j'intègre

TOUT-EN UN

PC|PC*

Claude Deschamps, François Moulin,
Yoann Gentric, François Lussier,
Bruno Morel, Michel Volcker

Mathématiques tout-en-un

DUNOD

Conception et création de couverture : Atelier 3+

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-076187-6

Préface

La réforme du lycée, qui a suivi celle du collège, s'est achevée en 2012, avec la mise en œuvre des nouvelles classes de terminale. Depuis septembre 2013, les étudiants qui entreprennent des études en classes préparatoires, ont bénéficié, durant leur scolarité au collège et au lycée, de programmes rénovés, en particulier en mathématiques. Afin d'assurer une continuité, de nouveaux programmes de classes préparatoires étaient donc indispensables.
En mathématiques, en 1995, lors de la mise en place des programmes de l'époque, les Éditions Dunod nous avaient confié la tâche de fournir aux étudiants des ouvrages de référence clairs et précis complétant le cours, irremplaçable, du professeur. Nous avions alors tenté un pari : faire tenir exposés et exercices, avec corrigés, en un seul volume, le premier « tout-en-un » (depuis très largement imité), qui a remporté un grand succès.
En septembre 2013 ont été mis en place de nouveaux programmes des classes préparatoires et, avec une équipe partiellement renouvelée et de grande qualité, nous avons récidivé : deux ouvrages « tout en un » (MPSI et PCSI-PTSI) proposent, aux étudiants de première année, un cours en conformité avec le texte, mais aussi avec l'esprit, du nouveau programme des classes préparatoires.
Aujourd'hui ce nouveau « tout en un » PC prolonge, pour la seconde année, l'ouvrage PCSI/PTSI et il conserve l'ambition, en mettant en œuvre de nouvelles méthodes d'acquisition des connaissances, de proposer à l'étudiant une démarche pour s'approprier les théories du programme, théories indispensables tant aux mathématiques qu'aux autres disciplines.

En pratique, dans chaque chapitre :

- De très nombreux exemples, souvent simples et issus de connaissances du lycée ou du programme de première année, illustrent chaque définition et permettent à l'étudiant de s'approprier cette nouvelle notion.
- Les propositions et théorèmes sont énoncés et suivis immédiatement d'exemples élémentaires d'applications. En outre, leurs démonstrations sont l'occasion d'un travail personnel de l'étudiant. Nous avons choisi de ne pas faire figurer systématiquement, à la suite des énoncés, la rédaction complète de ces démonstrations mais plutôt d'indiquer à l'étudiant le principe de celles-ci avec les éléments qui lui permettront de la construire par lui-même et ainsi de mieux s'approprier la propriété. Évidemment, guidé par un renvoi précis en fin du chapitre, il pourra ensuite consulter la démonstration complète et vérifier ou compléter son travail personnel.

- Lorsque plusieurs preuves étaient possibles, nous avons choisi de ne pas privilégier systématiquement la plus courte, souvent au profit de constructions explicites. C'est volontaire ; durant leurs études au lycée nos étudiants n'ont en général pas construit les objets mathématiques qu'ils ont utilisés : ils se sont contentés d'en admettre les propriétés. Or construire un objet, comme le fait un artisan, c'est se l'approprier, connaître parfaitement ses propriétés et les limites de ces propriétés.
- Dans chaque chapitre, l'étudiant trouvera, pour illustrer immédiatement l'usage des propositions et théorèmes, de très nombreux exercices simples qu'il doit évidemment chercher au fur et à mesure de son apprentissage et dont il pourra consulter une solution en fin de chapitre afin de vérifier son propre travail.
- Régulièrement l'étudiant trouvera des « point méthode » qui, pour une situation donnée, lui offrent une ou deux possibilités d'approche de la résolution de son problème. Évidemment il trouvera après ce « point méthode » exemples et exercices l'illustrant.
- À l'issue de chaque chapitre, figurent des exercices souvent plus ambitieux, demandant plus de réflexion, à chercher une fois le chapitre totalement maitrisé. Certains plus difficiles sont signalés par des étoiles ; les solutions détaillées de tous ces exercices complémentaires sont données.
- Bien entendu nous sommes très intéressés par toute remarque que les étudiants, nos collègues, tout lecteur... seraient amenés à nous communiquer. Cela nous permettra, le cas échéant, de corriger certaines erreurs nous ayant échappé et surtout ce contact nous guidera pour une meilleure exploitation des choix pédagogiques que nous avons faits aujourd'hui dans cet ouvrage.

Un grand merci à tous les auteurs de cet ouvrage d'avoir mené à terme ce travail de longue haleine.

Claude Deschamps et François Moulin

Les lecteurs de nos ouvrages ont certainement noté
que les directeurs de cette collection « tout en un »
se sont réduits à Claude Deschamps et François Moulin ;
notre collègue et ami, André Warusfel,
qui a créé avec nous cette collection,
nous a quittés au mois de juin 2016.
C'était un ami et un excellent mathématicien.
Il a enseigné en classes préparatoires
à Louis le Grand et Henri IV
avant de mettre ses talents au service
de l'Inspection Générale de Mathématiques.

Merci, cher Warus, de nous avoir entraînés avec toi
dans cette aventure exaltante !

Table des matières

Chapitre 1 : Compléments d'algèbre linéaire

Compléments d'algèbre linéaire

1

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Produit et somme d'espaces vectoriels

1 Produit d'espaces vectoriels

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Proposition 1

Soit $(E_1, \ldots, E_p)$ une famille finie de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

On définit les lois suivantes sur le produit cartésien $E_1 \times \cdots \times E_p$:

- **l'addition** telle que pour tout vecteur $(x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$ et tout vecteur $(y_1, \ldots, y_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$:
$$(x_1, \ldots, x_p) + (y_1, \ldots, y_p) = (x_1 + y_1, \ldots, x_p + y_p),$$
- la **loi externe** telle que pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout vecteur $(x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$:
$$\lambda.(x_1, \ldots, x_p) = (\lambda.x_1, \ldots, \lambda.x_p).$$

Muni de ces deux lois, $E_1 \times \cdots \times E_p$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel appelé **espace vectoriel produit**.

Principe de démonstration. Démonstration page 21

Posons $F = E_1 \times \cdots \times E_p$. D'après la définition d'un espace vectoriel, il s'agit de vérifier :

- d'une part que l'addition définie sur F est associative, commutative, possède un élément neutre et que tout élément de F admet un opposé,
- d'autre part que pour tout $(x, y) \in F^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, on a :

(1) $\alpha.(\beta.x) = (\alpha\beta).x$ (3) $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$

(2) $1.x = x$ (4) $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$

Notation On note aussi $\prod_{k=1}^{p} E_k$ au lieu de $E_1 \times \cdots \times E_p$.

Proposition 2

Soit $(E_1, \ldots, E_p)$ une famille finie de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. L'espace vectoriel produit $\prod_{k=1}^{p} E_k$ est de dimension finie et :

$$\dim\left(\prod_{k=1}^{p} E_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \dim(E_k).$$

Principe de démonstration. En prenant une base de chacun des espaces vectoriels, on peut construire une base de l'espace vectoriel produit. Démonstration page 21

2 Somme de sous-espaces vectoriels

Définition 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(E_1, \ldots, E_p)$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E. La **somme** de ces sous-espaces vectoriels est définie par :

$$E_1 + \cdots + E_p = \{x_1 + \cdots + x_p\,;\ (x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p\}.$$

Notation On note aussi $\sum_{k=1}^{p} E_k$ au lieu de $E_1 + \cdots + E_p$.

Remarque La définition 1 signifie que $E_1 + \cdots + E_p = \operatorname{Im} \varphi$, avec

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & E_1 \times \cdots \times E_p & \longrightarrow & E \\ & (x_1, \ldots, x_p) & \longmapsto & x_1 + \cdots + x_p. \end{array}$$

Nous utiliserons à plusieurs reprises cette application φ dans ce paragraphe et celui sur les sommes directes.

Proposition 3

Avec les notations précédentes, $E_1 + \cdots + E_p$ est un sous-espace vectoriel de E.

Principe de démonstration. Démonstration page 22

Compte tenu de la remarque ci-dessus, il suffit de montrer que φ est linéaire.

Attention

- On rappelle qu'une intersection de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E, mais qu'une réunion de sous-espaces vectoriels de E n'est pas en général un sous-espace vectoriel de E.

- Il importe de bien distinguer :
  - ∗ d'une part $\bigcup\limits_{k=1}^{p} E_k$, qui est le plus petit *sous-ensemble* de E contenant $E_1, \dots, E_p$,
  - ∗ d'autre part $\sum\limits_{k=1}^{p} E_k$, qui est le plus petit *sous-espace vectoriel* de E contenant $E_1, \dots, E_p$, comme nous le verrons dans l'exercice suivant.

p.23 **Exercice 1** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $(E_1, \dots, E_p)$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $E_1 + \cdots + E_p$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant $E_1, \dots, E_p$.

3 Somme directe de sous-espaces vectoriels

Nous allons généraliser la notion de somme directe, vue en première année dans le cas de deux sous-espaces vectoriels seulement, au cas d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.

Définition 2

Soit $(E_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

On dit que la somme $E_1 + \cdots + E_p$ est une **somme directe**, ou que les sous-espaces vectoriels $E_1, \dots, E_p$ sont en **somme directe**, si pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$:

$$x_1 + \cdots + x_p = 0 \Longrightarrow x_1 = \cdots = x_p = 0.$$

Dans ce cas, on note $\bigoplus\limits_{k=1}^{p} E_k$ la somme $\sum\limits_{k=1}^{p} E_k$.

Remarque Une somme ne comportant qu'un seul sous-espace vectoriel de E (cas $p = 1$) est évidemment une somme directe.

Proposition 4

Les sous-espaces $(E_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ sont en somme directe si, et seulement si, l'application :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E_1 \times \cdots \times E_p & \longrightarrow & E \\ (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto & x_1 + \cdots + x_p \end{array}$$

est injective.

Démonstration.

Nous avons déjà établi dans la proposition 3 de la page précédente que l'application φ est linéaire. La définition 2 signifie que $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$, c'est-à-dire que φ est injective. □

Rappel de première année Deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 de E sont en somme directe si, et seulement si, $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

Attention Contrairement au cas de deux sous-espaces, lorsque l'on considère p sous-espaces vectoriels avec $p \geqslant 3$, le fait que les intersections deux à deux soient réduites à $\{0\}$ ne suffit pas à garantir que la somme est directe, comme nous le verrons dans l'exercice 2.

Complément L'exercice 1.2 de la page 33 fournit une caractérisation par des intersections qui étend au cas $p \geqslant 3$ la caractérisation vue en première année dans le cas $p = 2$.

p.23

Exercice 2 Soit E un espace vectoriel et (e_1, e_2) une famille libre de E (on suppose donc $\dim(E) \geqslant 2$). Posons $E_1 = \mathrm{Vect}(e_1)$, $E_2 = \mathrm{Vect}(e_2)$ et $E_3 = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2)$.

1. Montrer que la somme $E_1 + E_2 + E_3$ n'est pas directe.
2. Montrer que $E_1 \cap E_2 = E_1 \cap E_3 = E_2 \cap E_3 = \{0\}$.

Remarque Au passage, l'exercice 2 fournit également un exemple de trois sous-espaces vectoriels qui ne sont pas en somme directe, mais qui sont deux à deux en somme directe.

Proposition 5

Soit $(E_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E de dimension finie. On a :

$$\dim\left(\sum_{k=1}^{p} E_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{p} \dim(E_k).$$

De plus, la somme $\sum\limits_{k=1}^{p} E_k$ est directe si, et seulement si,

$$\dim\left(\sum_{k=1}^{p} E_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \dim(E_k).$$

Principe de démonstration. Appliquer le théorème du rang à l'application φ définie dans la proposition 4 de la page précédente. Démonstration page 23

4 Décomposition en somme directe

Définition 3

Soit E un espace vectoriel et $(E_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E. On dit que cette famille réalise une **décomposition en somme directe** de E si $\bigoplus_{k=1}^{p} E_k = E$.

Concrètement l'intérêt de décomposer l'espace vectoriel E en une somme directe de sous-espaces vectoriels est que tout vecteur se décompose de manière unique comme une somme de vecteurs appartenant à chacun des sous-espaces.

Proposition 6

Soit E un espace vectoriel et $(E_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\bigoplus_{k=1}^{p} E_k = E$

(ii) pour tout $x \in E$, il existe une unique famille $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant p} \in E_1 \times \cdots \times E_p$ telle que :

$$x = \sum_{k=1}^{p} x_k.$$

Principe de démonstration. Traduire ces deux assertions à l'aide de l'application φ.

Démonstration page 24

Cas particulier d'une décomposition en somme directe de deux sous-espaces

Le cas particulier d'une décomposition en somme directe de deux sous-espaces a déjà été traité en première année. On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont **supplémentaires** si $E = F \oplus G$.

On rappelle qu'étant donné deux sous-espaces vectoriels F et G de E, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $E = F \oplus G$;

(ii) pour tout vecteur $x \in E$ il existe un unique couple $(y, z) \in F \times G$ tel que $x = y + z$;

(iii) $F + G = E$ et $F \cap G = \{0\}$.

Remarques

- L'équivalence entre (i) et (ii) a été généralisée par la proposition 6.
- Généraliser l'équivalence entre (i) et (iii) est moins aisé. Comme expliqué après la définition 2 de la page 4, considérer des intersections deux à deux ne suffit pas. L'exercice 1.2 de la page 33 fournit une généralisation de la deuxième propriété dans (iii).

Exemples de supplémentaires dans le cours de première année

1. Si p est un projecteur de E, c'est-à-dire si $p \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $p \circ p = p$, alors $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$ et p est le projecteur sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$. On a de plus $\operatorname{Ker}(p - \mathrm{Id}_E) = \operatorname{Im} p$. Concrètement, pour tout vecteur $x \in E$, on a :
$$x = p(x) + \big(x - p(x)\big),$$
avec $p(x) \in \operatorname{Im} p$ et $x - p(x) \in \operatorname{Ker} p$.
2. Si s est une symétrie de E, c'est-à-dire si $s \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $s \circ s = \mathrm{Id}_E$, alors $E = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$ et s est la symétrie par rapport à $\operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$. Concrètement, pour tout vecteur $x \in E$, on a :
$$x = \frac{1}{2}\big(x + s(x)\big) + \frac{1}{2}\big(x - s(x)\big)$$
avec $\frac{1}{2}\big(x + s(x)\big) \in \operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $\frac{1}{2}\big(x - s(x)\big) \in \operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

5 Fractionnement d'une base, base adaptée

Définition 4

Si $\mathcal{F}_1 = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{F}_2 = (f_1, \ldots, f_m)$ sont deux familles finies de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, la **concaténation** de $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$, notée $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$, est la famille de vecteurs $(e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_m)$.

Remarque On étend naturellement cette définition au cas d'un nombre fini de familles finies de vecteurs de E.

En première année, on a vu que si $(e_1, \ldots e_n)$ est une famille libre de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors $\operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ et $\operatorname{Vect}(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ sont en somme directe.

On peut reformuler ce résultat sous la forme abrégée suivante : si la famille libre $\mathcal{F}$ s'écrit $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ alors $\operatorname{Vect}(\mathcal{F}_1)$ et $\operatorname{Vect}(\mathcal{F}_2)$ sont en somme directe.

Cette écriture abrégée est commode lorsqu'il s'agit de « découper » une famille de vecteurs en plusieurs sous-familles.

Nous conviendrons dans tout ce qui suit que la famille de vecteurs $\mathcal{F}$ peut s'écrire $(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_p)$ lorsqu'elle est obtenue en concaténant les familles de vecteurs $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_p$.

Proposition 7 (Fractionnement d'une base)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E. On suppose que $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p)$. Si pour tout k, on note $E_k = \operatorname{Vect}(\mathcal{B}_k)$, alors :
$$E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k.$$

Principe de démonstration. Démonstration page 24

Utiliser le fait que la famille $\mathcal{B}$ est libre pour montrer que la somme est directe et le fait qu'elle est génératrice pour montrer que la somme est égale à E.

Définition 5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. On appelle **base adaptée au sous-espace vectoriel** F toute base $\mathcal{B}$ de la forme $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ avec $\mathcal{B}_1$ base de F.

Définition 6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $E_1, \ldots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k$. Une base $\mathcal{B}$ de E est dite **adaptée à la décomposition en somme directe** $(E_1 \ldots, E_p)$, si elle est de la forme $(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p)$, où pour tout k, la famille $\mathcal{B}_k$ est une base de E_k.

Terminologie On dit aussi que la base $\mathcal{B}$ est adaptée à la décomposition en somme directe $E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k$, au lieu de dire que $\mathcal{B}$ est adaptée à la décomposition en somme directe $(E_1 \ldots, E_p)$.

Remarque Si la décomposition en somme directe a été obtenue par fractionnement d'une base $\mathcal{B}$, cette base est évidemment adaptée à cette décomposition en somme directe.

Le but de la proposition suivante est de montrer l'existence d'une base adaptée pour toute décomposition en somme directe et de donner un moyen d'obtenir une telle base.

Proposition 8

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie tel que $E = \bigoplus_{i=k}^{p} E_k$, où les E_k sont des sous-espaces vectoriels de E. Si $\mathcal{B}_k$ est, pour tout k, une base de E_k, alors $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p)$ est une base de E.

Principe de démonstration. C'est une famille génératrice à $\dim E$ éléments.

Démonstration page 25

II Matrices par blocs et sous-espaces stables

1 Matrices par blocs et opérations

Écriture par blocs

Lorsque l'on écrit une matrice, il est parfois pratique, plutôt que d'écrire chacun des coefficients, d'écrire des sous-matrices. C'est ce que l'on appelle **écriture par blocs de la matrice**.

Par exemple, on peut écrire une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par blocs à l'aide de quatre sous-matrices en choisissant un indice de ligne n_1 et un indice de colonne p_1 qui marquent la fin du premier bloc.

Étant donné $n_1 \in [\![1, n-1]\!]$ et $p_1 \in [\![1, p-1]\!]$, la matrice :

$$M = \left(\begin{array}{ccc|ccc} m_{1,1} & \dots & m_{1,p_1} & m_{1,p_1+1} & \dots & m_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n_1,1} & \dots & m_{n_1,p_1} & m_{n_1,p_1+1} & \dots & m_{n_1,p} \\ \hline m_{n_1+1,1} & \dots & m_{n_1+1,p_1} & m_{n_1+1,p_1+1} & \dots & m_{n_1+1,p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,p_1} & m_{n,p_1+1} & \dots & m_{n,p} \end{array}\right)$$

se divise, comme indiqué ci-dessus, en quatre « blocs ». Si l'on pose :

$$A = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,p_1} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n_1,1} & \dots & m_{n_1,p_1} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} m_{1,p_1+1} & \dots & m_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n_1,p_1+1} & \dots & m_{n_1,p} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} m_{n_1+1,1} & \dots & m_{n_1+1,p_1} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,p_1} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} m_{n_1+1,p_1+1} & \dots & m_{n_1+1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n,p_1+1} & \dots & m_{n,p} \end{pmatrix}$$

alors, par convention la matrice M s'écrit $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

Exemple Considérons la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

On peut écrire par blocs $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ de plusieurs manières :

- par exemple, en posant $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 7 & 8 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 9 \end{pmatrix}$, ce qui revient à choisir $n_1 = p_1 = 2$: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \end{array}\right)$

- ou par exemple, en posant $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$, ce qui revient à choisir $n_1 = 1$ et $p_1 = 2$: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array}\right)$

- ou toute autre possibilité ...

Il est parfois commode de nommer les blocs avec deux indices : $M_{1,1}$, $M_{1,2}$, ... au lieu de A, B, ...

On peut en effet écrire une matrice M par blocs d'une façon plus générale en choisissant deux entiers $q \in [\![1,n]\!]$ et $r \in [\![1,p]\!]$, ainsi que des entiers $n_0,\dots,n_q,p_0,\dots,p_r$ tels que $0 = n_0 < \cdots < n_q = n$ et $0 = p_0 < \cdots < p_r = p$. Dans ce cas il est naturel de noter $M_{i,j}$ avec $(i,j) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,r]\!]$ les $q \times r$ blocs obtenus. On écrit alors :

$$M = \begin{pmatrix} M_{1,1} & \cdots & M_{1,r} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{q,1} & \cdots & M_{q,r} \end{pmatrix}$$

avec $M_{1,1} = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n_1]\!]\times[\![1,p_1]\!]}$, $M_{1,2} = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n_1]\!]\times[\![p_1+1,p_2]\!]}$, $\cdots$, $M_{q,r} = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![n_{q-1}+1,n]\!]\times[\![p_{r-1}+1,p]\!]}$.

Cas particuliers : matrice diagonale par blocs, matrice triangulaire par blocs

Dans ce paragraphe on supposera que M est une matrice carrée.

Définition 7

On dit que M est une matrice **diagonale par blocs** si elle admet une écriture par blocs de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix},$$

où, pour tout k, la matrice A_k est carrée, c'est-à-dire avec les notations précédentes une écriture par blocs avec p^2 blocs (on a $q = r = p$) et où les blocs $M_{i,j}$ pour $i \neq j$ sont tous nuls.

Notation On convient de noter $M = \mathrm{Diag}(A_1,\dots,A_p)$ la matrice M décrite ci-dessus.

Définition 8

On dit que M est une matrice **triangulaire supérieure par blocs** si elle admet une écriture par blocs de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix},$$

où, pour tout k, la matrice A_k est carrée, c'est-à-dire avec les notations précédentes une écriture par blocs avec p^2 blocs (on a $q = r = p$) et où les blocs $M_{i,j}$ pour $i > j$ sont tous nuls.

Notation Notre convention est de noter « $*$ » dans une matrice lorsqu'il n'y a aucune contrainte sur un coefficient (ou un bloc).

Remarques

- On définit de manière analogue la notion de matrice **triangulaire inférieure par blocs**. On dit qu'une matrice est **triangulaire par blocs** si elle est triangulaire supérieure par blocs ou triangulaire inférieure par blocs.
- Une matrice diagonale par blocs est à la fois triangulaire supérieure et inférieure par blocs.

Opérations par blocs

L'addition et le produit par blocs découlent directement de la définition de l'addition et du produit matriciel.

- *Addition par blocs.* Soit A et B deux matrices de même taille écrites par blocs :
$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,p} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{n,1} & \cdots & B_{n,p} \end{pmatrix}.$$
Si pour tout i et j les blocs $A_{i,j}$ et $B_{i,j}$ sont de même taille, alors le calcul de la matrice $C = A+B$ peut s'effectuer par blocs, ce qui mène à l'écriture par blocs suivante :
$$C = \begin{pmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n,1} & \cdots & C_{n,p} \end{pmatrix}$$
avec :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] \quad C_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}.$$
- *Produit par blocs.* Soit A et B deux matrices écrites par blocs :
$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,p} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{p,1} & \cdots & B_{p,q} \end{pmatrix}$$
Si les tailles des blocs sont compatibles, c'est-à-dire que pour tout i, j et k le nombre de colonnes de $A_{i,k}$ est égal au nombre de lignes de $B_{k,j}$, alors le calcul de la matrice $C = A\,B$ peut s'effectuer par blocs, ce qui mène à l'écriture par blocs suivante :
$$C = \begin{pmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n,1} & \cdots & C_{n,q} \end{pmatrix}$$
avec
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!] \quad C_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k} B_{k,j}.$$

Exemple Le produit de deux matrices diagonales par blocs $A = \mathrm{Diag}(A_1, \ldots, A_p)$ et $B = \mathrm{Diag}(B_1, \ldots, B_p)$ (avec des blocs de taille compatibles) est donné par :

$$AB = \mathrm{Diag}(A_1 B_1, \ldots, A_p B_p).$$

p.25 **Exercice 3** Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$.

Posons $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A, B et D pour que M soit inversible et dans ce cas expliciter M^{-1}.

Indication : on pourra commencer par exprimer le produit par blocs de M par une matrice quelconque $N = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ N_3 & N_4 \end{pmatrix}$ compatible, puis examiner à quelles conditions il existe une matrice N telle que $MN = I_{p+q}$.

2 Sous-espace stable et endomorphisme induit

Définition 9

Un sous-espace vectoriel F de l'espace vectoriel E est dit **stable** par $u \in \mathcal{L}(E)$ si $u(F) \subset F$, c'est-à-dire si :

$$\forall x \in F \quad u(x) \in F.$$

Dans ce cas on dit que $u_F : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}$ est l'**endomorphisme induit** par u sur F.

Remarques

- Il est évident que u_F est un endomorphisme de F.
- Il est évident que pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, les sous-espaces vectoriels $\{0\}$ et E sont stables par u.

Exemple Si h est une homothétie de E, c'est-à-dire si $h = \lambda \mathrm{Id}_E$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$, alors tout sous-espace vectoriel F est stable par h et l'endomorphisme induit est $h_F = \lambda \mathrm{Id}_F$.

Terminologie Une droite stable est un sous-espace stable de dimension 1.

p.26 **Exercice 4** Montrer qu'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ qui laisse toutes les droites de E stables est une homothétie.

Proposition 9

Soit u et v dans $\mathcal{L}(E)$. Si u et v commutent, c'est-à-dire si $u \circ v = v \circ u$, alors $\mathrm{Ker}\, v$ et $\mathrm{Im}\, v$ sont stables par u.

Démonstration page 26

Exemple Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Comme $u \circ u^2 = u^3 = u^2 \circ u$, l'endomorphisme u^2 laisse $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ stables.

Proposition 10

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension $p \in [\![1, n-1]\!]$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base adaptée à F, c'est-à-dire telle que $\mathcal{B}_F = (e_1, \ldots, e_p)$ soit une base de F. Un endomorphisme u de E laisse stable F si, et seulement si, sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$, avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.

Dans ce cas, A est la matrice dans la base $\mathcal{B}_F$ de l'endomorphisme induit par u sur F.

Principe de démonstration. Le sous-espace F est stable par u si, et seulement si, $u(e_j) \in F$ pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, on regarde donc les p premières colonnes de la matrice.

Démonstration page 26

Remarques

- Si l'on note $\mathcal{B}_G = (e_{p+1}, \ldots, e_n)$ et $G = \operatorname{Vect}(\mathcal{B}_G)$, alors G est stable par u si, et seulement si, la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$, avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.

  Dans ce cas, D est la matrice dans la base $\mathcal{B}_G$ de l'endomorphisme induit par u sur G.
- L'endomorphisme u stabilise donc F et G si, et seulement si, sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs, c'est-à-dire de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$, avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.

Une preuve analogue permet de généraliser ce résultat à une décomposition en somme directe avec p sous-espaces vectoriels.

Généralisation Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $(E_1, \ldots, E_p)$ une famille finie de sous-espaces vectoriels non nuls de E tels que $E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k$.

- Alors $u \in \mathcal{L}(E)$ laisse stable chaque E_k si, et seulement si, sa matrice dans une base adaptée à cette somme est diagonale par blocs, c'est-à-dire de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix},$$

  où, pour tout k, la matrice A_k est carrée de taille $\dim E_k$.

- Si dans une base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k$, l'endomorphisme u a une matrice triangulaire supérieure par blocs, c'est-à-dire de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix},$$

  où, pour tout k, la matrice A_k est carrée de taille $\dim E_k$, alors le seul E_k pour lequel on peut dire, sans approfondir l'étude, qu'il est stable par u est E_1. Cependant, on peut également dire en utilisant la proposition 10 de la page précédente, que $E_1 \oplus E_2$ est stable par u, ou plus généralement que $\bigoplus_{k=1}^{j} E_k$ est stable par u, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$.

III Matrices semblables, trace

1 Matrices semblables

Définition 10

Les matrices A et A' dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables s'il existe une matrice $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A' = P^{-1}AP$.

Remarque *A priori* il faudrait dire pour l'instant dans la définition « A est semblable à A' », mais comme nous le verrons dans l'exercice 5, cette relation est symétrique donc on peut dire « A et A' sont semblables ».

p.27 **Exercice 5** Montrer que la relation « est semblable à » est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

p.27 **Exercice 6** Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Déterminer toutes les matrices semblables à λI_n.

Proposition 11

Deux matrices A et A' de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si, et seulement si, elles représentent un même endomorphisme dans deux bases.

Principe de démonstration. Interpréter la définition comme un changement de bases.

Démonstration page 27

p.27

Exercice 7

Soit $\alpha \in \mathbb{K}^*$. Montrer que $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

p.28

Exercice 8 Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4$. Montrer que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$ sont semblables.

Proposition 12

Deux matrices semblables ont même rang.

Principe de démonstration. Démonstration page 28

Multiplier une matrice par une matrice inversible laisse le rang inchangé.

Attention La réciproque de la proposition 12 est fausse. Deux matrices peuvent avoir même rang sans être semblables. En effet, la seule matrice semblable à I_n est I_n (voir exercice 6 de la page ci-contre), mais toutes les matrices inversibles sont de rang n, donc ont même rang que I_n. Par exemple, les matrices I_n et $2\,I_n$ ont même rang mais ne sont pas semblables.

2 Trace d'une matrice carrée, d'un endomorphisme en dimension finie

Définition 11

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On appelle **trace de la matrice** A le scalaire $\mathrm{Tr}\,(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Proposition 13

L'application $A \mapsto \mathrm{Tr}\,(A)$ est linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.

Démonstration.

L'application trace est clairement à valeurs dans $\mathbb{K}$. Montrons qu'elle est linéaire.

Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. En notant $C = \lambda A + \mu B$, on a pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$c_{i,i} = \lambda a_{i,i} + \mu b_{i,i}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(C) &= \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda\, a_{i,i} + \mu\, b_{i,i})\\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \mu \sum_{i=1}^{n} b_{i,i}\\ &= \lambda\,\mathrm{Tr}(A) + \mu\,\mathrm{Tr}(B).\end{aligned}$$

□

Proposition 14

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\operatorname{Tr}(A) = \operatorname{Tr}\left({}^tA\right)$.

Démonstration. Comme A et ${}^tA$ ont mêmes coefficients diagonaux, elles ont même trace. □

Proposition 15

Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, on a $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$.

Principe de démonstration. En exprimant chacun des deux membres de l'égalité comme une double somme, on constatera qu'il s'agit simplement de permuter les deux symboles Σ.

Démonstration page 28

Proposition 16

Deux matrices carrées semblables ont même trace.

Principe de démonstration. D'après la proposition 15, on a $\operatorname{Tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{Tr}\big((AP)P^{-1}\big)$.

Démonstration page 28

Attention Deux matrices de même trace ne sont pas nécessairement semblables. Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Les matrices A et A' ne sont pas semblables car elles n'ont pas même rang (en effet $\operatorname{rg} A = 2$ et $\operatorname{rg} A' = 1$). On a pourtant :

$$\operatorname{Tr}(A) = 0 = \operatorname{Tr}(A').$$

La proposition précédente rend légitime la définition ci-dessous.

Définition 12

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. La **trace de l'endomorphisme** u est la trace de la matrice de u dans n'importe quelle base de E.

p.28 **Exercice 9** Soit p un projecteur d'un espace vectoriel E de dimension finie n. Montrer que $\operatorname{Tr}(p) = \operatorname{rg}(p)$.

IV Compléments sur les déterminants

1 Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

On sait déjà que le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux, qui peuvent être vus comme des blocs carrés d'ordre 1. Le but de cette partie est d'étendre ce résultat au cas plus général des matrices triangulaires par blocs.

Proposition 17

Soit p, q dans $\mathbb{N}^*$.

Pour tout $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on a :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det A \, \det D.$$

Principe de démonstration. Démonstration page 29

On factorise $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = M_1 M_2$ avec $M_1 = \begin{pmatrix} I_p & * \\ 0 & D \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$ puis on calcule le déterminant de M_1 et celui de M_2 par développements successifs par rapport à des rangées.

Remarque Nous avons énoncé cette proposition pour une matrice triangulaire supérieure par blocs avec 4 blocs, mais une récurrence immédiate permet d'étendre ce résultat au cas d'une matrice triangulaire supérieure par blocs quelconque.

Si la matrice carrée M est de la forme : $M = \begin{pmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix}$, où, pour tout k, la matrice A_k est carrée, alors :

$$\det(M) = \det(A_1) \times \cdots \times \det(A_p).$$

Comme le déterminant d'une matrice est égal à celui de sa transposée, on étend également ce résultat au cas des matrices triangulaires inférieures par blocs.

Si la matrice carrée M est de la forme : $M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & A_p \end{pmatrix}$, où, pour tout k, la matrice A_k est carrée, alors :

$$\det(M) = \det(A_1) \times \cdots \times \det(A_p).$$

p.29 **Exercice 10** Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+B)\det(A-B).$$

Indication : en opérant sur les lignes et les colonnes on peut se ramener à un déterminant triangulaire par blocs.

2 Exemples de calcul de déterminant.

Dans cette partie nous donnons quelques exemples de calcul de déterminants. L'expression factorisée d'un déterminant de Vandermonde donnée dans la proposition 18 est à connaître. Ce n'est pas le cas des autres exemples que nous présenterons sous forme d'exercices et qui nous permettront d'illustrer diverses méthodes de calcul de déterminants.

Proposition 18 (Déterminant de Vandermonde)

Étant donné des scalaires $x_0, x_1, \dots, x_n$, le déterminant d'ordre $n+1$ défini par :

$$V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

est appelé **déterminant de Vandermonde** relatif à la liste $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ et vaut :

$$V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

Principe de démonstration. Démonstration page 29

On traite d'abord le cas où les x_k ne sont pas deux à deux distincts. Dans l'autre cas, la fonction $x \mapsto V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x)$ est polynomiale de degré n et l'on peut exhiber ses racines et exprimer son coefficient dominant, ce qui mène à une relation de récurrence.

p.30 **Exercice 11** Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$. Calculer le déterminant d'ordre n suivant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & \cdots & b \\ b & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & b \\ b & \cdots & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

(il y a des a sur la diagonale et des b partout ailleurs).

Indication : on peut procéder par opérations sur les lignes et les colonnes en commençant par remarquer que la somme par rangée est constante.

p.31 **Exercice 12 (Déterminant tridiagonal)**

Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par D_n le déterminant de la matrice $n \times n$ de terme général $m_{i,j}$ défini par $m_{i,i} = a$, $m_{i,i+1} = c$, $m_{i,i-1} = b$, les autres termes étant nuls, c'est-à-dire :

$$D_n = \begin{vmatrix} a & c & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ b & a & c & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & b & a & c \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b & a \end{vmatrix}.$$

1. Pour $n \geqslant 3$, exprimer D_n en fonction de D_{n-1} et D_{n-2}.
2. Calculer D_1 et D_2.
3. En déduire la valeur de D_n dans les cas suivants :
   (a) $a = 5$, $b = 1$, $c = 6$;
   (b) $a = 2$, $b = c = 1$.

p.31 **Exercice 13**

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ tel que $b \neq c$. Calculer le déterminant d'ordre $n \geqslant 2$ suivant :

$$\begin{vmatrix} a & c & \cdots & \cdots & c \\ b & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & c \\ b & \cdots & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

(il y a des a sur la diagonale, des b en dessous et des c au-dessus).

Indication : on pourra considérer :

$$f(x) = \begin{vmatrix} a+x & c+x & \cdots & \cdots & c+x \\ b+x & a+x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a+x & c+x \\ b+x & \cdots & \cdots & b+x & a+x \end{vmatrix},$$

montrer que f est une fonction affine de x et conclure grâce à des valeurs particulières bien choisies.

Point méthode

Pour calculer un déterminant purement numérique on dispose de l'algorithme du pivot de Gauss (vu en première année). Dans un cadre plus général, il n'y a pas de méthode systématique. Sans prétendre à l'exhaustivité, on peut envisager notamment :

- d'opérer sur les lignes et les colonnes pour obtenir un déterminant plus simple à calculer (voir l'exercice 10 de la page 17 ou l'exercice 11 de la page 18)
- ou de faire apparaître ce déterminant comme une valeur particulière d'une fonction (le plus souvent polynomiale) que l'on sait exprimer (voir la preuve de la proposition 18 de la page 18 et l'exercice 13 de la page précédente),

mais il existe bien entendu d'autres moyens : dans la preuve de la proposition 17 de la page 17 on utilise un produit par blocs, dans l'exercice 12 de la page précédente on procède par développements successifs pour obtenir relation de récurrence linéaire d'ordre 2, etc.

Attention Ne pas croire que tout calcul littéral de déterminant d'ordre n se fait par récurrence ; c'est vrai dans la preuve de la proposition 18 de la page 18 ou dans l'exercice 12 de la page précédente par exemple, mais ce n'est pas toujours le cas (voir exercice 11 de la page 18).

Démonstrations et solutions des exercices du cours

Proposition 1

- Vérifions les propriétés de l'addition.
  Montrons l'associativité. Soit $(x,y,z) \in F^3$. On a :
  $$(x+y)+z = \big((x_1+y_1)+z_1, \ldots, (x_p+y_p)+z_p\big)$$
  $$= \big(x_1+(y_1+z_1), \ldots, x_p+(y_p+z_p)\big),$$
  car l'addition dans chaque E_k est associative. Ainsi :
  $$(x+y)+z = x+(y+z).$$
  On montre de même que l'addition dans F est commutative, c'est-à-dire que pour tout $(x,y) \in F^2$:
  $$x+y = y+x,$$
  en utilisant la commutativité dans chaque E_k.
  De plus, $0=(0,\ldots,0)$ est élément neutre et tout $x \in F$ admet pour opposé :
  $$-x = (-x_1, \ldots, -x_p).$$
- Chacune de ces 4 propriétés de la multiplication par un scalaire se déduit des propriétés correspondantes dans les E_k, comme pour la commutativité et l'associativité de l'addition.

Proposition 2 Il ne s'agit pas d'une preuve par récurrence.

On commence par traiter le cas $p=2$, puis on passe au cas général.

- *Preuve dans le cas* $p=2$. On note $d_1 = \dim(E_1)$ et $d_2 = \dim(E_2)$ et l'on considère $(f_1, \ldots, f_{d_1})$ une base de E_1 et $(g_1, \ldots, g_{d_2})$ une base de E_2. Montrons que la famille $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leqslant k \leqslant d_1+d_2}$ définie par :
  $$e_k = \begin{cases} (f_k, 0) & \text{si } 1 \leqslant k \leqslant d_1\,; \\ (0, g_{k-d_1}) & \text{si } d_1+1 \leqslant k \leqslant d_1+d_2 \end{cases}$$
  est une base de $E_1 \times E_2$.

  $*$ Soit $(\lambda_1, \ldots \lambda_{d_1+d_2}) \in \mathbb{K}^{d_1+d_2}$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{d_1+d_2} \lambda_k e_k = 0$. On a donc par définition de $\mathcal{B}$:
  $$\left(\sum_{k=1}^{d_1} \lambda_k f_k, \sum_{k=d_1+1}^{d_1+d_2} \lambda_k g_{k-d_1}\right) = 0.$$
  Ainsi :
  $$\sum_{k=1}^{d_1} \lambda_k f_k = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=d_1+1}^{d_1+d_2} \lambda_k g_{k-d_1} = 0.$$
  Les familles $(f_k)_{1 \leqslant k \leqslant d_1}$ et $(g_k)_{1 \leqslant k \leqslant d_2}$ étant libres, on en déduit :
  $$\forall k \in [\![1, d_1+d_2]\!] \quad \lambda_k = 0,$$
  ce qui prouve que la famille $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant d_1+d_2}$ est libre.

$*$ Soit $y \in E_1 \times E_2$. En écrivant $y = (y_1, y_2)$ avec $y_1 \in E_1$ et $y_2 \in E_2$ et en décomposant le vecteur y_1 dans la base $(f_k)_{1 \leqslant k \leqslant d_1}$ et le vecteur y_2 dans la base $(g_k)_{d_1+1 \leqslant k \leqslant d_1+d_2}$, on a :

$$y_1 = \sum_{k=1}^{d_1} \lambda_k f_k \quad \text{et} \quad y_2 = \sum_{k=d_1+1}^{d_1+d_2} \lambda_k g_{k-d_1},$$

avec $(\lambda_1, \ldots \lambda_{d_1+d_2}) \in \mathbb{K}^{d_1+d_2}$. Ainsi, par un calcul analogue à celui effectué plus haut :

$$y = (y_1, y_2) = \sum_{k=1}^{d_1+d_2} \lambda_k e_k$$

ce qui prouve que la famille $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant d_1+d_2}$ est génératrice.

Comme $E_1 \times E_2$ admet une base à $d_1 + d_2$ éléments, on conclut :

$$\dim(E_1 \times E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2).$$

Nota Bene. On a supposé implicitement dans cette preuve que $d_1 \geqslant 1$. Dans le cas où $d_1 = 0$, on ne considère pas de vecteurs de la forme $(f_k, 0)$ mais seulement des vecteurs de la forme $(0, g_j)$ pour $j \in [\![1, d_1]\!]$. De même si $d_2 = 0$, on ne considère que des vecteurs de la forme $(f_k, 0)$ pour $k \in [\![1, d_1]\!]$. La preuve est analogue.

- On peut étendre ce résultat dans le cas général $p \geqslant 2$. Pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, on note $\left(f_k^{(j)}\right)_{1 \leqslant k \leqslant d_j}$ une base de E_j, où $d_j = \dim(E_j)$ (si $d_j = 0$, on ne construit pas de vecteurs).

  La famille $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leqslant k \leqslant d_1+\cdots+d_p}$ définie par :

$$e_k = \begin{cases} \left(f_k^{(1)}, 0, \ldots, 0\right) & \text{si } 1 \leqslant k \leqslant d_1\,; \\ \left(0, f_{k-d_1}^{(2)}, 0, \ldots, 0\right) & \text{si } d_1 + 1 \leqslant k \leqslant d_1 + d_2\,; \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ \left(0, \ldots, 0, f_{k-(d_1+\cdots+d_{p-1})}^{(p)}\right) & \text{si } d_1 + \cdots + d_{p-1} + 1 \leqslant k \leqslant d_1 \cdots + d_p \end{cases}$$

  est une base de $E_1 \times \cdots \times E_p$, ce qui se démontre de la même manière que dans le cas $p = 2$. On en déduit que :

$$\dim(E_1 \times \cdots \times E_p) = \dim(E_1) + \cdots + \dim(E_p).$$

Proposition 3 Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(x, y) \in (E_1 \times \cdots \times E_p)^2$. En notant :

$$x = (x_1, \ldots, x_p) \quad \text{et} \quad y = (y_1, \ldots, y_p),$$

on a : $\varphi(\lambda x + \mu y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} (\lambda x_k + \mu y_k)$

$$= \lambda \sum_{k=1}^{p} x_k + \mu \sum_{k=1}^{p} y_k = \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y).$$

Donc φ est linéaire. On en déduit que $E_1 + \cdots + E_p = \operatorname{Im}\varphi$ est un sous-espace vectoriel de E.