Jean-Marc Poitevin

Outils mathématiques pour physiciens et ingénieurs

Rappels de cours et exercices corrigés

2e édition

DUNOD

Illustration de couverture : © Ninog/Fotolia

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-075888-3

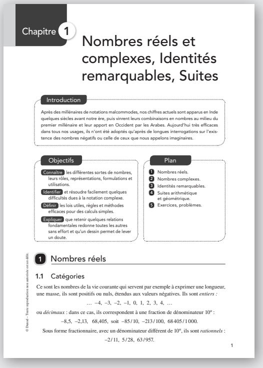
Table des matières

À la découverte de votre livre

1 Ouverture de chapitre

Elle donne :

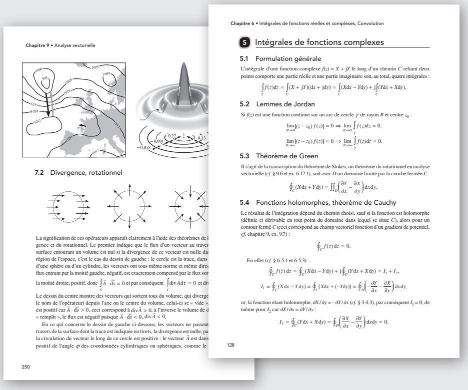
- une **introduction** aux sujets et aux problématiques abordés dans le chapitre
- un rappel des **objectifs** pédagogiques
- le **plan** du chapitre



2 Le cours

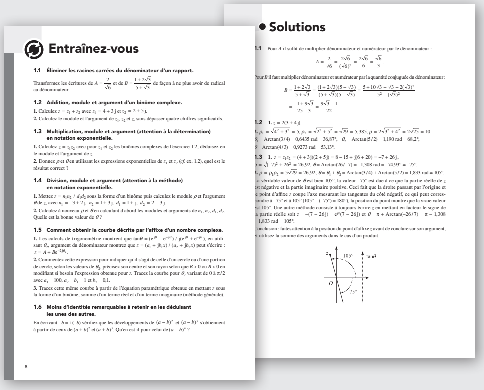
Le cours, concis et structuré, expose le programme. Il donne :

- un rappel des **définitions** clés
- des **schémas** pour maîtriser le cours
- des **exemples** et des **exercices d'applications** reliés au cours



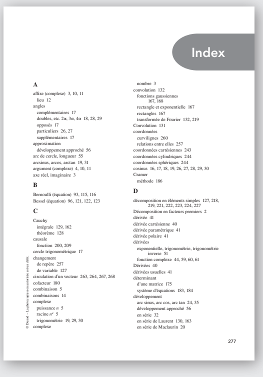
3 En fin de chapitre

- **L'essentiel** : les **points clés** pour réviser les connaissances essentielles
- Des **exercices** pour tester ses connaissances et s'entraîner
- Les **corrigés** des exercices



4 En fin d'ouvrage

Un index



Chapitre 1

Nombres réels et complexes, Identités remarquables, Suites

Introduction

Après des millénaires de notations malcommodes, nos chiffres actuels sont apparus en Inde quelques siècles avant notre ère, puis vinrent leurs combinaisons en nombres au milieu du premier millénaire et leur apport en Occident par les Arabes. Aujourd'hui très efficaces dans tous nos usages, ils n'ont été adoptés qu'après de longues interrogations sur l'existence des nombres négatifs ou celle de ceux que nous appelons imaginaires.

Objectifs

Connaître les différentes sortes de nombres, leurs rôles, représentations, formulations et utilisations.

Identifier et résoudre facilement quelques difficultés dues à la notation complexe.

Définir les lois utiles, règles et méthodes efficaces pour des calculs simples.

Expliquer que retenir quelques relations fondamentales redonne toutes les autres sans effort et qu'un dessin permet de lever un doute.

Plan

1 Nombres réels

1.1 Catégories

Ce sont les nombres de la vie courante qui servent par exemple à exprimer une longueur, une masse, ils sont positifs ou nuls, étendus aux valeurs négatives. Ils sont *entiers :*

$$\ldots\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$$

ou *décimaux* : dans ce cas, ils correspondent à une fraction de dénominateur 10^n :

$$-8{,}5,\ -2{,}13,\ \ 68{,}405,\ \text{soit}\ -85/10,\ -213/100,\ 68\,405/1\,000.$$

Sous forme fractionnaire, avec un dénominateur différent de 10^n, ils sont *rationnels* :

$$-2/11,\ 5/28,\ 63/957.$$

Certains nombres sont dits *irrationnels* car ils ne peuvent pas s'exprimer sous la forme d'une fraction de nombres entiers et leurs expressions consistent en suites de chiffres infinies :

$$\sqrt{2} = 2^{1/2} = 1{,}4142136..., \sqrt[5]{57^3} = 57^{3/5} = 11{,}311622...,$$

les nombres e et π entrent dans cette catégorie

(2,718 281 828 459 05…, 3,141 592 653 589 79…).

Les *nombres premiers* sont des entiers à partir desquels peuvent s'obtenir tous les autres par additions ou multiplications, ils sont divisibles uniquement par eux-mêmes ou par 1, ce sont (jusqu'à 100) : 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, d'où leur utilité pour effectuer des simplifications (*cf.* § 1.1.2).

En physique la façon d'écrire un nombre possède une signification, ainsi 12,1 m, 12,10 m, 12,100 m, indiquent qu'à douze mètres s'ajoute un décimètre à peut-être quelques centimètres près, puis dix centimètres à quelques millimètres près, enfin cent millimètres à quelques dixièmes de millimètres près.

Quand un nombre se présente sous la forme a^2, a^3, $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$, il faut le laisser sous cette forme pour poursuivre les calculs. Hormis en mathématiques, le résultat final doit par contre être exprimé sous forme décimale.

Conduire des calculs à partir de données à, par exemple, quatre chiffres significatifs ne peut donner un résultat à cinq chiffres significatifs ou plus. Ceci signifierait un résultat plus précis que les données or ceci est impossible, la précision pouvant même être dégradée

Une façon simple de représenter les nombres réels est de les situer sur un axe, l'axe des réels, $\overrightarrow{Ox}$ ou $\overrightarrow{x'x}$.

1.2 Décomposition en facteurs premiers

Cette décomposition est intéressante quand un nombre se présente sous forme fractionnaire, elle permet une simplification. Par exemple :

$$\frac{48\,510}{124\,509} = \frac{2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2 \times 11}{3 \times 7^3 \times 11^2} = \frac{2 \times 3 \times 5}{7 \times 11} = \frac{60}{77}.$$

Le calcul s'effectue en essayant de diviser par tous les nombres premiers successifs :

$$\begin{array}{r|l} 48\,510 & 2 \\ 24\,255 & 3 \\ 8\,085 & 3 \\ 2\,695 & 5 \\ 539 & 7 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 124\,509 & 3 \\ 41\,503 & 7 \\ 5\,929 & 7 \\ 847 & 7 \\ 121 & 11 \\ 11 & 11 \\ 1 & \\ & \end{array}$$

1.3 Puissances de 10

Un nombre décimal s'exprime avantageusement en utilisant les puissances de 10, positives (10^n) ou négatives ($10^{-n} = \frac{1}{10^n}$). Les valeurs de n peuvent être uniquement des multiples de 3, notation courante dans le domaine technique :

$$0{,}0026 = 26 \cdot 10^{-4} = 2{,}6 \cdot 10^{-3}, \qquad 15\,300 = 153 \cdot 10^2 = 15{,}3 \cdot 10^3.$$

Ceci facilite les calculs approchés, les calculs de produits et de rapports :

$$2{,}6 \cdot 10^{-3} \times 15{,}3 \cdot 10^3 = 2{,}6 \times 15{,}3,$$

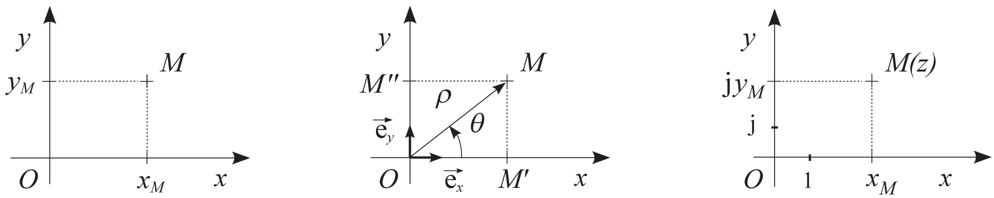
$$2{,}6 \cdot 10^{-3} \,/\, 15{,}3 \cdot 10^3 = 2{,}6 \cdot 10^{-6} \,/\, 15{,}3,$$

$$\frac{49 \cdot 10^2 \times 544 \cdot 10^3}{69 \cdot 10^4 \times 133 \cdot 10^{-2}} = \frac{49 \times 544 \times 10^5}{69 \times 133 \times 10^2} = \frac{49 \times 544}{69 \times 133} \times 10^3$$

$$= \frac{7^2 \times 2^3 \times 3^2 \times 7}{3 \times 23 \times 3^2 \times 7^2} \times 10^3 = \frac{2^3 \times 7}{3 \times 23} \times 10^3 = \frac{56}{69} \times 10^3.$$

2 Nombres complexes

2.1 Représentation d'un point dans un plan



Une première façon de positionner un point M consiste à donner son abscisse x_M et son ordonnée y_M, nombres réels des axes perpendiculaires $\overrightarrow{Ox}$ et $\overrightarrow{Oy}$.

La position du point M peut aussi être donnée par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ de longueur ρ faisant l'angle θ avec l'axe $\overrightarrow{Ox}$. Les vecteurs $\overrightarrow{OM'} = x_M\,\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{OM''} = y_M\,\overrightarrow{e_y}$, composantes de $\overrightarrow{OM}$, ont les longueurs $x_M = \rho\cos\theta$ et $y_M = \rho\sin\theta$, $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$ sont les vecteurs élémentaires de longueur unité.

On peut encore conserver $\overrightarrow{Ox}$ comme *axe réel* et définir $\overrightarrow{Oy}$ comme *axe imaginaire*. Les unités sont 1 sur l'axe réel et j sur l'axe imaginaire (i en mathématique, correspond généralement, en physique, à une intensité). M est l'*image* du nombre complexe z et z est l'*affixe* de M donnée par :

$$z = z_M = x_M + jy_M\,,$$

cette notation algébrique remplace la notation vectorielle :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{OM''}.$$

2.2 Les deux notations

Le nombre complexe z peut s'écrire comme ci-dessus, d'où son *module* et son *argument* :

$$z = x + \mathrm{j}y, \quad |z| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \mathrm{Arg}\, z = \theta = \mathrm{Arctan}(y/x) \Leftrightarrow \tan\theta = y/x.$$

Le nombre réel y est devenu le nombre imaginaire jy à 90° du précédent. Multiplier à nouveau par j provoque une nouvelle rotation de 90° et met donc le nombre du côté négatif de l'axe réel soit $-y$.

En écrivant que $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$ il est possible de passer à la notation exponentielle (vérifiable § 2.6.1, développements en série) :

$$z = \rho(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta) = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta},$$

le nombre j peut donc s'écrire $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2}$ soit le nombre 1 ayant subi une rotation de $\pi/2$. Mettre j au carré donne $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi}$ soit 1 ayant subi une rotation de π, et ainsi de suite, d'où :

$$\mathrm{j}^2 = -1, \ \mathrm{j}^3 = -\mathrm{j}, \ \mathrm{j}^4 = 1.$$

2.3 Calculs avec les complexes

Le nombre *conjugué* de $z = x + \mathrm{j}y = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$ est $\overline{z} = x - \mathrm{j}y = \rho\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}$, il intervient dans de nombreux calculs. Le produit de z par son conjugué donne :

$$z\overline{z} = (x + \mathrm{j}y)(x - \mathrm{j}y) = x^2 + y^2 = \rho^2, \text{ ou } \rho\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\rho\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta} = \rho^2.$$

Addition et *soustraction* obéissent aux lois habituelles :

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= x_1 + \mathrm{j}y_1 \\ z_2 &= x_2 + \mathrm{j}y_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} z_1 + z_2 &= x_1 + x_2 + \mathrm{j}(y_1 + y_2), \\ z_1 - z_2 &= x_1 - x_2 + \mathrm{j}(y_1 - y_2), \end{aligned}\right.$$

Multiplication et *division* peuvent s'effectuer de différentes façons, avec la notation exponentielle si le module et l'argument sont les grandeurs intéressantes, avec le binôme complexe s'il faut séparer les parties réelle et imaginaire du résultat :

$$z = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = z_1 z_2 = \rho_1\rho_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta_1+\theta_2)} \Rightarrow \rho = \rho_1\rho_2, \ \theta = \theta_1 + \theta_2,$$

$$z = z_1 z_2 \ldots z_\mathrm{k} \Rightarrow |z| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \ldots \cdot |z_\mathrm{k}|, \quad \mathrm{Arg}z = \mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2 + \ldots + \mathrm{Arg}z_\mathrm{k}.$$

$$z = z_1 z_2 = (x_1 + \mathrm{j}y_1)(x_2 + \mathrm{j}y_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + \mathrm{j}(x_1y_2 + x_2y_1) = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{j}\mathrm{Im}(z).$$

$$z = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_1}}{\rho_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta_1-\theta_2)}, \Rightarrow \rho = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \ \theta = \theta_1 - \theta_2,$$

et si $n_1, n_2, \ldots n_\mathrm{j}, d_1, d_2, \ldots d_\mathrm{k}$ sont des nombres complexes et si $z = (n_1 n_2 \ldots n_\mathrm{j})/(d_1 d_2 \ldots d_\mathrm{k})$:

$$|z| = \frac{|n_1| \cdot |n_2| \cdot \ldots \cdot |n_\mathrm{j}|}{|d_1| \cdot |d_2| \cdot \ldots \cdot |d_\mathrm{k}|},$$

$$\mathrm{Arg}\, z = \mathrm{Arg}\, n_1 + \mathrm{Arg}\, n_2 + \ldots + \mathrm{Arg}\, n_\mathrm{j} - (\mathrm{Arg}\, d_1 + \mathrm{Arg}\, d_2 + \ldots + \mathrm{Arg}\, d_\mathrm{k}),$$

pour séparer les parties réelle et imaginaire il faut effectuer des calculs du type suivant :

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} = \frac{(x_1 + jy_1)(x_2 - jy_2)}{(x_2 + jy_2)(x_2 - jy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + j(-x_1y_2 + x_2y_1)}{{x_2}^2 + {y_2}^2},$$

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{-x_1y_2 + x_2y_1}{x_2^2 + y_2^2}.$$

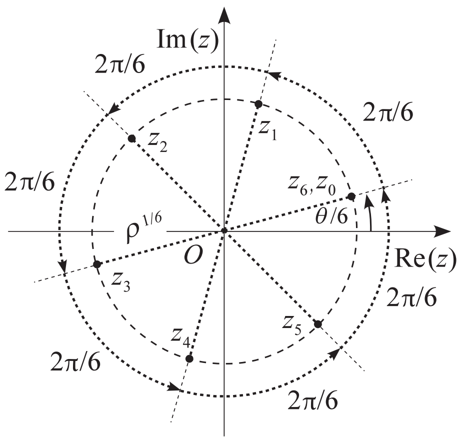
Avec la forme exponentielle le calcul de la *puissance* n^e d'un nombre complexe donne :

$$z^n = \rho^n (\cos n\theta + j\sin n\theta),$$

quant à la *racine* n^e elle tient compte de ce que changer θ en $\theta + 2k\pi$ ne change pas la position de $M(z)$ dans le plan complexe, il apparaît donc plusieurs solutions :

$$z^{1/n} = \rho^{1/n} e^{j(\theta/n + 2k\pi/n)} = \rho^{1/n} (\cos(\theta / n + 2k\pi / n) + j\sin(\theta / n + 2k\pi / n)).$$

Les racines de z correspondent à n points espacés de $2\pi/n$ sur un cercle de rayon $\rho^{1/n}$ et centre O, avec le point de départ à l'angle θ/n. Le dernier point est confondu avec le premier car alors $k = n$ et l'angle θ/n a augmenté de $2n\pi/n = 2\pi$. Ci-contre $n = 6$.



3 Identités remarquables

Certaines expressions possèdent des développements caractéristiques (remarquables), elles sont indiquées ci-après.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \qquad (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Pour passer de $a + b$ à $a - b$ il suffit d'écrire $-b = +(-b)$ et ces relations ont une forme générale :

$$(a + b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p, \quad \text{avec pour} \quad 0 \le p \le n, C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!},$$

les factorielles ci-dessus ont une particularité, nécessaire pour obtenir des développements corrects, elles s'écrivent en effet :

$$k! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times (k-2) \times (k-1) \times k, \ \underline{\text{et}} \ \ 0! = 1.$$

Les coefficients des termes successifs du développement de $(a + b)^n$ sont également donnés par le triangle de Pascal, calculés à l'aide d'additions comme indiqué par les flèches :

$$\begin{array}{llllllll}
n = 0 & 1 & & & & & \\
n = 1 & 1 & 1 & & & & \\
n = 2 & 1 & 2 & 1 & & & \\
n = 3 & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\
n = 4 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
n = 5 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccccc}
1 & 3 & 3 & 1 & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1
\end{array}$$

Les autres identités remarquables sont les suivantes avec, là encore, une forme générale :

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),\ \ a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$

$$a^n - b^n = (a - b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + a^{n-k}b^{k-1} + ... + b^{n-1}\right).$$

4 Suites arithmétique et géométrique

Une suite de nombres a_i dont chacun est donné par $a_i = a_{i-1} + r$, soit a_0, $a_1 = a_0 + r$, … $a_n = a_0 + nr$, est une suite arithmétique de raison r et de somme (*cf.* ex. 1.9) :

$$S_n = n(2a_0 + nr) / 2.$$

Si chacun des nombres est donné par $a_i = qa_{i-1}$, soit a_0, $a_1 = qa_0$, … $a_n = q^n a_0$, il s'agit d'une suite géométrique de raison q dont la somme est (*cf.* ex. 1.9) :

$$S_n = a_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Nombres réels

- Entiers naturels : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; etc.
- Entiers relatifs : …–3 ; –2 ; –1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; etc.
- Décimaux : $A/10^n = A \times 10^{-n}$, A entier relatif, n entier naturel.
- Rationnels : A/B, A et B entiers relatifs.
- Irrationnels : ne peuvent s'exprimer sous aucune des formes précédentes (π, e, $\sqrt{2}$, …).
- Premiers : divisibles uniquement par eux-mêmes ou par 1 pour un résultat entier naturel, les additionner et multiplier donne tous les entiers relatifs.

Nombres complexes

- Nombre imaginaire : $j = \sqrt{-1}$, soit $j^2 = -1$.
- Nombres complexes : $z = x + jy$, représentation algébrique d'un vecteur avec x réel en abscisse et y réel en ordonnée, peut aussi s'écrire $z = \rho e^{j\theta}$ avec

  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta = \text{Arctan}(y/x)$.

  $z^n = \rho^n e^{jn\theta} = \rho^n(\cos n\theta + j \sin n\theta)$,

  $z^{1/n} = \rho^{1/n}(\cos(\theta/n + 2k\pi/n) + j \sin(\theta/n + 2k\pi/n))$.

Identités remarquables

Que les nombres soient réels ou complexes,

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p, \quad (a-b)^n = (a+(-b))^n,$$

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \quad k! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (k-2) \times (k-1) \times k, \quad 0! = 1.$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + a^{n-k}b^{k-1} + \ldots + b^{n-1}).$$

Suites

- Arithmétique : $S_n = a_0 + (a_0 + r) + (a_0 + 2r) + \ldots + (a_0 + nr) = n(2a_0 + nr)/2$.
- Géométrique : $S_n = a_0 + qa_0 + q^2a_0 + \ldots + q^na_0 = a_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Entraînez-vous

1.1 Éliminer les racines carrées du dénominateur d'un rapport.

Transformez les écritures de $A = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$ et de $B = \dfrac{1+2\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}$ de façon à ne plus avoir de radical au dénominateur.

1.2 Addition, module et argument d'un binôme complexe.

1. Calculez $z = z_1 + z_2$ avec $z_1 = 4 + 3\,\mathrm{j}$ et $z_2 = 2 + 5\,\mathrm{j}$.

2. Calculez le module et l'argument de z_1, z_2 et z, sans dépasser quatre chiffres significatifs.

1.3 Multiplication, module et argument (attention à la détermination) en notation exponentielle.

1. Calculez $z = z_1 z_2$ avec pour z_1 et z_2 les binômes complexes de l'exercice 1.2, déduisez-en le module et l'argument de z.

2. Donnez ρ et θ en utilisant les expressions exponentielles de z_1 et z_2 (*cf.* ex. 1.2), quel est le résultat correct ?

1.4 Division, module et argument (attention à la méthode) en notation exponentielle.

1. Mettez $z = n_1 n_2 \,/\, d_1 d_2$ sous la forme d'un binôme puis calculez le module ρ et l'argument θ de z, avec $n_1 = -3 + 2\,\mathrm{j}$, $n_2 = 1 + 3\,\mathrm{j}$, $d_1 = 1 + \mathrm{j}$, $d_2 = 2 - 3\,\mathrm{j}$.

2. Calculez à nouveau ρ et θ en calculant d'abord les modules et arguments de n_1, n_2, d_1, d_2. Quelle est la bonne valeur de θ ?

1.5 Comment obtenir la courbe décrite par l'affixe d'un nombre complexe.

1. Les calculs de trigonométrie montrent que $\tan\theta = (\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}) \,/\, \mathrm{j}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta})$, en utilisant θ_2, argument du dénominateur montrez que $z = (a_1 + \mathrm{j}b_1 x) \,/\, (a_2 + \mathrm{j}b_2 x)$ peut s'écrire : $z = A + B\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\theta_2}$.

2. Commentez cette expression pour indiquer qu'il s'agit de celle d'un cercle ou d'une portion de cercle, selon les valeurs de θ_2, précisez son centre et son rayon selon que $B > 0$ ou $B < 0$ en modifiant si besoin l'expression obtenue pour z. Tracez la courbe pour θ_2 variant de 0 à $\pi/2$ avec $a_1 = 100$, $a_2 = b_1 = 1$ et $b_2 = 0{,}1$.

3. Tracez cette même courbe à partir de l'équation paramétrique obtenue en mettant z sous la forme d'un binôme, somme d'un terme réel et d'un terme imaginaire (méthode générale).

1.6 Moins d'identités remarquables à retenir en les déduisant les unes des autres.

En écrivant $-b = +(-b)$ vérifiez que les développements de $(a-b)^2$ et $(a-b)^3$ s'obtiennent à partir de ceux de $(a+b)^2$ et $(a+b)^3$. Qu'en est-il pour celui de $(a-b)^n$?

1.7 Utiliser quelques identités remarquables pour en déduire d'autres.

1. Écrivez le développement de $a^5 - b^5$ en utilisant la formule donnée § 1.3, vérifiez en effectuant le produit.

2. Développez sous la forme de produits de trois facteurs $a^4 - b^4$ et $a^6 - b^6$ en utilisant l'expression de $a^2 - b^2$.

3. Quel est le développement en un produit de deux facteurs de $a^2 + b^2$?

1.8 Binôme à la puissance *n* et triangle de Pascal.

En analyse combinatoire C_n^p désigne le nombre de combinaisons de n éléments identiques pris p à p, autrement dit le nombre de façons d'épuiser un stock de n éléments en les prenant par paquets de p éléments. Retrouvez les cinq premières lignes du triangle de Pascal en utilisant n éléments identiques désignés néanmoins par A, B, C ou D, n prenant les valeurs successives de 0 à 4. Vérifiez que ces résultats sont ceux donnés à chaque fois par le calcul de C_n^p. Dernière vérification, calculez $(a + b)^n$ en effectuant toutes les multiplications.

1.9 Calculer les sommes des suites arithmétique et géométrique, ainsi que celle des puissances successives de *x*.

En écrivant deux sommes arithmétiques identiques en sens opposés, calculez la somme de cette suite, pour calculer la somme d'une suite géométrique écrivez deux suites identiques en multipliant la deuxième par la raison q. Inspirez-vous de ces calculs pour trouver la somme de la série $x^0, x^1, x^2, \ldots x^n$, que se passe-t-il si $x = 1$ (ou $q = 1$ pour la suite précédente) ?

1.10 Faites la connaissance d'un nombre particulier.

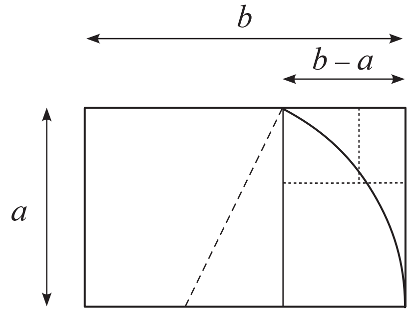
1. Trouvez le rapport b/a tel que les rapports des grands côtés et petits côtés des rectangles de la figure ci-dessous soient tous identiques.

Déduisez de vos calculs les propriétés du nombre $\phi = b/a$ (nombre d'or).

À quoi peut servir l'arc de cercle centré sur le milieu de la base du carré ?

2. Tracez un cercle de rayon b et diamètre AB puis, avec pour centre le point A, les arcs de cercles de rayons $a = b/\phi$ et $a + b$ qui coupent le cercle en C, F, D et E.

Tracez les segments CD, DB, BE, EF et FC. Qu'obtenez-vous ? Même question pour les segments CB, BF, FD, DE et EC.



Solutions

1.1 Pour A il suffit de multiplier dénominateur et numérateur par le dénominateur :

$$A = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{(\sqrt{6})^2} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Pour B il faut multiplier dénominateur et numérateur par la quantité conjuguée du dénominateur :

$$B = \frac{1+2\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}} = \frac{(1+2\sqrt{3})(5-\sqrt{3})}{(5+\sqrt{3})(5-\sqrt{3})} = \frac{5+10\sqrt{3}-\sqrt{3}-2(\sqrt{3})^2}{5^2-(\sqrt{3})^2}$$
$$= \frac{-1+9\sqrt{3}}{25-3} = \frac{9\sqrt{3}-1}{22}$$

1.2 **1.** $z = 2(3+4\mathrm{j})$.

2. $\rho_1 = \sqrt{4^2+3^2} = 5$, $\rho_2 = \sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{29} = 5{,}385$, $\rho = 2\sqrt{3^2+4^2} = 2\sqrt{25} = 10$.

$\theta_1 = \mathrm{Arctan}(3/4) = 0{,}6435$ rad $= 36{,}87°$, $\theta_2 = \mathrm{Arctan}(5/2) = 1{,}190$ rad $= 68{,}2°$,

$\theta = \mathrm{Arctan}(4/3) = 0{,}9273$ rad $= 53{,}13°$.

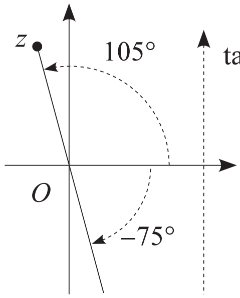
1.3 **1.** $z = z_1 z_2 = (4+3\mathrm{j})(2+5\mathrm{j}) = 8-15+\mathrm{j}(6+20) = -7+26\mathrm{j}$,

$\rho = \sqrt{(-7)^2+26^2} = 26{,}92$, $\theta = \mathrm{Arctan}(26/-7) = -1{,}308$ rad $= -74{,}93° \simeq -75°$.

2. $\rho = \rho_1\rho_2 = 5\sqrt{29} = 26{,}92$, $\theta = \theta_1 + \theta_2 = \mathrm{Arctan}(3/4) + \mathrm{Arctan}(5/2) = 1{,}833$ rad $\simeq 105°$.

La véritable valeur de θ est bien 105°, la valeur –75° est due à ce que la partie réelle de z est négative et la partie imaginaire positive. Ceci fait que la droite passant par l'origine et le point d'affixe z coupe l'axe mesurant les tangentes du côté négatif, ce qui peut correspondre à –75° et à 105° (105° – (–75°) = 180°), la position du point montre que la vraie valeur est 105°. Une autre méthode consiste à toujours écrire z en mettant en facteur le signe de la partie réelle soit $z = -(7-26\mathrm{j}) = e^{\mathrm{j}\pi}(7-26\mathrm{j})$ et $\theta = \pi + \mathrm{Arctan}(-26/7) = \pi - 1{,}308 = 1{,}833$ rad $= 105°$.

Conclusion : faites attention à la position du point d'affixe z avant de conclure sur son argument, et utilisez la somme des arguments dans le cas d'un produit.



1.4 **1.** $z = \dfrac{(-3+2\mathrm{j})(1+3\mathrm{j})}{(1+\mathrm{j})(2-3\mathrm{j})} = \dfrac{-3-6+\mathrm{j}(2-9)}{2+3+\mathrm{j}(2-3)} = \dfrac{-9-7\mathrm{j}}{5-\mathrm{j}}$

$$= -\frac{(9+7\mathrm{j})(5+\mathrm{j})}{(5-\mathrm{j})(5+\mathrm{j})} = -\frac{38+44\mathrm{j}}{5^2+1^2} = -\frac{19+22\mathrm{j}}{13} = \frac{-19-22\mathrm{j}}{13}.$$

D'où $|z| = \rho = \sqrt{19^2+22^2}\ /\ 13 = 2{,}236$ et, apparemment, $\mathrm{Arg}\,z = \theta = \mathrm{Arctan}(-22/-19)$ $= 0{,}8584$ rad $= 49{,}2°$.

2. $|n_1| = 3{,}606$, $|n_2| = 3{,}162$, $|d_1| = 1{,}414$, $|d_2| = 3{,}606$,

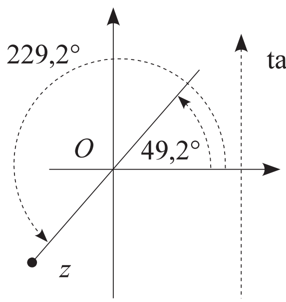
$\mathrm{Arg}\,n_1 = 2{,}553$ rad, $\mathrm{Arg}\,n_2 = 1{,}249$ rad, $\mathrm{Arg}\,d_1 = 0{,}7854$ rad, $\mathrm{Arg}\,d_2 = -0{,}9828$ rad,

soit $\rho = |n_1||n_2|\ /\ |d_1||d_2| = 2{,}236$ et $\theta = \mathrm{Arg}\ n_1 + \mathrm{Arg}\ n_2 - \mathrm{Arg}\ d_1 - \mathrm{Arg}\ d_2$ # 4 rad = 229,2 °.

Cette deuxième méthode de calcul de θ est la plus sûre et donne toujours la bonne valeur. Avec la méthode utilisée à la première question il aurait fallu examiner la position du point d'affixe z ce qui aurait montré que la valeur de θ devait être augmentée de 180 °, il était aussi possible de remarquer que z pouvait s'écrire (*cf.* § 1.2.2 et deuxième méthode) :

$$-\frac{19+22\mathrm{j}}{13} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi}\,\frac{19+22\mathrm{j}}{13},$$

d'où $\theta = \pi + \mathrm{Arctan}(22/19)$ # 4 rad = 229,2 °.



1.5 **1.** $\tan\theta_2 = b_2 x\ /\ a_2$, cette expression s'introduit dans celle de z en écrivant :

$$z = \frac{a_1}{a_2}\,\frac{1+\mathrm{j}b_1 x\ /\ a_1}{1+\mathrm{j}b_2 x\ /\ a_2} = \frac{a_1}{a_2}\,\frac{1+\mathrm{j}(a_2 b_1\ /\ a_1 b_2)\tan\theta_2}{1+\mathrm{j}\tan\theta_2}.$$

$\tan\theta_2$ étant remplacée par son écriture complexe, z s'écrit désormais :

$$z = \frac{a_1}{a_2}\,\frac{1+\mathrm{j}(a_2 b_1\ /\ a_1 b_2)(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_2})\ /\ \mathrm{j}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_2})}{1+\mathrm{j}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_2})\ /\ \mathrm{j}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_2})}$$
$$= \frac{a_1}{a_2}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_2} + (a_2 b_1\ /\ a_1 b_2)(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_2})}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_2} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_2}}.$$

En regroupant les termes et en divisant numérateur et dénominateur par $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2}$:

$$z = \frac{a_1}{a_2}\,\frac{(1+a_2 b_1\ /\ a_1 b_2)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2} + (1-a_2 b_1\ /\ a_1 b_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_2}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2}}$$
$$= \frac{a_1}{2a_2}\left[1+\frac{a_2 b_1}{a_1 b_2}+\left(1-\frac{a_2 b_1}{a_1 b_2}\right)\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\theta_2}\right].$$

2. La nouvelle expression de z est la somme d'un terme réel constant, $A = \dfrac{a_1}{2a_2}\left(1 + \dfrac{a_2 b_1}{a_1 b_2}\right)$, et d'un deuxième en notation exponentielle complexe dont le module B est constant et l'argument $-2\theta_2$ variable, $B = \dfrac{a_1}{2a_2}\left(1 - \dfrac{a_2 b_1}{a_1 b_2}\right)$, $-2\theta_2 = -2\mathrm{Arctan}(b_2 x / a_2)$. Le point d'affixe z décrit donc un arc de cercle de rayon B centré sur le point de l'axe réel d'abscisse A, si $B < 0$ il faut écrire :

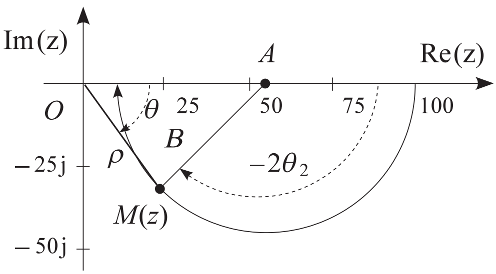
$$B = -\frac{a_1}{2a_2}\left(\frac{a_2 b_1}{a_1 b_2} - 1\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi}\,\frac{a_1}{2a_2}\left(\frac{a_2 b_1}{a_1 b_2} - 1\right),$$

$$z = \frac{a_1}{2a_2}\left[1 + \frac{a_2 b_1}{a_1 b_2} + \left(\frac{a_2 b_1}{a_1 b_2} - 1\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi - 2\theta_2)}\right],$$

l'arc de cercle est toujours centré sur le point d'abscisse A mais le rayon a pour longueur $-B$ et fait l'angle $\pi - 2\theta_2$ avec l'axe réel au lieu de $-2\theta_2$.
Avec les valeurs numériques $A = 55$, $B = 45$, l'angle $-2\theta_2$ varie de 0 à $-\pi$, d'où la courbe. Celle-ci passe par les points suivants :

$-2\theta_2$:	0,	$-\pi / 2$,	$-\pi$,
$\mathrm{Re}(z)$:	100,	55,	10,
$\mathrm{Im}(z)$:	0,	$-45\mathrm{j}$,	0.

Le point M d'affixe z est sur l'arc de cercle, à l'angle $-2\theta_2$, OM donne le module et l'argument de z, ρ et θ.



3. Mis sous la forme d'un binôme z devient :

$$z = \frac{(a_1 + \mathrm{j}b_1 x)(a_2 - \mathrm{j}b_2 x)}{(a_2 + \mathrm{j}b_2 x)(a_2 - \mathrm{j}b_2 x)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 x^2}{a_2^2 + b_2^2 x^2} + \mathrm{j}\frac{(a_2 b_1 - a_1 b_2)x}{a_2^2 + b_2^2 x^2},$$

avec les valeurs numériques et $\mathrm{Re}(z) = X$, $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{j}Y$, la courbe est donnée sous forme paramétrique par :

$$X = (100 + 0{,}1x^2) / (1 + 0{,}01x^2),\ Y = -9x / (1 + 0{,}01x^2).$$

$0 \leq -2\,\theta_2 \leq -\pi$ correspond à x variant de zéro à l'infini, le tracé à l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur n'est donc réalisable que jusqu'à x très grand, par exemple 1 000 ou 10 000