j'intègre

EXERCICES INCONTOURNABLES

MPSI

Julien Freslon
Marie Hézard
Jérôme Poineau
Amaury Freslon

Mathématiques
exercices incontournables

4e édition

DUNOD

Conception et création de couverture : Atelier 3+

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-074928-7

Table des matières

Premier semestre — Algèbre

Premier semestre — Analyse

Second semestre — Algèbre

Second semestre — Analyse

Dénombrement et probabilités

Avant-propos

Cet ouvrage s'adresse aux élèves de première année de classes préparatoires scientifiques. Il leur propose de mettre en pratique les notions abordées en cours de mathématiques par le biais d'exercices. Chacun est assorti d'une correction détaillée, dans laquelle l'accent est mis sur la méthode qui mène à la solution.
Le livre est divisé en dix-neuf chapitres, consacrés chacun à une partie du programme. La répartition officielle des chapitres en deux semestres est respectée ; nous avons de plus regroupé, au sein de chaque semestre, les chapitres selon les thèmes classiques : Algèbre, Analyse et Probabilités. Au sein d'un même chapitre, les exercices ont été choisis de façon à passer en revue les notions à connaître, mais aussi à présenter les techniques susceptibles d'être utilisées.
En ce qui concerne les corrections, nous avons choisi de séparer clairement la réflexion préliminaire, comprenant analyse du problème et tâtonnements, de la rédaction finale, rigoureuse et précise. Cette dernière étape est signalée, dans le texte, par la présence d'un liseré gris sur la gauche et du pictogramme . Insistons que le fait que nous ne prétendons nullement présenter l'unique cheminement permettant d'aboutir à la solution d'un exercice donné, ni la seule rédaction acceptable. Dans les deux cas, bien des possibilités existent.
Par ailleurs, lorsque nous avons souhaité mettre en lumière un point important, nous l'avons rédigé sur un fond grisé et indiqué par . De même, la présence d'un piège dont il faut se méfier est signalée par .
Nous remercions David Hézard, qui a collaboré à la réalisation de ce livre en le relisant en détail et en nous faisant bénéficier de ses nombreuses remarques pertinentes.

Partie 1

Premier semestre — Algèbre

Premier semestre — Algèbre

CHAPITRE

1

Calculs algébriques

Exercice 1.1 : Raisonnement par analyse-synthèse

1. Déterminer les réels x tels que $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$.
2. Déterminer les réels strictement positifs x tels que $x^{(x^x)} = (x^x)^x$.

Il s'agit de questions ouvertes : on demande de trouver les solutions d'un problème sans les donner. Une stratégie consiste à raisonner par analyse-synthèse. C'est un raisonnement en deux étapes :

- Première étape (analyse du problème) : on considère une solution x de l'équation et on essaie, à partir des relations données dans l'énoncé, d'en déduire la forme de x.
- Deuxième étape (synthèse) : l'étape précédente a montré que les solutions sont d'une certaine forme ; il ne reste plus qu'à vérifier, parmi ces solutions potentielles, lesquelles sont bien les solutions du problème.

La nécessité de cette deuxième étape apparaîtra clairement dans la résolution de la première question.

1. ▶ **Analyse du problème :** nous allons élever au carré pour nous ramener à une équation du second degré.

Soit x un réel tel que $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$. Alors, en élevant au carré : $x(x-3) = 3x-5$, soit $x^2 - 6x + 5 = 0$. Les réels x vérifiant cette relation sont 1 et 5. Nous avons donc démontré :

si x est solution de l'équation **alors** $x = 1$ ou $x = 5$.

Nous n'avons pas démontré que les solutions sont 1 et 5, mais uniquement qu'elles ne peuvent valoir autre chose. Il faut désormais tester chacune d'elles pour voir si elles conviennent effectivement : c'est l'objet de l'étape de synthèse.

▶ **Synthèse :** on remplace successivement x par 5 puis 1 dans l'équation initiale, les calculs étant sans difficulté.

Il est facile de vérifier que 5 est bien solution. En revanche, pour $x = 1$, l'équation n'a pas de sens : elle fait intervenir des racines carrées de nombres négatifs. Ainsi, 1 n'est pas solution.
Conclusion : 5 est l'unique réel x tel que $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$.

Pourquoi l'étape d'analyse a-t-elle produit une « fausse solution » (dite également *solution parasite*) ? Nous avons élevé deux expressions au carré, or cette opération n'est pas réversible : s'il est vrai que $a = b$ entraîne $a^2 = b^2$, la réciproque est fausse en général. En élevant au carré, nous avons en fait résolu l'équation $x(x-3) = 3x-5$, qui se trouve avoir plus de solutions que l'équation de l'énoncé.

2. ▶ **Analyse du problème :** nous allons prendre les logarithmes afin de simplifier les puissances.

Soit x un réel strictement positif tel que $x^{(x^x)} = (x^x)^x$. Alors, en prenant le logarithme : $x^x \ln(x) = x \ln(x^x) = x^2 \ln(x)$.

On ne peut en déduire $x^x = x^2$ en simplifiant par $\ln(x)$: en effet, $\ln(x)$ pourrait être nul. Il faut donc ajouter une hypothèse pour poursuivre les calculs : $x \neq 1$.

Supposons $x \neq 1$. On a alors $\ln(x) \neq 0$, donc $x^x = x^2$.
En considérant à nouveau les logarithmes, il vient $x \ln(x) = 2 \ln(x)$. Comme on a supposé ici $x \neq 1$, on peut encore simplifier par $\ln(x)$, d'où $x = 2$.
Autrement dit, nous venons de démontrer : si x est un réel strictement positif distinct de 1 vérifiant $x^{(x^x)} = (x^x)^x$, alors $x = 2$.
Ainsi, il y a deux solutions éventuelles au problème : 1 et 2.

▶ **Synthèse :** calculs sans astuce, attention cependant à la place des parenthèses.

Il est clair que 1 convient bien. De même, nous avons $2^{(2^2)} = 2^4 = 16$ et $(2^2)^2 = 4^2 = 16$, donc 2 convient également.
Conclusion : il existe deux réels strictement positifs x vérifiant l'équation $x^{(x^x)} = (x^x)^x$: ce sont 1 et 2.

Si l'on oublie l'étape de synthèse dans la première question, on aboutit à un résultat faux : il y a une solution parasite.
Par ailleurs, si l'on ne fait pas attention lors de la simplification par $\ln(x)$ dans la deuxième question, on n'obtient que la solution $x = 2$.
Autrement dit, le manque de rigueur dans le raisonnement mathématique peut aboutir à trouver de « fausses solutions », ou au contraire à en oublier de vraies !

Pour éviter cela, il faut :

- prendre garde, dans le type de raisonnement présenté ici, à ne pas oublier l'étape de synthèse ;
- s'assurer que tous les calculs sont licites (ne pas diviser par zéro, ne pas prendre la racine carrée ou le logarithme d'un nombre négatif, etc.) et, au besoin, distinguer des cas comme dans la deuxième question.

Exercice 1.2 : Sommes doubles

Calculer les sommes doubles suivantes :

1. $S_1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} i2^j$.

2. $S_2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{n} (1-2^i)2^{ij}$.

3. $S_3 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i}$. Indication : il ne faut pas chercher à calculer directement la somme interne.

Le principe général de calcul des sommes doubles est de commencer par calculer la somme « interne », en considérant lors de ce calcul que l'indice de la somme « externe » est constant. On effectue ensuite le calcul de la somme externe, ce qui revient donc à calculer les sommes successivement, en partant de la plus intérieure.

1. Nous allons calculer S_1 en deux temps. À i fixé, nous allons calculer $\sum_{j=1}^{n} i2^j$ en faisant apparaître une somme géométrique, puis nous sommerons ensuite sur i.

Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ fixé. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} i2^j &= i \sum_{j=1}^{n} 2^j \quad \text{car } i \text{ ne dépend pas de l'indice } j \text{ de la somme} \\
&= i \left(\sum_{j=0}^{n} 2^j - 1 \right) \\
&= i \left(\frac{1-2^{n+1}}{1-2} - 1 \right) \quad \text{(somme géométrique de raison 2)} \\
&= i(2^{n+1} - 2).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{i=1}^{n} i(2^{n+1}-2) \\ &= (2^{n+1}-2)\sum_{i=1}^{n} i \\ &= (2^{n+1}-2)\frac{n(n+1)}{2} \quad \text{d'après une formule usuelle} \\ &= (2^n-1)n(n+1). \end{aligned}$$

Le fait que le terme général de la somme soit le produit d'un facteur dépendant uniquement de i et d'un autre dépendant uniquement de j permet d'effectuer plus rapidement le calcul, de la façon suivante :

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{i=1}^{n}\left(i\sum_{j=1}^{n} 2^j\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} 2^j\right) \\ &= \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{1-2^{n+1}}{1-2}-1\right) \\ &= (2^n-1)n(n+1). \end{aligned}$$

En effet, i ne dépendant pas de j, on peut le « sortir » de la somme interne. On obtient alors une somme de la forme $\sum_{i=1}^{n}(i\times A)$, où $A = \sum_{j=1}^{n} 2^j$ ne dépend pas de i, et ainsi

$$S_1 = A\sum_{i=1}^{n} i = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} 2^j\right).$$

Cette manipulation est cependant impossible lorsque l'on ne peut pas factoriser séparément les indices, comme c'est le cas dans la question suivante.

2. On procède comme dans la question précédente : on commence par fixer i pour calculer $\sum_{j=0}^{n} 2^{ij}$, puis on somme l'expression obtenue (qui dépend de i, mais plus de j) pour i allant de 1 à n. Les calculs font intervenir deux fois la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique.

Effectuons le calcul en commençant par la somme interne :

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{i=1}^{n} \left((1-2^i) \sum_{j=0}^{n} 2^{ij} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left((1-2^i) \sum_{j=0}^{n} \left(2^i\right)^j \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[(1-2^i) \frac{1-\left(2^i\right)^{n+1}}{1-2^i} \right] \quad \text{(somme géométrique de raison } 2^i \neq 1\text{)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(1 - 2^{i(n+1)}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} 1 - \sum_{i=1}^{n} \left(2^{n+1}\right)^i \quad \text{par linéarité de la somme} \\
&= n - 2^{n+1} \frac{1-\left(2^{n+1}\right)^n}{1-2^{n+1}} \quad \text{(somme géométrique de raison } 2^{n+1} \neq 1\text{).}
\end{aligned}$$

3. Cette somme double est plus difficile que les précédentes : elle est « triangulaire », c'est-à-dire que l'une des bornes de la somme interne dépend de l'indice de la somme externe.

Cela n'a pas de sens de permuter les deux sommes et d'écrire :

$$\sum_{i=k}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

En effet, dans la première somme, i varie de k à n, alors que k n'est pas encore défini (il ne l'est que pour la somme interne).

Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$ fixé. Aucune formule ne permet de simplifier la somme $\sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i}$, et nous allons donc la réécrire différemment pour pouvoir la calculer. Pour cela, nous allons commencer par écrire la somme double sous forme d'une seule somme avec un double indice. Pour ce faire, il suffit de remarquer que si $(k, i) \in \mathbb{N}^2$, alors

$$1 \leqslant k \leqslant n \text{ et } k \leqslant i \leqslant n \Longleftrightarrow 1 \leqslant k \leqslant i \leqslant n.$$

Nous pouvons écrire :

$$S_3 = \sum_{1 \leqslant k \leqslant i \leqslant n} \frac{1}{i}.$$

Cette chaîne d'inégalités traduit bien le fait que k peut prendre toutes les valeurs entre 1 et n, et i les valeurs entre k et n.

Ensuite, de la même façon, on remarque que si $(k,i) \in \mathbb{N}^2$, alors

$$1 \leqslant k \leqslant i \leqslant n \Longleftrightarrow 1 \leqslant i \leqslant n \text{ et } 1 \leqslant k \leqslant i.$$

Autrement dit, on interprète désormais cette chaîne d'inégalités de la façon suivante : d'abord i varie entre 1 et n, ensuite k varie entre 1 et i. Ceci nous donne la nouvelle écriture sous forme de somme double.

On en déduit :

$$S_3 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{i}.$$

Or, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ fixé, $\displaystyle\sum_{k=1}^{i} \frac{1}{i} = i \times \frac{1}{i} = 1$. Ainsi :

$$S_3 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{n} 1 = n.$$

Dans la somme $\sum_{k=1}^{i} \frac{1}{i}$, le terme général (qui est $\frac{1}{i}$) ne dépend pas de k. Ainsi, comme la somme a i termes, sa valeur est $i \times 1/i$, soit 1.

Exercice 1.3 : Parcours cycliste

Un cycliste va d'une ville A à une ville B. Le parcours compte x kilomètres de montée, y kilomètres de plat et z kilomètres de descente. Il roule à 15 km/h en montée, 20 km/h sur le plat et 30 km/h en descente. Il met deux heures à effectuer le trajet aller et trois heures pour le retour.

1. Déduire de l'énoncé les deux équations suivantes :

$$\begin{array}{ccccccc} 4x & + & 3y & + & 2z & = & 120 \\ 2x & + & 3y & + & 4z & = & 180. \end{array}$$

2. (Question indépendante de la suite de l'exercice) Les montées et descentes ont toutes une même déclivité : pour 100 m parcourus, l'altitude varie de 5 m. Déterminer la différence d'altitude des deux villes, ainsi que celle qui est située le plus haut.

3. Un autre cycliste, qui roule respectivement à 20, 30 et 40 km/h sur chaque type de route, effectue l'aller-retour en un temps total de trois heures quarante minutes. Déduire de cette donnée l'équation supplémentaire suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} 9x & + & 8y & + & 9z & = & 440. \end{array}$$

4. Déterminer les valeurs de x, y et z.

1. Le trajet aller et le trajet retour vont nous donner chacun une équation. Pour les obtenir, nous allons utiliser le fait que, pour effectuer ℓ kilomètres à une vitesse de v km/h, il faut ℓ/v heures. Ainsi, la montée du trajet aller a été effectuée en $x/15$ heures, puis le parcours sur le plat a été effectué en $y/20$ heures et, enfin, la descente a été effectuée en $z/30$ heures.

Le temps en heures passé par le cycliste sur chaque type de route est le quotient de la distance en kilomètres par la vitesse en km/h. Ainsi, à l'aller, le cycliste passe $x/15$ heures en montée, $y/20$ sur du plat et $z/30$ en descente, ce qui donne

$$x/15 + y/20 + z/30 = 2.$$

On multiplie par 60 pour obtenir la première équation :

$$4x + 3y + 2z = 120.$$

On procède de même pour obtenir la deuxième équation.

Pour le retour, les rôles de x et z sont échangés et le total horaire est 3, ce qui donne la deuxième équation, toujours en multipliant par 60 :

$$2x + 3y + 4z = 180.$$

2. On obtient une relation entre x et z, qui peut se déterminer par les deux équations précédentes.

À l'aller, la montée a fait gagner $5x/100$ km d'altitude au cycliste et la descente lui en a fait perdre $5z/100$. Puisque l'on gagne $x/20$ et perd $z/20$, la variation est $x/20 - z/20$. En soustrayant les deux relations précédentes, on obtient la relation $2x - 2z = -60$. Ainsi, la différence d'altitude entre A et B est égale à $-1{,}5$, autrement dit A est situé $1\,500$ m au-dessus de B.

Remarque de bon sens : A est située plus haut que B, vu que le retour prend plus de temps !

3. On raisonne exactement comme dans la question 1 : on calcule la durée en heures de l'aller-retour. Au total, nous avons $3 + 2/3 = 11/3$ d'heures.

Pour l'aller, le temps en heures est $x/20 + y/30 + z/40$; pour le retour, il est de $z/20 + y/30 + x/40$. La somme vaut $3 + 2/3$, ce qui donne l'équation

$$3x/40 \quad + \quad y/15 \quad + \quad 3z/40 \quad = \quad 11/3.$$

On multiplie par 120 pour faire disparaître les dénominateurs, et on obtient l'équation demandée :

$$9x + 8y + 9z = 440.$$

4. Nous utilisons ici la méthode du pivot de Gauss pour nous ramener à un système triangulaire. Une fois ceci effectué, la résolution sera immédiate.

On résout le système par la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 4x & + & 3y & + & 2z & = & 120 \\ 2x & + & 3y & + & 4z & = & 180 \\ 9x & + & 8y & + & 9z & = & 440 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr|l} 4x & + & 3y & + & 2z & = & 120 & \\ & & 3y & + & 6z & = & 240 & L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ & & 5y & + & 18z & = & 680 & L_3 \leftarrow 4L_3 - 9L_1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr|l} 4x & + & 3y & + & 2z & = & 120 & \\ & & 3y & + & 6z & = & 240 & \\ & & & & 24z & = & 840 & L_3 \leftarrow 3L_3 - 5L_2 \end{array}\right.$$

Il s'agit d'un système de Cramer, qui possède donc une unique solution.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr|l} 4x & + & 3y & + & 2z & = & 120 & \\ & & y & + & 2z & = & 80 & L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2 \\ & & & & z & = & 35 & L_3 \leftarrow \frac{1}{24}L_3 \end{array}\right.$$

On trouve :

$$(x, y, z) = (5, 10, 35).$$

Dans une résolution de système, les fractions sont nuisibles à la lisibilité des calculs et sont souvent sources d'erreurs. Lorsque le système initial a tous ses coefficients entiers, on gagne à effectuer les opérations sur les lignes de façon à ne jamais diviser, ce que l'on ne fait qu'à la toute dernière étape.

Nous n'avons pas détaillé la conclusion de la résolution. Quand on constate, comme ici, que le système est de Cramer, c'est-à-dire qu'après échelonnement on obtient un système triangulaire ayant autant d'équations que d'inconnues (ce qui garantit qu'il existe une unique solution), il est facile de conclure par substitution. Si l'on souhaite effectuer la « remontée », on obtient les deux étapes suivantes pour isoler chaque inconnue :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr|l} 4x & + & 3y & & & = & 50 & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ & & y & & & = & 10 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \\ & & & & z & = & 35 & \end{array}\right.$$

puis

$$\left\{\begin{array}{rrrcr|l} 4x & & & = & 20 & L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\ & y & & = & 10 & \\ & & z & = & 35 & \end{array}\right.$$

L'étape de « descente » aboutissant au système triangulaire équivalent doit être effectuée par la méthode du pivot de Gauss. Quand on résout des systèmes plus généraux qui ne sont pas de Cramer, mieux vaut utiliser les opérations sur les lignes également lors de la remontée : ceci permet de ne pas tourner en rond !

Exercice 1.4 : Système à paramètre

Résoudre, suivant les valeurs de $m \in \mathbb{R}$, le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} (2-m)x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & (5-m)y & + & 4z & = & 0 \\ 2x & + & 4y & + & (5-m)z & = & 0 \end{array}\right.$$

On applique bien sûr la méthode du pivot de Gauss. La présence du paramètre m complique un peu les choses. Rappelons qu'un paramètre fait partie des *données* : c'est une constante fixée préalablement, mais sa valeur n'est pas explicitée.

On échelonne en prenant garde de ne jamais multiplier la ligne *modifiée* par un coefficient qui pourrait être nul pour certaines valeurs du paramètre. Cependant, il n'y a pas de précaution particulière pour le coefficient de la ligne *modifiante* (au pire, s'il est nul, cela revient à ne rien faire). Par ailleurs, il ne faut bien sûr pas diviser par une expression dépendant du paramètre, puisque cela pourrait revenir à diviser par 0 pour certaines valeurs de m.

Il est en particulier préférable que le coefficient de la première inconnue de la première équation ne dépende pas du paramètre, ce qui explique que l'on débute ici par une permutation.

Appliquons la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 4y & + & (5-m)z & = & 0 \\ 2x & + & (5-m)y & + & 4z & = & 0 \\ (2-m)x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ \\ \\ \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 4y & + & (5-m)z & = & 0 \\ & & (1-m)y & + & (m-1)z & = & 0 \\ & & 4(m-1)y & + & (-m^2+7m-6)z & = & 0 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - (2-m)L_1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 4y & + & (5-m)z & = & 0 \\ & & (1-m)y & + & (m-1)z & = & 0 \\ & & & & (-m^2+11m-10)z & = & 0 \end{array}\right. \quad \Bigg| \; L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2$$

Les coefficients diagonaux s'annulent pour $m = 1$ ou $m = 10$. Ainsi, si $m \notin \{1, 10\}$, le système est de Cramer. Nous allons donc distinguer ces trois cas.

Pour $m = 1$, le système se réduit à

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 4y & + & 4z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

c'est-à-dire à l'équation :

$$x = -2y - 2z.$$

On a donc

$$\mathscr{S} = \{(-2y - 2z, y, z) | (y, z) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Pour $m = 10$, on obtient

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 4y & - & 5z & = & 0 \\ & - & 9y & + & 9z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & z/2 \\ y & = & z \end{array}\right.$$

On a donc

$$\mathscr{S} = \{(z/2, z, z) | z \in \mathbb{R}\}.$$

Pour $m \notin \{1, 10\}$, le système est de Cramer et admet une unique solution :

$$\mathscr{S} = \{(0, 0, 0)\}.$$

Aucun autre cas particulier n'est à distinguer ; il ne faut pas chercher à tâtons, et les valeurs en question ne sont pas nécessairement évidentes sur le système de départ. D'ailleurs, on voit que les valeurs particulières 2 et 5 pour m sont *a priori* tentantes, pour faire apparaître des 0, mais ne jouent en fait finalement aucun rôle. L'un des intérêts de la méthode du pivot de Gauss est de permettre de trouver de façon systématique les valeurs particulières intéressantes des paramètres.