal, générées au voisinage d'un point, **sans transport de matière**.



La notion d'onde progressive est une notion abstraite. L'étude d'une onde nécessite d'identifier la grandeur physique qui se propage.

Dans une salle de concert, les sons émis sont complexes et se propagent dans toutes les directions.

Pour étudier expérimentalement ce phénomène de propagation dans le domaine acoustique, nous avons enregistré en laboratoire le son émis par un claquement de mains (applaudissements). Le dispositif utilisé est décrit figure 2.8 et les résultats sont donnés figures 2.9 et 2.10.

Deux microphones M_1 et M_2 , munis d'amplificateurs, sont placés sur une potence, à des distances différentes d_1 et d_2 d'une source sonore. Les microphones sont fixés à environ 60 cm au dessus de la table et leur membrane a un diamètre de 10 mm.

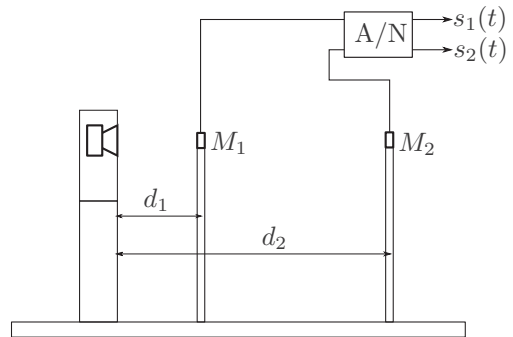


Figure 2.8. Dispositif expérimental.

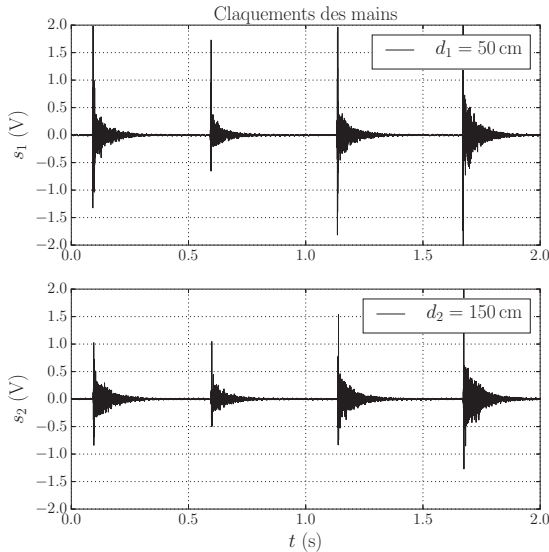


Figure 2.9. Applaudissements.

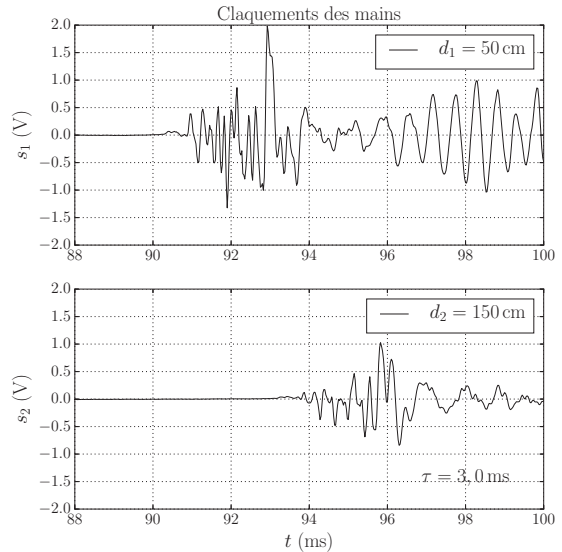


Figure 2.10. Zoom sur les signaux.

Nous constatons que le signal sonore est perçu par le microphone M_2 avec un certain retard sur le microphone M_1 . Ce retard est lié à la **célérité** c de l'onde sonore.

Définition : Célérité d'une onde progressive

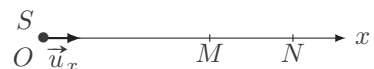
La célérité d'une onde progressive est la vitesse à laquelle les variations temporelles de la grandeur physique étudiée se propagent dans l'espace.

□ **Quelle est la célérité c du son dans l'air ?**

Notons τ l'écart temporel entre les réceptions du signal par les deux microphones. Sur les zooms des enregistrements de la figure 2.10 nous mesurons, au niveau des premiers fronts montants, un retard $\tau = 3,00 \text{ ms} \pm 0,05 \text{ ms}$ pour une distance $d = d_2 - d_1 = 100,0 \text{ cm} \pm 0,5 \text{ cm}$. Cela nous conduit à une célérité $c = d/\tau = 333 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \pm 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, en accord avec la valeur connue de $340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ à 20°C sous une pression de 1 bar.

□ **Comment traduire la propagation d'un signal se propageant dans la direction et le sens d'un axe Ox avec une célérité c ?**

Un signal est émis dans la direction et le sens de \vec{u}_x , pendant une durée T_s , par une source S située en O .



La figure 2.11 en donne l'évolution temporelle $f(t)$ au niveau de la source pour $t \in [0, T_s]$. Nous supposons qu'il se propage sans déformation ni atténuation.