Physique
exercices incontournables

j'intègre

EXERCICES INCONTOURNABLES

MPSI | PTSI

Séverine **Bagard**
Nicolas **Simon**

Physique

exercices incontournables

2e ÉDITION

DUNOD

11 rue Paul Bert, 92247 Malakoff Cedex
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-074918-8

Table des matières

Outils mathématiques

Signaux physiques

Mécanique

Partie 1
Outils mathématiques

Outils mathématiques

Objectifs généraux développés

L'utilisation d'outils mathématiques est indispensable en physique en classe de CPGE. Nous en avons rassemblé un certain nombre. Ce chapitre ne doit cependant pas être étudié de façon linéaire. Il convient de s'y reporter au fur et à mesure que le besoin s'en fera sentir. Ces outils devront être maîtrisés progressivement au cours de l'année et acquis en fin d'année.

On commence par s'intéresser aux **équations différentielles**, auxquelles mènent souvent les lois de la physique. Lorsque la fonction et ses dérivées n'interviennent qu'à la puissance unité, l'équation différentielle est dite **linéaire**.

En physique, on se limitera à des équations différentielles des premier et second ordres, avec ou sans second membre. Dans le cas d'équations différentielles avec second membre, la méthode de résolution couramment utilisée en physique n'est pas la méthode générale qui peut être exposée en mathématiques, mais une simplification de cette dernière, adaptée aux cas que nous rencontrons habituellement.

Dans le cas d'équations différentielles **non linéaires** la méthode présentée n'est plus applicable. Il faut alors résoudre directement dans son ensemble, par **séparation des variables**, l'équation différentielle proposée. Cette technique sera utilisée lors de la résolution d'exercices de mécanique.

On aborde ensuite les **nombres complexes**, qui constituent un outil mathématique largement utilisé en physique, notamment en **électrocinétique**, en **mécanique**, en **méthode de résolution** de systèmes d'équations différentielles couplées...

Enfin les **systèmes de coordonnées** seront nécessaires notamment en mécanique, pour repérer la position d'un point de l'espace. L'idée générale consiste à décomposer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ associé à M en trois vecteurs colinéaires aux trois vecteurs de base du système de coordonnées. Cette base sera, dans tous les cas, **orthonormée et directe**, de sorte que les opérateurs de base de l'analyse vectorielle (**produit scalaire**, **produit vectoriel**...) soient facilement utilisables dans ces bases.

On va rencontrer deux types de bases ; la base **fixe** du système **cartésien** et les bases **mobiles** des systèmes **cylindrique** et **sphérique**.

CHAPITRE

1

Les équations différentielles linéaires

Exercice 1.1 : Équation homogène du premier ordre

Lors de la décharge d'un condensateur de capacité C dans une résistance R, la fonction $u(t)$ régissant les variations de la tension aux bornes du condensateur s'écrit :

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = 0$$

avec $\tau = RC$. Résoudre cette équation différentielle en prenant comme condition initiale $u(0) = E$.

• Analyse de l'énoncé

L'équation à résoudre est bien linéaire, car seules la fonction $u(t)$ et sa dérivée première $\frac{du}{dt}$ à la puissance un interviennent. Par ailleurs, elle est à coefficients constants. Une telle équation différentielle est appelée **équation homogène** ou encore équation sans second membre. Sa résolution est très importante à maîtriser, car elle devient une étape de résolution lorsqu'on a affaire à une équation différentielle linéaire avec second membre.

L'équation étant du premier ordre (seule la dérivée première intervient), sa résolution va faire apparaître une constante d'intégration. Cette constante d'intégration sera déterminée en fin de résolution grâce à une condition, le plus souvent initiale ($t = 0$).

• Méthode de séparation des variables

Pour résoudre ce type d'équation homogène, on **sépare les variables**, c'est-à-dire que l'on fait passer d'un côté de l'équation tout ce qui est en u et du et de l'autre tout ce qui est en t et dt. On n'a alors plus qu'à intégrer par bloc chacun des deux membres.

La séparation des variables dans l'équation différentielle proposée mène à :

$$\frac{du}{u} = -\frac{dt}{\tau}$$

qui s'intègre en :

$$\ln u = -\frac{t}{\tau} + \lambda$$

où λ est la constante d'intégration.

Bien qu'on ait écrit une primitive de chacun des membres, il n'est pas nécessaire de faire apparaître une constante d'intégration de chaque côté. On considère en fait que λ contient ces deux constantes. On isole enfin la fonction $u(t)$ afin de déterminer la constante d'intégration par application de la condition initiale.

On passe alors à l'exponentielle :

$$u = e^{-\frac{t}{\tau}+\lambda} = e^{\lambda} \times e^{-\frac{t}{\tau}} = \mu e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$\mu = e^{\lambda}$ étant la nouvelle forme de la constante d'intégration.

On change le nom de la constante d'intégration, car, en toute rigueur, le passage à l'exponentielle a fait apparaître un terme en e^{λ} que l'on a préféré noter μ pour d'évidentes raisons de simplification des notations.

• Détermination de la constante d'intégration

À ce stade, on n'a plus qu'à utiliser la valeur fournie pour u, condition initiale $u(0) = E$ présentement.

La condition initiale fournie permet d'écrire $u(0) = E = \mu e^{-\frac{0}{\tau}} = \mu$.
La solution recherchée s'écrit alors :

$$u(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$$

Exercice 1.2 : Équation du premier ordre avec second membre

Lors de la décharge d'un condensateur de capacité C à travers une résistance R par un générateur de force électromotrice E, la fonction $u(t)$ régissant les variations de la tension aux bornes du condensateur s'écrit :

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$

avec $\tau = RC$. Résoudre cette équation différentielle en prenant comme condition initiale $u(0) = 0$.

• Analyse de l'énoncé

On a de nouveau une équation différentielle linéaire à coefficients constants à résoudre. La différence par rapport à l'exercice précédent est la présence d'un second membre. La solution d'une telle équation différentielle, **linéaire**, s'écrit comme la somme de deux termes :

– la **solution générale de l'équation homogène** ci-après notée u_g (c'est-à-dire sans second membre, notée ESSM) associée ;
– une **solution particulière de l'équation complète** ci-après notée u_p, cherchée de la même forme que le second membre de l'équation différentielle.

Par solution générale de l'ESSM, on entend solution faisant apparaître la (ou les) constante(s) d'intégration. Autrement dit, il ne faut pas injecter, à ce niveau, les conditions (initiales) fournies par l'énoncé. Ces conditions seront utilisées dans l'expression totale, somme de la solution générale et d'une solution particulière.

• Détermination d'une solution particulière de l'équation complète

Pour ce qui est de la solution particulière on rencontrera deux types d'équations différentielles : celles dont le second membre est une constante (comme c'est le cas ici) et celles dont le second membre est fonction du temps.

Dans le cas d'un second membre constant, on recherche la solution particulière u_p sous forme d'une constante satisfaisant à l'équation complète. Il s'agit donc finalement de trouver la valeur que va prendre la fonction $u(t)$ en régime permanent, c'est-à-dire quand on aura attendu suffisamment longtemps pour que les phénomènes transitoires soient amortis. Pour cela, on réinjecte $u_p = cte$ dans l'équation différentielle complète (toutes les dérivées s'annulent donc) et on en déduit u_p.

Dans le cas d'un second membre fonction du temps, on va *a priori* utiliser une méthode que l'on peut qualifier d'identification. On postule la solution particulière comme étant une fonction du temps du même type que le second membre. Ce dernier point, ainsi que ses limites d'application, sont détaillées dans l'exercice suivant.

> La condition de linéarité de l'équation différentielle est essentielle ; cette méthode de résolution ne s'applique pas aux équations différentielles non linéaires.

La solution générale de l'ESSM $\frac{du_g}{dt} + \frac{u_g}{\tau} = 0$ s'écrit (*cf* exercice précédent) :

$$u_g = \mu e^{-\frac{t}{\tau}}$$

avec μ une constante d'intégration.

Pour ce qui est de la solution particulière u_p, on obtient, en reportant dans l'équation différentielle complète : $\frac{du_p}{dt} + \frac{u_p}{\tau} = \frac{E}{\tau} = \frac{u_p}{\tau}$, soit $u_p = E$.

Au total, on a donc :

$$u(t) = u_g + u_p = \mu e^{-\frac{t}{\tau}} + E$$

• Détermination de la constante d'intégration

C'est bien à la somme de la solution générale de l'ESSM et de la solution particulière de l'équation complète que l'on applique la condition initiale.

On détermine enfin μ à l'aide de la condition $u(0) = 0$. Cela mène à $0 = E + \mu e^{-\frac{0}{\tau}} = E + \mu$, soit $\mu = -E$. Finalement, on écrit :

$$u(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Exercice 1.3 : Équation avec second membre fonction du temps

On parle de filiation radioactive lorsqu'un noyau père radioactif A se désintègre pour donner un noyau fils lui-même radioactif menant à C stable. On note respectivement λ_1 et λ_2 les constantes radioactives associées aux noyaux A et B. Les nombres $N_1(t)$ et $N_2(t)$ de noyaux de A et B présents à l'instant t satisfont aux équations différentielles suivantes :

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1 \quad \text{et} \quad \frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2$$

Déterminer les fonctions $N_1(t)$ et $N_2(t)$ en supposant qu'à $t = 0$ $N_1(0) = N_0$ et $N_2(0) = 0$.

• **Analyse de l'énoncé**

On a ici un système de deux équations différentielles linéaires à coefficients constants à résoudre. Sa particularité provient du fait que la deuxième fait intervenir la solution de la première. On va donc commencer par résoudre la première, que l'on reconnaît être une équation différentielle homogène, puis réécrire la deuxième équation différentielle en fonction de ce premier résultat.

La première équation différentielle s'écrit (*cf* exercices précédents) :

$$\frac{dN_1}{dt} + \lambda_1 N_1 = 0$$

La solution de cette équation différentielle s'écrit :

$$N_1(t) = N_0 e^{-\lambda_1 t}$$

La deuxième équation différentielle se réécrit alors :

$$\frac{dN_2}{dt} + \lambda_2 N_2 = \lambda_1 N_0 e^{-\lambda_1 t}$$

On est à présent en présence d'une équation différentielle avec second membre fonction du temps. En appliquant la méthode exposée à l'exercice précédent, on commence par chercher la solution générale de l'ESSM associée.

La solution générale de l'ESSM associée à la deuxième équation différentielle s'écrit :

$$N_2(t) = \mu e^{-\lambda_2 t}$$

avec μ constante d'intégration.

• Utilisation de la méthode d'identification
Le second membre est du type $Re^{-\lambda_1 t}$. On va donc chercher une solution de ce même type, en notant A par exemple la constante.
On va donc injecter une solution $u_p(t) = Ae^{-\lambda_1 t}$ dans l'équation différentielle complète. On va alors en déduire la valeur de la constante A. En effet, l'intérêt de cette méthode réside dans le fait que la dépendance temporelle $e^{-\lambda_1 t}$ de $u_p(t)$ se simplifie lors de cette opération.

On cherche une solution particulière de l'équation complète sous la forme : $u_p(t) = Ae^{-\lambda_1 t}$. On a alors $\frac{du_p}{dt} = -\lambda_1 Ae^{-\lambda_1 t}$. En reportant dans l'équation différentielle étudiée,on obtient :

$$-\lambda_1 Ae^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 Ae^{-\lambda_1 t} = \lambda_1 N_0 e^{-\lambda_1 t}$$

On en déduit immédiatement, après simplification par $e^{-\lambda_1 t}$:

$$A = \frac{\lambda_1 N_0}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

l'exponentielle dépendant du temps s'étant simplifiée.
On peut finalement écrire la solution complète :

$$N_2(t) = \mu e^{-\lambda_2 t} + \frac{\lambda_1 N_0}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t}$$

• Détermination de la constante d'intégration
Il ne reste alors plus qu'à injecter la condition initiale portant sur la fonction N_2 afin de déterminer la constante d'intégration μ.

Avec $N_2(0) = 0$, on obtient $\mu = -\frac{\lambda_1 N_0}{\lambda_2 - \lambda_1}$, d'où la solution finale :

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1 N_0}{\lambda_2 - \lambda_1}[e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}]$$

• Méthode de variation de la constante

Il peut vous paraître un peu miraculeux de voir la dépendance temporelle de la solution particulière se simplifier ainsi avec cette méthode par identification... Le fait est que cette méthode est loin d'être générale ; elle va juste le plus souvent donner un résultat avec les équations différentielles rencontrées en physique. S'il se trouve qu'elle ne permette pas de conclure (par non-simplification de la dépendance temporelle ou encore obtention d'une incohérence), il faut alors se ramener à la méthode générale de résolution des équations différentielles avec second membre (variable) : la **méthode de variation de la constante**.

En pratique, la méthode d'identification marche toujours pour les seconds membres constants. Un cas pouvant être rencontré en physique où elle peut être mise en défaut est celui où le second membre est de la même forme que la solution générale de l'ESSM.
Considérons par exemple l'équation différentielle sur la fonction $f(t)$ suivante :

$$\frac{df}{dt} + af = Ae^{-at}$$

avec a et A, constantes non nulles.
La solution générale de l'ESSM s'écrit μe^{-at}, le second membre est donc de la même forme qu'elle. Si l'on applique la méthode d'identification, c'est-à-dire si l'on cherche une solution particulière de l'équation complète sous la forme Be^{-at} (B constante), on aboutit, en reportant dans l'équation différentielle complète à :

$$-aBe^{-at} + aBe^{-at} = Ae^{-at}$$

relation impossible si $A \neq 0$.
La méthode de variation de la constante est alors nécessaire. Cette méthode consiste à rechercher la solution particulière sous la forme $B(t).F(t)$, où $F(t)$ est de la même forme que la solution générale de l'ESSM et $B(t)$ une fonction (la constante "qui varie"...) à déterminer.
Dans notre cas, on recherche alors la solution particulière sous la forme $B(t)e^{-at}$. En reportant dans l'équation complète on arrive à :

$$\frac{dB}{dt}e^{-at} - aB(t)e^{-at} + aB(t)e^{-at} = Ae^{-at}$$

soit $\frac{dB}{dt} = A$, d'où$B(t) = At + cte$. Il est bien sûr inutile d'introduire une nouvelle constante d'intégration puisqu'on recherchait **une** solution particulière.
Gardez toutefois à l'esprit que les cas où, en physique, la méthode d'identification est mise en défaut restent très rare et qu'il est donc pour la plupart des problèmes inutile de compliquer la résolution mathématique par l'utilisation de la méthode la plus générale.

Exercice 1.4 : Équation du deuxième ordre

Lors du mouvement horizontal d'un point matériel M de masse m relié à un ressort de raideur k et soumis à une force de frottement fluide de coefficient f, les variations temporelles $x(t)$ de l'abscisse du point matériel sont régies par l'équation différentielle suivante :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + f\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Déterminer l'expression de $x(t)$ en supposant $x(0) = L$ et $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = 0$. On écrira les différentes solutions possibles suivant les valeurs possibles de f, mais on ne déterminera complètement la solution que pour $f = 2\sqrt{mk}$.

• **Analyse de l'énoncé**

Il s'agit ici de résoudre une équation différentielle linéaire, à coefficients constants, homogène et du **second ordre**. Cette dernière caractéristique nous indique que deux constantes d'intégration vont apparaître lors de la résolution. Il faut donc toujours deux conditions (initiales) pour résoudre totalement ce type de problème. Généralement, l'énoncé donnera, ou on pourra en déduire facilement, des conditions initiales sur la fonction recherchée d'une part, sa dérivée d'autre part. Mais ceci n'est pas nécessaire, deux conditions portant sur la fonction elle-même peuvent tout à fait permettre de conclure...

• **Écriture du polynôme caractéristique**

On admet qu'une telle équation différentielle admet une solution de la forme $x_1 = Ae^{rx}$, avec A un réel non nul et r *a priori* complexe. Vous pouvez alors, en reportant dans l'équation différentielle initiale, en déduire que le nombre complexe r satisfait à l'équation du deuxième degré suivante, appelée **polynôme caractéristique** associé à l'équation différentielle du second ordre :

$$mr^2 + fr + k = 0$$

La forme des solutions de l'équation différentielle dépend alors de la nature des solutions du polynôme caractéristique, autrement dit du signe de son discriminant Δ.

• **Forme des solutions possibles**

– si $\boldsymbol{\Delta > 0}$, le polynôme caractéristique admet deux racines réelles r_1 et r_2. La solution générale de l'équation différentielle s'écrit alors :

$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

avec A et B deux constantes d'intégration.

– si $\boldsymbol{\Delta = 0}$, le polynôme caractéristique admet une racine réelle double r. La solution générale de l'équation différentielle s'écrit alors :

$$x(t) = e^{rt}(A + Bt)$$

avec A et B deux constantes d'intégration.

– si $\boldsymbol{\Delta < 0}$, le polynôme caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $\underline{r_1}$ et $\underline{r_2}$. La solution générale de l'équation différentielle s'écrit alors :

$$x(t) = Ae^{\underline{r_1}t} + Be^{\underline{r_2}t}$$

avec A et B deux constantes d'intégration. En physique, on ne laissera généralement pas cette solution sous cette forme. En effet, les racines conjuguées s'écrivant respectivement $\underline{r_1} = a + jb$ et $\underline{r_2} = a - jb$, la solution se met sous la forme :

$$x(t) = e^{at}\left[Ae^{jbt} + Be^{-jbt}\right]$$

L'utilisation de la formule d'Euler ($e^{jbt} = cos(bt) + jsin(bt)$ et $e^{-jbt} = cos(bt) - jsin(bt)$) mène finalement à une solution de la forme :

$$x(t) = e^{at}\left[(A+B)\cos(bt) + j(A-B)\sin(bt)\right]$$

On écrira donc directement en physique la solution sous la forme :

$$x(t) = e^{at}\left[\underline{A'}\cos(bt) + \underline{B'}\cos(bt)\right]$$

avec $\underline{A'} = A + B$ et $\underline{B'} = j(A-B)$ deux constantes d'intégration complexes.

Le discriminant du polynôme caractéristique de l'équation différentielle proposée s'écrit ici : $\Delta = f^2 - 4mk$.

- si $f > 2\sqrt{mk}$, $\Delta > 0$ et les racines réelles du polynôme sont $r_{1,2} = -\frac{f}{2m} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2m}$. On a alors :

$$x(t) = e^{-\frac{f}{2m}t}\left[Ae^{\frac{\sqrt{\Delta}}{2m}t} + Be^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2m}t}\right]$$

- si $f = 2\sqrt{mk}$, $\Delta = 0$ et la racine double du polynôme est $r = -\frac{f}{2m}$. La solution générale de l'équation différentielle est donc de la forme :

$$x(t) = e^{-\frac{f}{2m}t}(A + Bt)$$

On en déduit :

$$\frac{dx}{dt} = e^{-\frac{f}{2m}t}\left[-\frac{f}{2m}(A+Bt) + B\right]$$

Les deux conditions initiales données mènent alors à $A = L$ et $B = \frac{Lf}{2m}$.

- si $f < 2\sqrt{mk}$, $\Delta < 0$ et les racines complexes du polynôme sont $r_{1,2} = -\frac{f}{2m} \pm j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2m}$. On a alors :

$$x(t) = e^{-\frac{f}{2m}t}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2m}t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2m}t\right)\right]$$

CHAPITRE

2

Les nombres complexes

Exercice 2.1 : Module et argument d'un nombre complexe

On considère le nombre complexe suivant :

$$\underline{H}(jx) = \frac{a}{(1 - x^2) + jb}$$

où a et b sont deux réels constants et x une variable de $\mathbb{R}^+$. Déterminer le module H et l'argument φ de ce nombre complexe.

• Analyse de l'énoncé

Cet exercice s'intéresse aux différentes formes sous lesquelles on peut écrire un nombre complexe.

• Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Le nombre complexe présenté est écrit sous la forme d'un rapport de deux nombres complexes (le réel a peut en effet être considéré comme faisant partie de l'ensemble des nombres complexes). Son module est donc égal au rapport des modules des deux nombres et son argument est égal à la différence des arguments du numérateur et du dénominateur.

En physique on privilégiera souvent la présentation sous **forme exponentielle** (on dit encore **trigonométrique**) $He^{j\varphi}$ par rapport à la **forme algébrique** $Re(\underline{H}) + jIm(\underline{H})$. En effet, passer un rapport de nombres complexes sous forme algébrique (par multiplication des numérateur et dénominateur par le complexe conjugué du dénominateur) alourdit inutilement les expressions.

• Détermination du module

Pour déterminer le module de $\underline{H}$ il faut distinguer les cas a positif ou négatif. En effet, le module d'un nombre complexe est une grandeur réelle et positive. Le module du numérateur de $\underline{H}$ dépend donc du signe de a.

Il ne dépend par contre pas de celui de b.

– si $a > 0$,

$$H = \frac{a}{\sqrt{(1-x^2)^2 + b^2}}$$

– si $a < 0$

$$H = \frac{-a}{\sqrt{(1-x^2)^2 + b^2}}$$

• **Détermination de l'argument**

L'argument du numérateur, réel, dépend lui aussi du signe de a. En effet, l'argument d'un nombre réel positif est nul, tandis que celui d'un réel négatif est égal à π.

Pour ce qui est du dénominateur, deux cas sont également à distinguer suivant cette fois le signe de sa partie réelle. En effet, pour un nombre complexe écrit sous la forme $r + jk$, d'argument noté φ, on a $\tan\varphi = \frac{k}{r}$. Par contre, pour passer à la fonction réciproque et donc écrire

$$\varphi \ = \ \arctan\left(\frac{k}{r}\right)$$

il faut que l'angle recherché φ appartienne à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, domaine sur lequel la fonction tangente est bijective. En pratique, on ne peut utiliser la fonction arctangente que si la partie réelle du nombre complexe écrit sous forme algébrique est positive.

Si ce n'est pas le cas ($r < 0$), on va devoir se ramener au cas d'un nombre complexe à partie réelle positive par la manipulation suivante :

$$r + jk = (-1)[-r - jk]$$

L'argument de $r + jk$ peut donc s'écrire :

$$\arg(r + jk) = \arg(-1) + \arg(-r - jk)$$

Or le nombre complexe $-r - jk$ est à partie réelle positive. Son argument s'exprime donc simplement $\arctan\left(\frac{-k}{-r}\right) = \arctan\left(\frac{k}{r}\right)$, et l'argument de -1 est égal à π. Finalement, l'argument du nombre complexe $r + jk$ avec $r < 0$ est donc, si $r < 0$:

$$\pi + \arctan\left(\frac{k}{r}\right)$$

Une autre méthode consiste à ne pas passer par la fonction arctangente, mais à déterminer l'argument *via* la valeur de sa tangente et du signe de son cosinus ou de son sinus. En effet, la tangente nous donne l'angle modulo π. La connaissance du signe du sinus et du cosinus nous donne alors un intervalle de largeur $\frac{\pi}{2}$ contenant l'angle.

Pour le nombre complexe ici considéré, nous devons donc distinguer plusieurs cas :
- si $a > 0$ et $x < 1$: $\varphi = -\arctan \frac{b}{1-x^2}$
- si $a > 0$ et $x > 1$: $\varphi = -\pi - \arctan \frac{b}{1-x^2}$
- si $a < 0$ et $x < 1$: $\varphi = \pi - \arctan \frac{b}{1-x^2}$
- si $a < 0$ et $x > 1$: $\varphi = -\arctan \frac{b}{1-x^2}$

Exercice 2.2 : Utilisation de la notation complexe

On considère l'équation différentielle sur la fonction complexe $\underline{x}(t)$ suivante :

$$\frac{d^2\underline{x}}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{d\underline{x}}{dt} + \omega_0^2\underline{x} = \frac{F_0}{m}e^{j\omega t}$$

où m, Q, ω_0 et F_0 sont des constantes positives.
Déterminer complètement une solution particulière de cette équation cherchée sous la forme $\underline{x}(t) = X_0 e^{j\varphi}e^{j\omega t}$.

• **Analyse de l'énoncé**
On demande ici de déterminer une solution particulière d'une équation différentielle portant sur une fonction complexe $\underline{x}(t)$. La forme de la solution étant proposée par l'énoncé, il s'agit en fait de déterminer le **module** X_0 et l'**argument** φ du nombre complexe solution particulière de l'équation différentielle.
• **Dérivations en notation complexe**
L'intérêt de rechercher une solution complexe d'une équation différentielle sous la forme proposée est la simplification des opérations de dérivation (et d'intégration). Dériver revient à multiplier la fonction complexe par $j\omega$. Dériver deux fois revient ensuite à multiplier de nouveau par $j\omega$, soit au final par $-\omega^2$. Notons au passage qu'intégrer par rapport au temps reviendrait à une multiplication par $\frac{1}{j\omega}$.

Pour une solution écrite $\underline{x}(t) = X_0 e^{j\varphi}e^{j\omega t}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{x}}{dt} &= j\omega X_0 e^{j\varphi}e^{j\omega t} = j\omega\underline{x}(t) \\ \frac{d^2\underline{x}}{dt^2} &= -\omega^2\underline{x} \end{aligned}$$

Si l'énoncé demande la recherche d'une solution dont la dépendance au temps est en $e^{-j\omega t}$, les opérateurs dérivation première et intégration seront à présent des multiplications respectivement par $-j\omega$ et $-\frac{1}{j\omega}$; l'opérateur dérivée seconde est lui bien sûr inchangé.

• **Transformation de l'équation différentielle en équation algébrique**
En reportant la fonction $\underline{x}(t)$ et ses dérivées dans l'équation différentielle proposée, on aboutit finalement à une équation algébrique dans laquelle le terme en $e^{j\omega t}$ se factorise dans tous les termes. On peut alors le simplifier. Par ailleurs, les opérations de dérivation faisant également apparaître l'amplitude complexe $X_0 e^{j\varphi}$ en facteur de tous les termes du membre de gauche, on arrive ainsi à une équation algébrique en cette amplitude complexe.

Le remplacement dans l'équation différentielle mène à :

$$\begin{array}{rrl} & -\omega^2 X_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t} & \\ + & \frac{j\omega\omega_0}{Q} X_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t} & \\ + & \omega_0^2 X_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t} & = \frac{F_0}{m} e^{j\omega t} \end{array}$$

Soit, après factorisation par $X_0 e^{j\varphi}$ et division :

$$X_0 e^{j\varphi} = \frac{\frac{F_0}{m}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{j\omega\omega_0}{Q}}$$

• Identification du module et de l'argument de l'amplitude complexe de la solution

On s'est alors ramené au problème de l'exercice précédent.

Le module de l'amplitude complexe s'écrit :

$$X_0 = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2}}$$

et son argument :

$$\varphi = \begin{cases} -\arctan\left[\frac{\omega\omega_0}{Q(\omega_0^2 - \omega^2)}\right] & \text{si } \omega < \omega_0 \\ \\ -\pi - \arctan\left[\frac{\omega\omega_0}{Q(\omega_0^2 - \omega^2)}\right] & \text{si } \omega > \omega_0 \end{cases}$$

CHAPITRE

3

Systèmes de coordonnées et analyse vectorielle

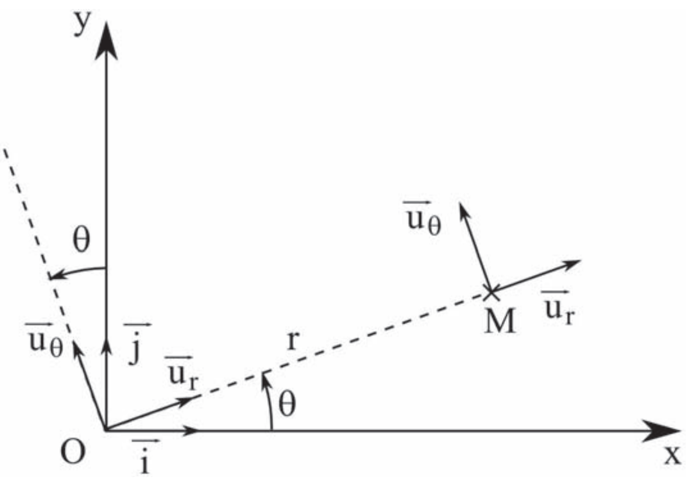
Exercice 3.1 : Base polaire

Déterminer les expressions des projections des vecteurs unitaires des coordonnées polaires en fonction des vecteurs de la base cartésienne. En déduire les dérivées temporelles des vecteurs de la base polaire.

• Analyse de l'énoncé

La base polaire est la restriction à deux dimensions de la base cylindrique (encore appelée cylindro-polaire). L'intérêt de cette base est qu'elle accompagne le point matériel M dont on cherche à repérer la position, au cours de son mouvement. La contrepartie est que cette base de vecteurs unitaires $(\vec{u}_r; \vec{u}_\theta)$ n'est pas fixe ; autrement dit les dérivées temporelles des vecteurs de la base polaire ne sont pas nulles, contrairement à celles de la base cartésienne fixe $\left(\vec{i}; \vec{j}\right)$.

Commençons par représenter les deux bases sur un même schéma :



Les coordonnées cartésiennes correspondent aux deux longueurs $(x; y)$ repérant les projections du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ sur les axes dirigés respectivement par $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Les coordonnées polaires $(r; \theta)$ correspondent respectivement à la norme du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ et à l'angle orienté que fait ce vecteur avec le vecteur fixe $\vec{i}$ de la base cartésienne.

• **Projection des vecteurs de la base polaire**

On projette les vecteurs mobiles de la base polaire sur les vecteurs fixes de la base cartésienne en effectuant les produits scalaires des premiers avec les seconds :

$$\begin{cases} \vec{u}_r &= (\vec{u}_r \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{u}_r \cdot \vec{j})\vec{j} \\ \vec{u}_\theta &= (\vec{u}_\theta \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{u}_\theta \cdot \vec{j})\vec{j} \end{cases}$$

La projection des vecteurs de la base polaire sur la base cartésienne donne :

$$\begin{cases} \vec{u}_r &= (\cos\theta)\vec{i} + (\sin\theta)\vec{j} \\ \vec{u}_\theta &= (-\sin\theta)\vec{i} + (\cos\theta)\vec{j} \end{cases}$$

Dérivation des vecteurs de la base polaire

Les vecteurs mobiles $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ sont des fonctions de l'angle θ, lui-même fonction du temps t. On va obtenir leurs dérivées temporelles en leur appliquant la formule de dérivation des fonctions composées et en utilisant leurs projections respectives sur la base cartésienne fixe. Pour retrouver la formule de dérivation d'une fonction composée, on peut utiliser l'écriture suivante :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{u}_r}{dt} &= \frac{d\vec{u}_r}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} &= \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} \end{cases}$$

Formellement, tout se passe comme si le $d\theta$ se simplifiait.

On a tout d'abord :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{u}_r}{d\theta} &= (-\sin\theta)\vec{i} + (\cos\theta)\vec{j} = \vec{u}_\theta \\ \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} &= (-\cos\theta)\vec{i} + (-\sin\theta)\vec{j} = -\vec{u}_r \end{cases}$$