

HASSINA KETRANE  
LAËTITIA ELINEAU

# ÉPREUVE ORALE D'EXEMPLES ET D'EXERCICES

CAERPA  
AGRÉGATION INTERNE  
MATHÉMATIQUES

DUNOD

## Création graphique de la couverture : Hokus Pokus Créations

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1<sup>er</sup> juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du

droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 2016

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

[www.dunod.com](http://www.dunod.com)

ISBN 978-2-10-075029-0

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

# Avant-propos

## À tous ceux qui démarrent cette aventure...

À travers cet ouvrage, nous avons voulu apporter le point de vue de personnes qui ont enduré cette épreuve (dans tous les sens du terme !), partager notre expérience et nos travaux dans l'espoir de contribuer à la réussite de certains. Le point de départ de ce projet est certainement aussi le manque que nous avons nous-mêmes ressenti lorsque nous avons préparé l'agrégation.

Il faut bien comprendre que pour préparer l'agrégation, il faut avant tout réussir à se dégager du temps, et du temps on en a peu quand on doit concilier cela avec un emploi, une vie de famille, etc. Il faut donc travailler durement mais surtout efficacement. Abordez ce challenge avec un état d'esprit conquérant. Avec moins de 10% de réussite, seuls les plus coriaces arrivent au bout. Jamais, jamais, n'abandonnez jamais : la persévérance et la hargne sont, selon nous, les principaux facteurs de réussite.

Ce que nous vous proposons dans ce livre, c'est, pour chaque leçon traitée : un choix d'exercices, des idées de commentaires et un développement (dit « résolution commentée » dans le rapport du jury). N'y voyez surtout pas des modèles « prêts à l'emploi » mais avant tout un point de départ, une base de travail, des compléments d'idées. Il est d'ailleurs essentiel de personnaliser vos leçons dans la mesure où vos choix doivent être défendus devant le jury.

## Déroulement de l'épreuve :

Vous trouverez sur le site <http://agrint.agreg.org/archives.html> les sujets et rapports des années précédentes. Voici quelques extraits du rapport de jury de 2015 :

« Le candidat choisit trois à six exercices portant sur le thème retenu et rédige un document comportant la liste des énoncés, ainsi que les motivations et remarques correspondantes. À l'issue de la préparation, des photocopies de ce document sont réalisées par les appariteurs et sont remises aux examinateurs.

L'épreuve orale se déroule en trois temps :

- 1) Présentation motivée de l'ensemble des exercices sélectionnés par le candidat (durée maximale de 10 minutes).
- 2) Résolution commentée d'un des exercices au choix du candidat parmi ceux qu'il vient de présenter (durée de 15 minutes).
- 3) Questions du jury (durée minimale de 20 minutes). »

« L'épreuve n'est pas censée représenter une séance devant une classe de collège ou de lycée ; des objectifs plus ambitieux et un rythme plus soutenus peuvent être adoptés sous réserve d'une bonne maîtrise des notions mathématiques sous-jacentes et d'une réelle qualité d'exposition. »

« Il s'agit d'expliquer soigneusement les raisons qui ont conduit au choix des exercices. Motiver le choix d'une liste d'exercices, c'est expliquer la pertinence de ce choix par des raisons d'ordre pédagogique ou mathématique (l'un n'excluant pas l'autre), préciser les prérequis, situer les exercices dans leur contexte, commenter leur apport sur le plan pédagogique, etc ».

### **Préparation des leçons :**

L'épreuve orale d'exercices est assez technique et demande à être préparée minutieusement. L'idéal est d'arriver le jour de l'oral en ayant déjà une idée des exercices que l'on peut proposer. Ainsi, le temps de préparation pourra être mis à profit pour bien maîtriser le développement et pour se remettre en tête les idées principales de résolution de chaque exercice.

### **Quelques conseils de préparation :**

- Ne commencez surtout pas la préparation des leçons seulement une fois les écrits passés. Réfléchir à 160 leçons, à un niveau approfondi, et en deux mois, relève des travaux d'Hercule ! Le mieux est donc de s'y mettre dès le début des révisions et de « la jouer stratégique ». Choisissez en priorité celles qui vous permettent de préparer parallèlement les écrits et laissez les thèmes moins classiques pour plus tard. Par exemple, les séries de fonctions vous seront certainement d'un plus grand secours que les équations fonctionnelles.
- Apprenez à gérer votre temps de préparation aux leçons. Au départ, passer beaucoup de temps sur une seule leçon est tout à fait naturel et permet même d'approfondir les notions visées. Vous vous devez d'avoir un certain recul par rapport à ce que vous proposez. Toutefois, à l'approche des oraux, vous devriez avoir acquis un minimum de bagage mathématiques qui vous permettra de limiter ce temps de préparation. La vitesse d'exécution fait partie des qualités requises le jour de l'oral.
- Maîtrisez le niveau de la leçon traitée.
- Évitez de ne choisir que des exercices de haut vol. Le jour J, le temps passe vite, et on doit être capable de résoudre chacun des exercices proposés ou au moins d'en donner les grandes lignes de résolution.
- Choisissez-en au moins deux conséquents pour donner de la substance à la leçon. Les autres, plus simples, doivent servir à alimenter vos commentaires.
- N'hésitez pas à vous servir du tableau pour faire des schémas, rappeler des théorèmes importants,...
- Une fois les écrits passés, établissez-vous un planning pour traiter et synthétiser sur fiche toutes les leçons, sans oublier les développements. Laissez-vous une semaine à 10 jours avant votre passage pour lire, relire et apprendre vos fiches.
- Le choix du développement est primordial. Choisir un exercice trop calculatoire ne mettrait pas en valeur vos compétences mathématiques et, lié au stress, serait risqué d'erreur. Le jour J, il est impératif d'avoir levé en amont toutes les difficultés de l'exercice choisi. L'idéal est d'être capable de se le remettre en tête en maximum vingt minutes.

## Le jour J :

- Prévoyez des mini post-it pour marquer les pages des livres.
- Prévoyez une montre chronomètre pour gérer votre temps au tableau.
- La fatigue psychologique et physique est lourde. Pourquoi ne pas réserver une chambre d'hôtel près du lieu d'examen pour s'économiser au maximum ?
- Pensez-y, vous pouvez déposer vos valises de livres la veille de votre premier passage.

## Présentation du livre :

Chacune des leçons est présentée de la manière suivante :

- **Énoncés des exercices** : Dans cette partie figurent des exemples de choix d'exercices, ainsi que les références des ouvrages dont ils sont issus ou inspirés. On pourra faire usage d'un même énoncé pour plusieurs leçons. Cela fait évidemment partie de la stratégie de préparation.
- **Idées de commentaires** : Dans cette partie, nous donnons des idées pour la présentation orale en précisant dans chaque exercice les notions abordées et le lien avec le thème de la leçon.

### Fil directeur

↳ Le fil directeur indique la motivation générale du choix du ou des exercices suivants.



### Attention !

| Ces passages indiquent des notions importantes à maîtriser.



### Tableau

| Ces passages permettent d'identifier les notions qu'il convient d'écrire au tableau.



### Exercice 0 [RÉFÉRENCE] Développement 00

| Choix du développement. La grande majorité d'entre eux vous sont proposés en fin d'ouvrage. Vous y trouverez aussi la liste de toutes les leçons dans lesquelles l'exercice peut figurer, en souligné s'il peut faire office de développement.

### Exercice 0

Autre développement possible. Certains de ces « autres développements possibles » vous sont proposés en fin d'ouvrage.

*Si malgré tout le soin apporté à l'élaboration de cet ouvrage, des erreurs apparaissent, vous pouvez nous contacter à l'adresse mail suivante : [agreg.ek@gmail.com](mailto:agreg.ek@gmail.com)*

« La chute n'est pas un échec. L'échec, c'est de rester là où on est tombé. »

**Socrate**

« Impossible n'est pas une donnée, c'est une opinion. Impossible n'est pas une fatalité, c'est un défi. Impossible est une chance. Impossible est provisoire. Impossible n'est rien. »

**Mohamed Ali**

# Remerciements

C'est Laëtitia qui a eu l'idée de cet ouvrage et c'est à elle que revient tout le mérite de la mise en page. Merci à toi de m'avoir associée à ce projet.

Je dois beaucoup à Matthieu Fradelizi, vers qui je me suis très souvent tournée lors de mes questionnements mathématiques. C'est aussi lui qui s'est soumis de bonne grâce à la relecture de ce manuscrit. Je lui exprime sincèrement toute ma gratitude pour son aide précieuse.

Jean-Marie Monier nous a fait bénéficier d'une relecture finale très méticuleuse, accompagnée de judicieux commentaires. Qu'il en soit chaleureusement remercié.

Je pense aussi à tous ceux qui m'ont transmis leur savoir, qui m'ont donné de leur temps et qui ont répondu à toutes mes interrogations avec une infinie patience : Pierre-André Zitt, Pierre Puchol, Romain Dujardin, et bien d'autres encore...  
Qu'ils trouvent ici mes remerciements.

Un mot pour les éditions Dunod, qui nous ont pleinement accordé leur confiance. Un grand merci à eux, mais aussi à tous les autres éditeurs apparaissant dans la bibliographie, qui nous ont donné leur accord pour les droits de reproduction.  
Sans eux, ce livre n'aurait jamais vu le jour.

Merci à Nadia, qui a toujours cru en moi. Merci à Sophie, Meggie, Ilhem, Laëtitia, Fahed, Jessica, Cécile, Alexandre, Sébastien... qui m'ont rendu la préparation tellement plus agréable.

Je remercie enfin et surtout ma famille qui m'a supportée dans tous mes projets et qui a contribué à chacune de mes réussites : Abdenour, mon meilleur soutien ; mon frère Ahmed et ma sœur Souade ; mes parents, à qui je dois tout.

Je dédis, pour ma part, ce livre à mes filles Ilham et Yasmine. Je souhaite leur dire qu'avec du travail et de la volonté, on peut faire bien des choses. On ne m'en voudra pas de le dédier également à toutes les mamans et tous les papas qui se lancent dans cette aventure qu'est l'agrégation. Il faut un peu plus de courage mais on peut y arriver !

Hassina

# Merci à...

- ✿ Hassina, sans qui le livre n'existerait pas, de m'avoir toujours encouragée et motivée dans les moments de doute, tant durant l'écriture que la préparation du concours.
- ✿ Matthieu Fradelizi, pour sa relecture attentive et minutieuse de cet ouvrage et l'écriture de la préface.
- ✿ tous les enseignants de la préparation à l'agrégation interne de mathématiques de l'université Paris-Est Marne-la-Vallée, pour leurs enseignements et leurs conseils qui m'ont permis d'obtenir brillamment le concours.
- ✿ la maison d'édition Dunod, qui a accepté de publier notre ouvrage ainsi que les éditions Bréal, Cassini, Cépaduès, EDP Sciences, Publibook, Vuibert... qui nous ont donné leur accord pour citer des parties de leurs ouvrages, sans quoi notre projet n'aurait pu voir le jour.
- ✿ Jean-Marie Monier, pour sa relecture finale d'une extrême précision.
- ✿ mon mari, Mody, pour son soutien sans faille tout au long de ma préparation au concours et de la rédaction du livre.
- ✿ ma famille, en particulier mes parents Alain et Marie-Hélène, ma sœur Audrey et mon grand-père Guy, pour tous leurs encouragements qui m'ont donné confiance et motivée pour aller jusqu'au bout de ces deux aventures.
- ✿ Hassina, Mélanie, Sophie, Cécile, Ilhème, Sandrine, Meggie, Stéphane, Sébastien, Alexandre... avec qui la préparation à l'agrégation s'est avérée très plaisante et efficace.
- ✿ Frédéric Bro, pour son aide et ses conseils sur l'utilisation de LyX et de Latex.

Laëtitia



# Préface

Cet ouvrage présente un panorama de leçons d'exemples et exercices pour la seconde épreuve d'oral du concours de l'agrégation interne de mathématiques. Il a été rédigé par Hassina Ketrane et Laëtitia Elineau, deux lauréates du concours de l'année 2015, qui l'avaient préparé à l'Université Paris-Est Marne-la-Vallée.

Leur histoire, que l'on pourrait appeler une « success story », représente de façon emblématique le parcours idéal, mais aussi assez typique, des lauréats du concours et illustre parfaitement le fameux adage à propos du talent : un peu d'inspiration, mais surtout beaucoup de transpiration. Après un échec lors de la session 2014, pour laquelle elles n'avaient pas été admissibles, elles ne se sont pas découragées et ont poursuivi leur travail pour réussir brillamment en 2015 ; Hassina a même été reçue première au concours. Cette réussite remarquable peut servir de modèle à tous les enseignants qui s'engagent dans la préparation de ce concours et qui peuvent se trouver confrontés à un échec. Elle vient récompenser la persévérance et la détermination qui sont nécessaires pour progresser en mathématiques. Dans leur cas, cette détermination se manifestait à travers les nombreuses questions qu'elles venaient nous poser régulièrement. Le résultat obtenu est admirable.

Comme le concours requiert une expérience de cinq années de service public, les candidats doivent tous attendre au moins cinq ans après leur CAPES, avant de pouvoir passer l'agrégation interne. Bien sûr, occupés par leurs enseignements, ils n'ont plus eu le temps de faire des mathématiques à un niveau postbac, il leur faut donc s'y remettre sérieusement afin de préparer le concours. Les écrits ayant lieu en janvier, ils n'ont que quatre mois de préparation la première année ce qui est tout à fait insuffisant. Cela explique qu'il faut, dès le départ, envisager la préparation du concours sur plusieurs années et se préparer à un échec la première année. À la préparation au concours de l'agrégation interne de Mathématiques de l'Université Paris-Est Marne-le-Vallée, à laquelle je participe depuis dix ans, nous proposons donc une formation en deux ans. Une première année, dite de propédeutique, permet une remise à niveau générale et, lors de la deuxième année, nous insistons sur la préparation à l'oral. Pour l'écrit, nous organisons une dizaine d'épreuves blanches et un stage de révision à la Toussaint tandis que pour l'oral, les candidats passent des oraux blancs corrigés et commentés deux après-midi par semaine. Grâce à l'engagement de tous, nous obtenons de très bons résultats (une quinzaine de candidats admissibles et une dizaine d'admis en moyenne chaque année, parmi les meilleurs classés, comme le montre la réussite des auteurs de ce livre). Cependant, les heures qui nous sont allouées diminuent progressivement ce qui nous conduit à ne pouvoir traiter de moins en moins de leçons chaque année. C'est ainsi que les candidats

doivent de plus en plus s'appuyer sur leur travail personnel. Heureusement, celui-ci sera grandement facilité par la parution de ce livre qui deviendra bien vite, j'en suis sûr, un classique parmi les candidats de notre formation et de toutes les formations de France.

L'ouvrage rédigé par Hassina et Laëtitia est à la fois original, vivant, et utile. Il est le premier entièrement consacré à cette difficile épreuve d'oral d'exemples et exercices. Celle-ci, d'une durée de quarante-cinq minutes, se décompose en trois temps : une présentation motivée d'exercices en dix minutes au maximum, la résolution commentée d'un des exercices en quinze minutes et enfin de questions du jury, en vingt minutes au minimum. Hassina et Laëtitia apportent dans cet ouvrage tous les éléments nécessaires à ces trois étapes. En particulier, elles montrent, par l'exemple, comment le candidat peut se saisir de la première partie de l'épreuve, la présentation de son choix d'exercices, pour montrer au jury sa maîtrise et sa connaissance du sujet. Il fera ainsi une bonne première impression, ce qui est déterminant. De plus, elles donnent également de nombreux choix d'exercices classiques issus de livres de références pour les candidats, mais dont elles détaillent les solutions afin que chacun puisse appréhender et se saisir de ces résolutions plus rapidement. Enfin, tous ces exercices sont commentés, analysés et décortiqués pour tenter d'anticiper les questions du jury.

Je suis très heureux de préfacier, en quelques lignes, cet ouvrage vivant sur la préparation à la leçon d'exemples et exercices du concours de l'agrégation interne. Il constitue une introduction, facile d'accès et d'utilisation, qui se révélera bientôt indispensable à tout lecteur souhaitant préparer ce concours.

Matthieu Fradelizi, maître de conférence à l'Université Paris-Est Marne-la-Vallée et enseignant en préparation à l'agrégation interne

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Leçons d'algèbre</b> .....	<b>1</b>
	301 Exercices sur les groupes .....	2
	302 Exercices faisant intervenir les notions de congruences et de divisibilité dans $\mathbb{Z}$ .....	8
	305 Exercices faisant intervenir les nombres premiers .....	15
	310 Exercices d'algèbre linéaire faisant intervenir les polynômes .....	22
	312 Illustrer différents usages des matrices inversibles .....	29
	314 Exercices illustrant l'utilisation de déterminants .....	35
	315 Exercices illustrant l'utilisation de vecteurs propres et valeurs propres dans des domaines variés .....	44
	317 Exercices sur les endomorphismes diagonalisables .....	51
	319 Exercices faisant intervenir des algorithmes de décomposition de matrices ..	57
	322 Exercices sur les formes quadratiques .....	66
	348 Exercices illustrant l'emploi de puissances ou d'exponentielles de matrices ..	73
	353 Exercices utilisant la notion d'endomorphisme nilpotent .....	81
<b>II</b>	<b>Leçons d'analyse</b> .....	<b>87</b>
	401 Exemples d'étude de suites de nombres réels ou complexes .....	88
	403 Exemples d'étude de suites définies par une relation de récurrence .....	96

TABLE DES MATIÈRES

---

404	Exemples d'étude de la convergence de séries numériques .....	102
408	Exemples d'étude de séries réelles ou complexes non absolument convergentes .....	111
413	Exemples d'applications des séries entières .....	119
414	Exemples de séries de Fourier et de leurs applications .....	125
417	Exemples illustrant l'approximation de fonctions numériques .....	132
421	Exemples de calcul exact et de calcul approché de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment. Illustration algorithmique .....	138
426	Exemples et applications de calculs d'intégrales multiples .....	145
427	Exemples d'étude de fonctions définies par une intégrale .....	152
431	Exemples de recherche d'extremums d'une fonction numérique d'une ou plusieurs variables réelles .....	160
434	Exemples d'utilisation de changement de variable(s) en analyse .....	166
436	Exemples d'applications de l'intégration par parties .....	174
438	Exemples de problèmes de dénombrement .....	180
449	Exemples d'équations différentielles non linéaires .....	187
452	Exemples d'applications du théorème des fonctions implicites .....	193
<b>III</b>	<b>Développements .....</b>	<b>199</b>
1	Collier de perles .....	200
2	Critère d'Eisenstein .....	203
3	Cyclicité du groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ .....	206
4	Image de l'exponentielle .....	209
5	Nombres algébriques .....	212
6	Décomposition polaire .....	217
7	Matrices de Gram .....	220

8	Enfants qui jouent à la balle .....	223
9	Diagonalisation simultanée .....	227
10	Décomposition $LU$ .....	230
11	Ellipsoïde de John Loewner .....	233
12	Lemme de Morse à deux variables .....	238
13	Un théorème de Burnside .....	242
14	Stabilité du système $X' = AX$ .....	248
15	Méthode de Newton .....	253
16	Majoration à l'aide d'une intégrale .....	256
17	Calcul de la somme d'une série alternée .....	260
18	Séries non commutativement convergentes .....	263
19	Nombres de Bell .....	267
20	Phénomène de Gibbs .....	270
21	Résolution de $y'' + y =  \sin x $ .....	274
22	Méthode de Simpson .....	277
23	Fonction Gamma .....	281
24	Billard elliptique .....	285
25	Équation différentielle non linéaire .....	288
	<b>Algorithmes .....</b>	<b>293</b>
	Bibliographie .....	305



**Première partie**

**Leçons d'algèbre**

## Leçon 301 par H.K.

# Exercices sur les groupes

### Choix d'exercices

#### Exercice 1 [XAN1] 1.13

Soit  $G$  un sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$  non réduit à  $\{0\}$ .

Montrer que  $G$  est soit de la forme  $a\mathbb{Z}$ ,  $a \in \mathbb{R}_+^*$ , soit dense dans  $\mathbb{R}$ .

#### Exercice 2 [XALG1] 4.13

Soit  $p$  un nombre premier.

- 1) Soit  $q$  un nombre premier qui divise  $p - 1$ . Établir l'existence d'un élément de  $((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*, \times)$  d'ordre multiplicatif  $q$ .
- 2) Soit  $q$  un nombre premier et  $\alpha \in \mathbb{N}^*$  tels que  $q^\alpha$  divise  $p - 1$ . Montrer l'existence d'un élément de  $((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*, \times)$  d'ordre  $q^\alpha$ .
- 3) En déduire que  $((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*, \times)$  est cyclique.

#### ★ Exercice 3 [COM] p 44 Développement 1

On dispose d'un fil circulaire, de 4 perles bleues, de 3 perles blanches et de 2 perles oranges. Combien de colliers différents peut-on faire avec ce matériel ?

#### Exercice 4 [SOR, Alg] 1.8 + [MER]

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- 1) Montrer que le groupe  $S_n$  est engendré par les transpositions de  $\{1, \dots, n\}$ .
- 2) En déduire :
  - a) tous les morphismes du groupe  $S_n$  dans le groupe multiplicatif  $\mathbb{R}^*$ .
  - b) le nombre d'isométries qui conservent un tétraèdre régulier  $T = \{A, B, C, D\}$ .