Calcul différentiel et calcul intégral

Noureddine El Jaouhari
Maître de conférences à l'université d'Orléans

DUNOD

Illustration de couverture : © pixeldreams.eu, shutterstock.com

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.
Le Code de la propriété intellectuelle du 1er juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.
Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

DANGER
LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

© Dunod, 2017
11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-076162-3

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Avant-propos IX

Partie 1

Chapitre 1 Champs scalaires et vectoriels 1

- **1. Fonctions vectorielles d'une variable** 1
  - 1.1 Dérivée d'une fonction vectorielle 2
  - 1.2 Dérivées d'ordre supérieur d'une fonction vectorielle 2
  - 1.3 Intégrale d'une fonction vectorielle 4
- **2. Fonctions de plusieurs variables** 5
  - 2.1 Champs scalaires 5
  - 2.2 Champs vectoriels 5
  - 2.3 Graphe d'une fonction de plusieurs variables 6
  - 2.4 Surfaces de niveau d'un champ scalaire 7
- Entraînez-vous 8
- Solutions 9

Chapitre 2 Dérivées partielles et différentielles 15

- **1. Les dérivées partielles premières** 15
- **2. Les dérivées partielles d'ordre supérieur** 16
- **3. Règles de dérivation des fonctions composées** 17
- **4. Équations aux dérivées partielles** 18
- **5. Différentielle d'une fonction de plusieurs variables** 20
  - 5.1 Retour sur le cas d'une variable 20
  - 5.2 Cas des fonctions de plusieurs variables 22
- **6. Utilisation de la différentielle** 23
- **7. Formes différentielles** 23
- **8. Plan tangent à une surface** 28
- **9. Lignes de champ** 28
- Entraînez-vous 30
- Solutions 33

Chapitre 3 Opérateurs différentiels 52

1. Champ gradient 52
2. Dérivée directionnelle 55
3. Divergence d'un champ de vecteurs 56
3.1 Interprétation physique de la divergence 56
3.2 Propriétés de la divergence 58
4. Rotationnel d'un champ de vecteurs 58
5. Champs de vecteurs conservatifs 60
6. Champs solénoïdaux 63
7. Analogie entre champs de vecteurs et formes différentielles 65

Entraînez-vous 68

Solutions 70

Chapitre 4 Systèmes de coordonnées curvilignes 77

1. Cas du plan 77
2. Cas de l'espace 79
2.1 Coordonnées cylindriques 80
2.2 Coordonnées sphériques 82
2.3 Retour au cas général 84
2.4 Déplacements élémentaires 88
3. Expression des opérateurs ∇, div et rot dans les coordonnées curvilignes 89
3.1 Gradient en coordonnées curvilignes 89
3.2 Divergence en coordonnées curvilignes 91
3.3 Rotationnel en coordonnées curvilignes 94

Entraînez-vous 97

Solutions 99

Partie 2

Chapitre 5 Intégrale double d'une fonction à deux variables 114

1. Rappel du cas des fonctions d'une variable 115
2. Intégrale double sur un rectangle 116

3. Intégrale double sur un domaine quelconque 118

4. Propriétés des intégrales doubles 120

5. Calcul des aires 121

6. Calcul des volumes 122

7. Utilisation des intégrales doubles en physique 124

7.1 Centres d'inertie 125

7.2 Propriétés des centres d'inertie 127

7.3 Moments d'inertie 127

7.4 Théorème de Huyghens-Steiner ou théorème des axes parallèles 130

8. Changement de variables dans une intégrale double 131

8.1 Cas important des coordonnées polaires 132

8.2 Changement de variables en coordonnées polaires 135

Entraînez-vous 140

Solutions 145

Chapitre 6 Intégrale curviligne 168

1. Rappels sur les courbes paramétrées 169

2. Longueur d'un arc de courbe 170

3. Abscisse curviligne 173

4. Notion d'intégrale curviligne 174

4.1 Intégrale curviligne d'une fonction dans le plan 174

4.2 Courbes opposées ou inverses 176

5. Utilisation des intégrales curvilignes des fonctions en physique 177

5.1 Centre d'inertie 177

5.2 Moments d'inertie 178

6. Intégrale curviligne d'une forme différentielle dans le plan 180

7. Intégrale curviligne d'un champ de vecteurs dans le plan 184

8. Formule de Green ou de Green-Riemann 185

8.1 Cas des formes différentielles 185

8.2 Généralisation de la formule de Green 188

8.3 Cas des champs de vecteurs 189

9. Intégrale curviligne dans l'espace 191

Entraînez-vous 192

Solutions 198

Chapitre 7 Intégrale triple d'une fonction à trois variables 229

1. Intégrale triple sur un pavé 230

2. Intégrale triple sur un domaine borné quelconque 232

3. Calcul de l'intégrale triple sur un domaine découpé en piles 233

4. Calcul de l'intégrale triple sur un domaine découpé en tranches 235

5. Propriétés des intégrales triples 239

6. Utilisation des intégrales triples en physique 240

6.1 Centre d'inertie 240

6.2 Moments d'inertie 242

6.3 Théorème de Huyghens-Steiner ou théorème des axes parallèles 245

7. Changement de variables dans une intégrale triple 246

7.1 Cas général 246

7.2 Cas des coordonnées cylindriques 246

7.3 Cas des coordonnées sphériques 247

Entraînez-vous 249

Solutions 251

Chapitre 8 Intégrales de surface 273

1. Surfaces paramétriques 274

1.1 Courbes coordonnées et vecteurs tangents 276

1.2 Reparamétrage (ou changement de paramètres) d'une surface 279

1.3 Surfaces de révolution 280

2. Aire d'une surface paramétrée 285

3. Intégrales de surface d'une fonction scalaire 290

4. Utilisation des intégrales de surface des fonctions en physique 293

5. Calcul des aires et volumes des surfaces et solides de révolution 295

5.1 Premier théorème de Guldin 295

5.2 Second théorème de Guldin 297

6. Intégrales de surface d'un champ de vecteurs 298

7. Formules d'intégration de l'analyse vectorielle 301

7.1 Formule de Green-Ostrogradsky 302

7.2 Formule de Stokes 304

8. Utilisation des formules d'intégration en physique 305

8.1 Théorème de Gauss 305
8.2 Équation de continuité 307

Entraînez-vous 308

Solutions 311

Annexes 344

1. Formulaire de trigonométrie 344

2. Formulaire de trigonométrie hyperbolique 345

3. Fonctions trigonométriques inverses 346

4. Fonctions hyperboliques inverses 347

5. Relations dans un triangle quelconque 347

6. Algèbre vectorielle 348
6.1 Vecteurs 348
6.2 Produit scalaire 349
6.3 Produit vectoriel 349
6.4 Produit mixte 350

7. Dérivation et intégration 351

Index 353

À la découverte de votre livre

1 Ouverture de chapitre

Elle donne :

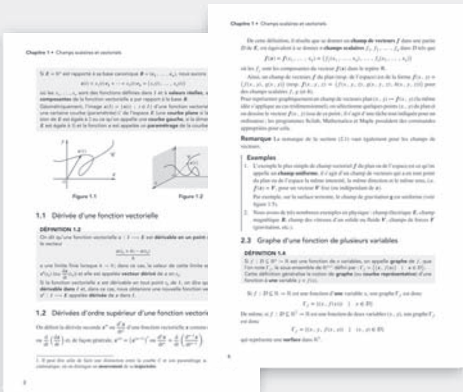
- une **introduction** aux sujets et aux problématiques abordés dans le chapitre
- un rappel des **objectifs** pédagogiques
- le **plan** du chapitre


Chapitre 1
Champs scalaires et vectoriels
Introduction
Objectifs
Plan
1 Fonctions vectorielles d'une variable

2 Le cours

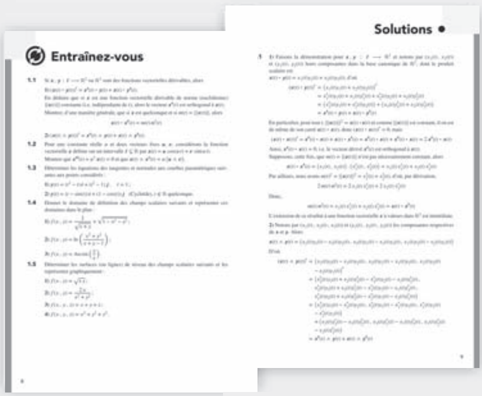
Le cours, concis et structuré, expose le programme. Il donne :

- un rappel des **définitions** clés
- des **schémas** pour maîtriser le cours
- des **exemples** reliés au cours



3 En fin de chapitre

- Des **exercices** pour tester ses connaissances et s'entraîner
- Les **corrigés** des exercices


Entraînez-vous
Solutions

4 En fin d'ouvrage

- Des annexes
- Un index


Index

Avant-propos

Le présent ouvrage est issu d'un enseignement donné durant plusieurs années aux étudiants de Licence 2 de physique et de mathématiques de l'université d'Orléans.

Son thème est l'**analyse vectorielle**, le calcul différentiel et le calcul intégral pour les fonctions de plusieurs variables.

L'analyse vectorielle est utilisée de manière intensive dans plusieurs branches de la physique : électromagnétisme, gravitation, mécanique des fluides, etc.

Le livre est composé de deux grandes parties : la première est consacrée à l'extension de la dérivation et de la différentiation (vues en première année pour les fonctions d'une variable) aux fonctions de plusieurs variables et à leurs diverses applications : dérivées partielles, différentielles, formes différentielles, opérateurs différentiels, etc.

Dans la seconde partie, nous introduisons les notions d'intégrales : doubles et triples, curvilignes et intégrales de surface ainsi que les divers théorèmes reliant ces notions.

Chaque chapitre débute par un rappel complet et concis de chaque notion du cours que nous illustrons, autant que possible, à l'aide de plusieurs exemples.

Nous avons mis l'accent sur la résolution des exercices (près de 170) qui constitue, comme on le sait, le moyen le plus sûr pour maîtriser les divers aspects du cours.

La transformation d'un simple polycopié distribué chaque année à mes étudiants en un ouvrage digne de ce nom doit beaucoup à la pression amicale de mon collègue et ami Nawfal El Hage Hassan, qu'il en soit vivement remercié.

© Dunod – Toute reproduction non autorisée est un délit.

Chapitre 1

Champs scalaires et vectoriels

Introduction

Une des caractéristiques du monde physique qui nous entoure est le changement, changement dans l'espace et dans le temps. En physique on s'intéresse souvent aux propriétés qui varient dans l'espace, comme la température, la pression, le potentiel, etc. Toutes ces grandeurs scalaires constituent différentes manifestations de la notion de **champ scalaire**.

Il existe également des grandeurs de nature vectorielle qui varient en grandeur et en direction, comme le champ électrique $\boldsymbol{E}$, champ magnétique $\boldsymbol{B}$, etc. Ce sont des **champs vectoriels**.

Ce chapitre fixe le cadre qui nous permettra d'introduire les divers outils nécessaires pour développer le calcul différentiel et ensuite le calcul intégral à plusieurs variables.

Objectifs

- **Connaître** la notion de fonction vectorielle d'une variable et les objets géométriques qui leur sont attachés.
- **Connaître** les notions de dérivée et intégrale d'une fonction vectorielle.
- **Maîtriser** les règles de calcul concernant les dérivées des fonctions vectorielles.
- **Comprendre** les notions de champ scalaire et de champ vectoriel.
- **Assimiler** la notion de ligne ou de surface de niveau d'un champ scalaire.

Plan

1. Fonctions vectorielles d'une variable
2. Fonctions de plusieurs variables

1 Fonctions vectorielles d'une variable

DÉFINITION 1.1

Toute application $\boldsymbol{x} : I \longrightarrow \boldsymbol{E}$ d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans un espace euclidien $\boldsymbol{E}$ (nous prendrons toujours pour $\boldsymbol{E}$ le plan $\mathbb{R}^2$ ou l'espace $\mathbb{R}^3$) est appelée une **fonction vectorielle d'une variable réelle** :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} : I &\longrightarrow \boldsymbol{E} \\ t &\longmapsto \boldsymbol{x}(t) \end{aligned}$$

© Dunod – Toute reproduction non autorisée est un délit.

Si $\boldsymbol{E} = \mathbb{R}^n$ est rapporté à sa base canonique $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_n})$, nous aurons

$$\boldsymbol{x}(t) = x_1(t)\,\boldsymbol{e_1} + \cdots + x_n(t)\,\boldsymbol{e_n} = \big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big)$$

où les $x_1, \ldots, x_n$ sont des fonctions définies dans I et à **valeurs réelles**, appelées **composantes** de la fonction vectorielle $\boldsymbol{x}$ par rapport à la base $\boldsymbol{B}$.

Géométriquement, l'image $\boldsymbol{x}(I) = \{\boldsymbol{x}(t)\ ;\ t \in I\}$ d'une fonction vectorielle $\boldsymbol{x}$ est une certaine courbe (paramétrée) $\mathcal{C}$ de l'espace $\boldsymbol{E}$ (une **courbe plane** si la dimension de $\boldsymbol{E}$ est égale à 2 ou ce qu'on appelle une **courbe gauche**, si la dimension de $\boldsymbol{E}$ est égale à 3) et la fonction $\boldsymbol{x}$ est appelée un **paramétrage** de la courbe[1] $\mathcal{C}$.

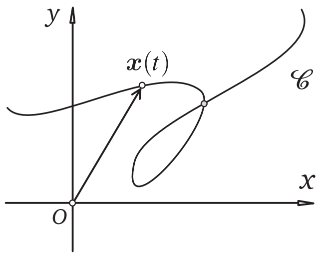


Figure 1.1

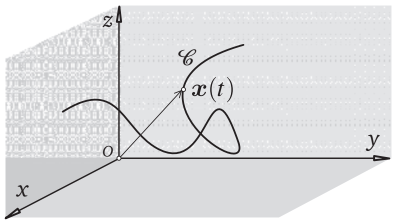


Figure 1.2

1.1 Dérivée d'une fonction vectorielle

DÉFINITION 1.2

On dit qu'une fonction vectorielle $\boldsymbol{x} : I \longrightarrow \boldsymbol{E}$ est **dérivable en un point** $t_0 \in I$, si le vecteur

$$\frac{\boldsymbol{x}(t_0 + h) - \boldsymbol{x}(t_0)}{h}$$

a une limite finie lorsque $h \to 0$; dans ce cas, la valeur de cette limite est notée $\boldsymbol{x'}(t_0)$ (ou $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}(t_0)$) et elle est appelée **vecteur dérivé** de $\boldsymbol{x}$ en t_0.

Si la fonction vectorielle $\boldsymbol{x}$ est dérivable en tout point t_0 de I, on dira qu'elle est **dérivable dans** I et, dans ce cas, nous obtenons une nouvelle fonction vectorielle $\boldsymbol{x'} : I \longrightarrow \boldsymbol{E}$ appelée **dérivée** de $\boldsymbol{x}$ dans I.

1.2 Dérivées d'ordre supérieur d'une fonction vectorielle

On définit la dérivée seconde $\boldsymbol{x''}$ ou $\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2}$ d'une fonction vectorielle $\boldsymbol{x}$ comme étant $(\boldsymbol{x'})'$ ou $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\right)$ et, de façon générale, $\boldsymbol{x}^{(n)} = \big(\boldsymbol{x}^{(n-1)}\big)'$ ou $\dfrac{\mathrm{d}^n\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^n} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right)$.

1. Il peut être utile de faire une distinction entre la courbe $\mathcal{C}$ et son paramétrage $\boldsymbol{x}$, comme en cinématique, où on distingue un **mouvement** de sa **trajectoire**.

Remarques

1. Si l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est rapporté à sa base canonique $(\boldsymbol{e_1}\,,\,\ldots\,,\,\boldsymbol{e_n})$, ce qui permet d'écrire :

$$\boldsymbol{x}(t) = \big(x_1(t)\,,\,\ldots\,,\,x_n(t)\big)$$

on peut vérifier sans difficulté que la fonction vectorielle $\boldsymbol{x} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est dérivable dans I si, et seulement si, les n **fonctions scalaires** $x_1, \ldots, x_n$ sont dérivables dans I et, dans ce cas, on aura, pour tout $t \in I$,

$$\boldsymbol{x}'(t) = \big(x_1'(t)\,,\,\ldots\,,\,x_n'(t)\big)$$

2. Dans la définition de la dérivée d'une fonction vectorielle, la droite passant par le point $\boldsymbol{x}(t_0)$ et dirigée par le vecteur $\dfrac{\boldsymbol{x}(t_0+h)-\boldsymbol{x}(t_0)}{h}$ a une position limite lorsque h tend vers 0, c'est la droite $\mathcal{T}$ passant par le point $\boldsymbol{x}(t_0)$ et dirigée par le vecteur $\boldsymbol{x}'(t_0)$, on l'appelle[2] **tangente à la courbe (associée à) $\boldsymbol{x}$ au point $\boldsymbol{x}(t_0)$** ; sa représentation paramétrique est donnée par :

$$\boldsymbol{Y}(t) = \boldsymbol{x}(t_0) + t\,\boldsymbol{x}'(t_0) \tag{1.1}$$

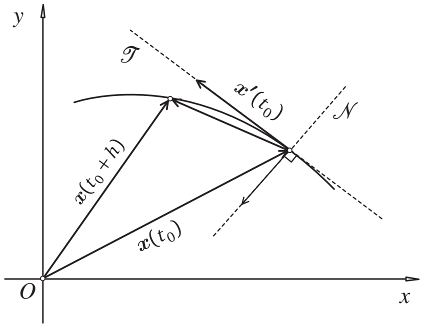


Figure 1.3 – Tangente à la courbe $\boldsymbol{x}$ au point $\boldsymbol{x}(t_0)$

Le vecteur $\boldsymbol{x}'(t_0)$ est appelé **vecteur tangent** à la courbe $t \mapsto \boldsymbol{x}(t)$ au point $\boldsymbol{x}(t_0)$.

En dimension 2, sous forme cartésienne, la relation (1.1), s'écrit, pour $\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t)\,,\,x_2(t))$:

$$\big(x - x_1(t_0)\big)\,x_2'(t_0) - \big(y - x_2(t_0)\big)\,x_1'(t_0) = 0 \tag{1.2}$$

3. La droite $\mathcal{N}$ perpendiculaire à la tangente à une courbe $t \mapsto \boldsymbol{x}(t)$ au point de tangence $\boldsymbol{x}(t_0)$ est appelée **normale** à la courbe, son équation paramétrique est donc

$$\big(x - x_1(t_0)\big)\,x_1'(t_0) + \big(y - x_2(t_0)\big)\,x_2'(t_0) = 0 \tag{1.3}$$

elle est dirigée par le vecteur $(-x_2'(t_0)\,,\,x_1'(t_0))$.

2. On suppose, bien entendu, que $\boldsymbol{x}'(t_0) \neq 0$; si ce n'est pas le cas, on cherche le plus petit entier $p > 0$ pour lequel la dérivée $\boldsymbol{x}^{(p)}(t_0) \neq 0$ et, dans ce cas, la tangente sera dirigée par le vecteur $\boldsymbol{x}^{(p)}(t_0)$.

© Dunod – Toute reproduction non autorisée est un délit.

4. **Interprétation cinématique :** Si $\rho(t)$ est le **vecteur position** d'un mobile à l'instant t, le vecteur dérivé $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{\rho}'(t)$ est le **vecteur vitesse instantanée** du mobile, alors que la dérivée seconde $\boldsymbol{\gamma}(t) = \boldsymbol{\rho}''(t) = \boldsymbol{v}'(t)$ est le **vecteur accélération**.

Proposition 1.1

Les dérivées des fonctions vectorielles possèdent les propriétés suivantes[3] *:*
Si α est une constante et $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ des fonctions vectorielles, alors

1. $(\boldsymbol{x} + \alpha\, \boldsymbol{y})'(t) = \boldsymbol{x}'(t) + \alpha\, \boldsymbol{y}'(t)$.
2. *Si $t \mapsto f(t)$ est une fonction réelle d'une variable réelle, alors* $(f(t)\, \boldsymbol{x})'(t) = f'(t)\, \boldsymbol{x}(t) + f(t)\, \boldsymbol{x}'(t)$.
3. $(\boldsymbol{x}(t) \cdot \boldsymbol{y}(t))' = \boldsymbol{x}'(t) \cdot \boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{x}(t) \cdot \boldsymbol{y}'(t)$.
   En particulier, si $\boldsymbol{x}(t)$ est un vecteur unitaire pour tout t (i.e. $||\boldsymbol{x}(t)|| = 1$), alors $\boldsymbol{x}(t) \cdot \boldsymbol{x}'(t) = 0$.
4. *Si $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, on a* $(\boldsymbol{x}(t) \wedge \boldsymbol{y}(t))' = \boldsymbol{x}'(t) \wedge \boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{x}(t) \wedge \boldsymbol{y}'(t)$.

1.3 Intégrale d'une fonction vectorielle

DÉFINITION 1.3

Soient $\boldsymbol{x} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle, a, b deux réels de I ; si l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n})$ et $\big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big)$ sont les composantes de $\boldsymbol{x}(t)$ dans $\mathcal{B}$, on définit l'intégrale $\int_a^b \boldsymbol{x}(t)\, \mathrm{d}t$ comme étant le vecteur de $\mathbb{R}^n$ de composantes $\left(\int_a^b x_1(t)\, \mathrm{d}t, \dots, \int_a^b x_n(t)\, \mathrm{d}t\right)$ ou

$$\int_a^b \boldsymbol{x}(t)\, \mathrm{d}t = \left(\int_a^b x_1(t)\, \mathrm{d}t\right) \boldsymbol{e_1} + \cdots + \left(\int_a^b x_n(t)\, \mathrm{d}t\right) \boldsymbol{e_n}$$

Proposition 1.2

Si α est un réel et $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ des fonctions vectorielles, alors :

1. $\displaystyle\int_a^b (\boldsymbol{x}(t) + \alpha\, \boldsymbol{y}(t))\, \mathrm{d}t = \int_a^b \boldsymbol{x}(t)\, \mathrm{d}t + \alpha \int_a^b \boldsymbol{y}(t)\, \mathrm{d}t$;
2. *Si $\boldsymbol{u}$ est un vecteur fixe (indépendant de la variable t) et si $\boldsymbol{x}$ est une fonction vectorielle, alors*

$$\int_a^b \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{x}(t)\, \mathrm{d}t = \boldsymbol{u} \cdot \int_a^b \boldsymbol{x}(t)\, \mathrm{d}t \quad \textit{et} \quad \int_a^b \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{x}(t)\, \mathrm{d}t = \boldsymbol{u} \wedge \int_a^b \boldsymbol{x}(t)\, \mathrm{d}t$$

3. Les deux symboles $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ représentent, respectivement, les produits scalaire et vectoriel des deux vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$.

2 Fonctions de plusieurs variables

2.1 Champs scalaires

Si $\mathcal{D}$ est une partie quelconque d'un espace euclidien $\boldsymbol{E}$ de dimension n, on appelle **champ scalaire** dans $\mathcal{D}$, une fonction f qui associe à tout point M de $\mathcal{D}$ un certain réel $f(M)$.
Dans la pratique, le point M est donné par ses coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans un certain repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n})$ de $\boldsymbol{E}$ et, par abus de notations, on écrira $f(M) = f(x_1, \dots, x_n)$; ainsi, un champ scalaire sera simplement une fonction de n variables réelles ; le plus souvent, nous prendrons $n = 2$ ou $n = 3$, ce qui nous donne des fonctions $f(x, y)$ (ou $f(x_1, x_2)$) à deux variables ou $f(x, y, z)$ (ou $f(x_1, x_2, x_3)$) à trois variables.

Remarque Pour éviter les ambiguïtés et pour que cette définition soit cohérente, nous supposerons que $f(M)$ est indépendante du choix du repère orthonormé, i.e. si $\mathcal{R}' = (O', \boldsymbol{u_1}, \dots, \boldsymbol{u_n})$ est un autre repère orthonormé de $\boldsymbol{E}$ et si $(x'_1, \dots, x'_n)$ sont les coordonnées de M dans $\mathcal{R}'$, alors si $f(M)$ est donnée par $g(x'_1, \dots, x'_n)$ pour une nouvelle fonction g, nous devons avoir $f(x_1, \dots, x_n) = g(x'_1, \dots, x'_n)$.

2.2 Champs vectoriels

Le terme de **champ de vecteurs** ou **champ vectoriel** $\boldsymbol{f}$ dans une partie $\mathcal{D}$ d'un espace euclidien $\boldsymbol{E}$ de dimension n, désigne une façon d'associer à tout vecteur pris dans $\mathcal{D}$ un vecteur dans $\boldsymbol{E}$, autrement dit, c'est une application $\boldsymbol{f} : \mathcal{D} \to \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

C'est donc un vecteur dont la longueur et la direction changent de point en point.

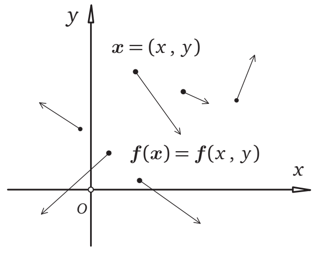


Figure 1.4 – Exemple d'un champ de vecteurs du plan

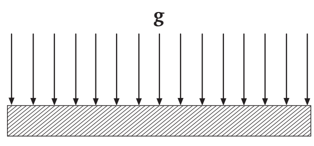


Figure 1.5 – Le champ de gravitation au voisinage de la surface terrestre

Dans la pratique, le vecteur $\boldsymbol{x}$ est donné par ses coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans un certain repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n})$ de $\boldsymbol{E}$ et, par abus de notations, on écrira
$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(x_1, \dots, x_n)$.

© Dunod – Toute reproduction non autorisée est un délit.

De cette définition, il résulte que se donner un **champ de vecteurs** $\boldsymbol{f}$ dans une partie $\mathcal{D}$ de $\boldsymbol{E}$, est équivalent à se donner n **champs scalaires** $f_1, f_2, \dots, f_n$ dans $\mathcal{D}$ tels que

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(x_1, \dots, x_n) = \big(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)\big)$$

où les f_j sont les composantes du vecteur $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ dans le repère $\mathcal{R}$.

Ainsi, un champ de vecteurs $\boldsymbol{f}$ du plan (resp. de l'espace) est de la forme $\boldsymbol{f}(x, y) = \big(f(x, y), g(x, y)\big)$ (resp. $\boldsymbol{f}(x, y, z) = \big(f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z)\big)$ pour des champs scalaires f, g (et h).

Pour représenter graphiquement un champ de vecteurs plan $(x, y) \mapsto \boldsymbol{f}(x, y)$ (la même idée s'applique au cas tridimensionnel), on sélectionne quelques points (x, y) du plan et on dessine le vecteur $\boldsymbol{f}(x, y)$ issu de ce point ; il s'agit d'une tâche tout indiquée pour un ordinateur ; les programmes Scilab, Mathematica et Maple possèdent des commandes appropriées pour cela.

Remarque La remarque de la section (2.1) vaut également pour les champs de vecteurs.

Exemples

1. L'exemple le plus simple de champ vectoriel $\boldsymbol{f}$ du plan ou de l'espace est ce qu'on appelle un **champ uniforme**, il s'agit d'un champ de vecteurs qui a en tout point du plan ou de l'espace la même intensité, la même direction et le même sens, i.e. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{V}$, pour un vecteur $\boldsymbol{V}$ fixe (ou indépendant de $\boldsymbol{x}$).

   Par exemple, sur la surface terrestre, le champ de gravitation **g** est uniforme (voir figure 1.5).
2. Nous avons de très nombreux exemples en physique : champ électrique $\boldsymbol{E}$, champ magnétique $\boldsymbol{B}$, champ des vitesses d'un solide ou fluide $\boldsymbol{V}$, champs de forces $\boldsymbol{F}$ (gravitation, etc.).

2.3 Graphe d'une fonction de plusieurs variables

DÉFINITION 1.4

Si $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction de n variables, on appelle **graphe** de f, que l'on note Γ_f, le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par : $\Gamma_f = \big\{\big(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})\big) \mid \boldsymbol{x} \in \mathcal{D}\big\}$.
Cette définition généralise la notion de **graphe** (ou **courbe représentative**) d'une fonction à **une** variable $y = f(x)$.

Si $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction d'**une** variable x, son graphe Γ_f est donc

$$\Gamma_f = \{(x, f(x))) \mid x \in \mathcal{D}\}$$

De même, si $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de deux variables (x, y), son graphe Γ_f est donc

$$\Gamma_f = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathcal{D}\}$$

qui représente une **surface** dans $\mathbb{R}^3$.

2.4 Surfaces de niveau d'un champ scalaire

DÉFINITION 1.5

Si $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle à n variables, on appelle **surface de niveau** $c \in \mathbb{R}$, le sous-ensemble

$$N_c = \left\{ \boldsymbol{x} = (x_1 , \dots , x_n) \in \mathcal{D} \quad | \quad f(\boldsymbol{x}) = c \right\}$$

Lorsque $n = 2$, on parle plutôt de **ligne de niveau** puisqu'il s'agit dans ce cas de courbes du plan $\mathbb{R}^2$.

Remarque Notons que la ligne de niveau N_c d'une fonction $f(x , y)$ (à deux variables) n'est autre que la projection sur le plan horizontal xOy de l'intersection $\Gamma_f \cap \{z = k\}$ du graphe Γ_f de la fonction f avec le plan horizontal d'équation $z = k$.

Exemples

1. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est le champ scalaire défini par $f(x , y) = x^2 + y^2$, alors les lignes de niveau de f sont, en général, des cercles dans le plan :

$$N_c = \left\{ (x , y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad f(x , y) = x^2 + y^2 = c \right\}$$

Si $c > 0$, N_c est le cercle du plan centré à l'origine $O = (0 , 0)$ et de rayon $R = \sqrt{c}$.
Si $c = 0$, la ligne de niveau $N_0 = \{(0 , 0)\}$ est réduite à l'origine O.
Si $c < 0$, on a $N_c = \emptyset$.

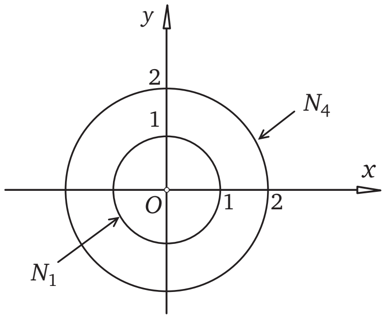


Figure 1.6 – Quelques lignes de niveau de $f(x , y) = x^2 + y^2$

2. Si f est un champ de températures (resp. de pressions), les lignes de niveau correspondantes sont appelées des **isothermes** (resp. **isobares**).

© Dunod – Toute reproduction non autorisée est un délit.

Entraînez-vous

1.1 Si $\boldsymbol{x}\,,\ \boldsymbol{y}\ :\ I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ sont des fonctions vectorielles dérivables, alors

1) $(\boldsymbol{x}(t) \cdot \boldsymbol{y}(t))' = \boldsymbol{x'}(t) \cdot \boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{x}(t) \cdot \boldsymbol{y'}(t)$.

En déduire que si $\boldsymbol{x}$ est une fonction vectorielle dérivable de norme (euclidienne) $||\boldsymbol{x}(t)||$ constante (i.e. indépendante de t), alors le vecteur $\boldsymbol{x'}(t)$ est orthogonal à $\boldsymbol{x}(t)$.

Montrer, d'une manière générale, que si $\boldsymbol{x}$ est quelconque et si $m(t) = ||\boldsymbol{x}(t)||$, alors

$$\boldsymbol{x}(t) \cdot \boldsymbol{x}'(t) = m(t)\, m'(t)$$

2) $(\boldsymbol{x}(t) \wedge \boldsymbol{y}(t))' = \boldsymbol{x'}(t) \wedge \boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{x}(t) \wedge \boldsymbol{y'}(t)$.

1.2 Pour une constante réelle α et deux vecteurs fixes $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, considérons la fonction vectorielle $\boldsymbol{x}$ définie sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ par $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{u}\, \cos(\alpha\, t) + \boldsymbol{v}\, \sin(\alpha\, t)$.

Montrer que $\boldsymbol{x''}(t) + \alpha^2\, \boldsymbol{x}(t) = 0$ et que $\boldsymbol{x}(t) \wedge \boldsymbol{x'}(t) = \alpha\, \big(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}\big)$.

1.3 Déterminer les équations des tangentes et normales aux courbes paramétriques suivantes aux points considérés :

1) $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t^3 - t)\, \boldsymbol{i} + (t^2 - 1)\, \boldsymbol{j}\,, \quad t = 1\,;$

2) $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t - \sin(t))\, \boldsymbol{i} + (1 - \cos(t))\, \boldsymbol{j}$ (Cycloïde), $t \in \mathbb{R}$ quelconque.

1.4 Donner le domaine de définition des champs scalaires suivants et représenter ces domaines dans le plan :

1) $f(x\,,\ y) = \dfrac{1}{\sqrt{x+y}} + \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,;$

2) $f(x\,,\ y) = \ln\left(\dfrac{x^2 + y^2}{x + y - 1}\right);$

3) $f(x\,,\ y) = \mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

1.5 Déterminer les surfaces (ou lignes) de niveau des champs scalaires suivants et les représenter graphiquement :

1) $f(x\,,\ y) = \sqrt{x\, y}\,;$

2) $f(x\,,\ y) = \dfrac{2\,x}{x^2 + y^2}\,;$

3) $f(x\,,\ y\,,\ z) = x + y + z\,;$

4) $f(x\,,\ y\,,\ z) = x^2 + y^2 + z^2$.