MATHS

PCSI

Sylvain Gugger

DUNOD

Conception et création de couverture : Dominique Raboin

Avec la collaboration scientifique de Sabrina Bergez,
professeur en classes préparatoires au lycée Saint-Louis (Paris)

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-074911-9

Avant-propos

Cet ouvrage s'adresse aux élèves de première année de classe préparatoire PCSI. Il s'agit d'un complément à leur cours de mathématiques mettant l'accent sur les notions essentielles du cours à connaître et les méthodes à maîtriser, et permettant de les mettre en œuvre par le biais d'exercices. Le livre est divisé en six parties et vingt-six chapitres. Les trois premières parties correspondent à l'enseignement du premier semestre, les trois suivantes à celui du second semestre. Il commence par une introduction, qui présente quelques règles utiles pour l'écriture de raisonnement mathématiques.

Chaque chapitre commence par une partie nommée *L'essentiel du cours*. On y présente tous les points les plus importants du cours (définitions, propositions, théorèmes, remarques) à la manière d'une fiche. Les preuves ne sont volontairement pas incluses pour se concentrer sur les résultats à connaître, mais peuvent être trouvées dans votre cours au besoin. La première chose à faire pour apprendre un chapitre donné est de retenir cette partie.
On trouve ensuite une partie nommée *Les méthodes à maîtriser*. Elle présente les méthodes en rapport avec le chapitre en cours qu'il faut absolument savoir mettre en pratique. Chaque méthode est illustrée par un exemple corrigé en détail, et comporte un renvoi vers les exercices qui l'utilise. Il est très utile de refaire par soi-même les exemples de chaque méthode sur une feuille blanche lors des révisions du chapitre.


Si la méthode présentée est facilement programmable sur ordinateur, on trouvera ensuite un programme associé en langage Python.

Pour tester la connaissance du cours et des méthodes, chaque chapitre comporte ensuite une *Interro de cours*. Elle comporte généralement des questions de cours (énoncé d'une définition ou d'un théorème), des vrais/faux et des exemples d'application directe des méthodes. Cette partie permettra d'identifier rapidement les éventuelles lacunes sur le chapitre en cours.
La suite du chapitre est consacrée aux *Exercices*. On les a séparé en deux parties : dans la rubrique *S'entraîner*, on trouve un ensemble d'exercices couvrant tous les points du chapitre. Ce sont les plus faciles, en général, mais certaines méthodes étant plus difficiles à mettre en œuvre que d'autres, ils ne sont pas nécessairement de difficulté égale. La rubrique *Approfondir* contient d'autres exercices pour continuer de s'exercer, a priori un peu plus difficiles. Lorsque cela était possible, on a choisi des exercices proposés récemment à l'oral de concours d'entrée aux grandes écoles.
Enfin, la partie *Correction* comporte les corrigés détaillés de l'interrogation de cours et des exercices.

Durant tout l'ouvrage, on a utilisé un certain nombre de pictogrammes :


pour attirer l'attention du lecteur sur un ou plusieurs points spécifiques.


pour signaler un piège ou une erreur à éviter.


pour mettre l'accent sur une bonne manière de rédiger.

Un grand merci à Sabrina Bergez pour avoir relu en détail l'intégralité de l'ouvrage et pour ses nombreux conseils.

Table des matières

Partie 4 Algèbre linéaire

Partie 5 Analyse réelle (semestre 2)

Partie 6 Probabilités

Pour bien commencer

Le but de cette introduction est de donner un certain nombre de conseils de rédaction pour bien commencer l'année de classe préparatoire.

Méthode 0.1 : Prendre garde aux hypothèses d'un théorème

Lorsqu'on applique un théorème, il faut bien prendre garde à ce que toutes les hypothèses soient vérifiées avant d'utiliser la conclusion.
Par exemple, les théorèmes faisant le lien entre monotonie d'une fonction et signe de sa dérivée ne sont vrais que sur un intervalle !

Exemple d'application

Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux (on justifiera) ?

(a) Une fonction de dérivée strictement négative sur I est strictement décroissante sur I.

(b) Pour montrer qu'une fonction est monotone, on la dérive et on étudie le signe de sa dérivée.

(c) Une fonction dont la dérivée s'annule peut être strictement monotone.

(d) Une fonction dont la dérivée est nulle sur I est constante sur I.

Correction :
(a) est faux : Comme on l'a expliqué dans la méthode, il faut que I soit un intervalle pour que le théorème soit vrai. La fonction inverse a une dérivée strictement négative sur $I = \mathbb{R}^*$, mais n'est pas strictement décroissante sur I : on a $-1 < 1$, et $f(-1) = -1 < 1 = f(1)$. f est en revanche strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
(b) est faux : Une fonction n'est pas toujours dérivable, donc on ne peut pas forcément la dériver pour montrer qu'elle est monotone. Par exemple la fonction partie entière (qui sera proprement introduite au chapitre 10) est croissante sur $\mathbb{R}$, mais non dérivable sur $\mathbb{R}$.
(c) est vrai : La fonction $f : x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, même si sa dérivée s'annule en 0.
(d) est faux : Là encore, il faut que I soit un intervalle pour que le théorème soit vrai. Si I n'est pas un intervalle, f est constante sur chacun des intervalles composant I, mais nécessairement avec la même valeur. Par exemple, $f : [-1,1] \cup [3,5] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \left| \begin{array}{l} 1 \text{ si } x \in [-1,1] \\ 5 \text{ si } x \in [3,5] \end{array} \right.$ est dérivable, de dérivée nulle sur $[-1,1] \cup [3,5]$, mais non constante.

Méthode 0.2 : Définir ses variables

Lorsqu'on doit montrer un énoncé dépendant d'une (ou plusieurs) variable, il est important de toujours bien introduire cette variable. Sans cela, une personne qui lit votre raisonnement ne peut pas le comprendre.
x n'est pas forcément un nombre réel, n un nombre entier ou f une fonction (même si ce sont des noms très courants pour chacun de ces objets). Imaginez que vous ayez remplacé toutes les lettres de vos raisonnements par des dessins. Votre raisonnement doit toujours être compréhensible !

Exemple d'application

Définir les variables utilisées dans les formules ou les phrases suivantes.

(a) $\ln'(h) = \dfrac{1}{h}$. **(b)** x est dérivable sur $\mathbb{R}$.

(c) $\dfrac{1}{f} = \dfrac{\overline{f}}{|f|^2}$. **(d)** $n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Correction :

(a) On regarde la dérivée de ln en h, il faut donc que h soit un réel strictement positif.
(b) On parle du terme dérivable pour x, il faut donc que x soit une fonction. Pour pouvoir être dérivable sur $\mathbb{R}$, elle doit être définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
(c) On parle du conjugué de f (notation $\overline{f}$) et de son module, f doit donc être un nombre complexe, non nul pour qu'on puisse en prendre l'inverse.
(d) On parle d'une limite pour n, ce doit donc être une fonction. Pour regarder sa limite en $+\infty$, elle doit être définie sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ (avec $a \in \mathbb{R}$), à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Dans le dernier point, il est inutile de définir x (on dit que x est une variable muette). En effet, on précise que x est un réel qui tend vers $+\infty$ dans la notation $x \to +\infty$.

Méthode 0.3 : Vérifier l'existence des objets manipulés

Il faut toujours prouver que ce que l'on est en train d'étudier existe bien en mathématiques. Quand on veut diviser par un nombre, il doit être non nul. Quand on veut dériver une fonction, elle doit être dérivable etc...
Il faut avoir cela en tête en permanence lorsqu'on écrit un raisonnement, en justifiant chaque fois que c'est nécessaire l'existence des objets manipulés.

Exemple d'application

Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant.

Soient a et b deux nombres réels non nuls tels que $a = b$. On peut donc écrire :

$$a^2 = ab \quad \text{donc} \quad a^2 - b^2 = ab - b^2 \quad \text{puis} \quad (a-b)(a+b) = (a-b)b \quad \text{et} \quad a+b = b.$$

Comme $a = b$, ceci donne également $2b = b$ puis $2 = 1$, en divisant par b.

Correction :

L'erreur se situe lorsqu'on divise par $a - b$: comme $a = b$, ce nombre est nul. On ne peut donc pas simplifier par $a - b$ (ou alors il ne faut pas s'étonner d'arriver à un résultat aberrant).

Méthode 0.4 : Prendre garde au type des objets manipulés

En mathématiques, on manipule divers types d'objets : des ensembles, des nombres (entiers, réels, complexes...), des fonctions, des vecteurs etc... Il ne faut pas les confondre, et toujours y être attentif.
On peut par exemple, additionner deux nombres, mais on ne peut pas additionner deux ensembles. On peut comparer deux nombres réels (avec $\leqslant$), pas deux nombres complexes. Une fonction peut être continue, croissante, dérivable, pas un nombre réel.
Il faut prendre garde à ceci pour toujours écrire des énoncés ayant un sens.

Exemple d'application

Les énoncés suivant ont-ils un sens ?

(a) La fonction x^2 est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

(b) exp, cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

(c) Pour $z \in \mathbb{C}$, $z^2 \geqslant 0$.

(d) si $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$, on a, pour $x \in]-1,1[$,

$$f'(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)' \ln'\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} \times \frac{1}{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{-2}{(1+x)(1-x)}.$$

Correction :

(a) n'a pas de sens car x^2 n'est pas une fonction. C'est probablement un nombre réel (encore qu'on ne le sache pas de manière sûre puisque la variable x n'a pas été proprement introduite). Un énoncé correct est : la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

(b) a un sens.

(c) n'a pas de sens car il n'y a pas de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$. On ne peut donc pas affirmer qu'un nombre complexe est positif.

(d) n'a pas de sens : l'écriture $\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)'$ n'a pas de sens car on dérive le nombre réel $\dfrac{1-x}{1+x}$ et non une fonction. Cette écriture est en revanche tolérée dans la plupart des calculs, car elle permet d'éviter de faire des erreurs.

Méthode 0.5 : Ne pas confondre implication directe et réciproque

On s'intéresse souvent à des implications en mathématiques. La plupart des théorèmes sont de la forme $A \Rightarrow B$: si on a certaines hypothèses (représentées par l'assertion A), alors on a une conclusion (représentée par l'assertion B). Il faut être très vigilant à ne pas confondre cette implication avec sa réciproque $B \Rightarrow A$ qui n'a aucune raison d'être vraie !
Dans un calcul en particulier, on ne peut pas toujours remonter une suite d'implications.

Exemple d'application

Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant.

On considère l'équation $x^2+x+1=0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Si x est solution, on a

$$x^3+x^2+x=0 \quad \text{puis} \quad x^3=-x^2-x=1$$

(puisque $1+x+x^2=0$). Ainsi $x=1$ (puisque c'est la seule solution réelle de $x^3=1$). En reportant dans l'équation initiale, on trouve $3=0$.

Correction :

L'erreur commise est de croire que l'on peut remonter les calculs faits. Le raisonnement effectué montre que si x est un réel solution de $x^2+x+1=0$, alors il est égal à 1. La réciproque est en revanche fausse : $x=1$ n'est pas solution de l'équation $x^2+x+1=0$ (qui n'admet aucune solution réelle).

⚠ Il faudra toujours prendre garde, lorsqu'on résout une équation sans faire un raisonnement par équivalence, de vérifier que les solutions obtenues sont effectivement des solutions !

Méthode 0.6 : Raisonner en français

Une suite de formules n'est pas un raisonnement mathématique. Même dans un calcul, il doit y avoir quelques mots qui expriment un lien logique.
Lorsqu'on écrit une première formule, cela peut-être par exemple une hypothèse ou la conclusion désirée. Dans le premier cas, on l'introduit par « On a », dans le second, par « On veut montrer que ».
Lorsqu'on passe d'une formule à une autre, il peut y avoir un rapport d'équivalence (que l'on traduira par une expression comme c'est-à-dire, i.e., si et seulement si...) ou d'implication (que l'on traduira par une expression comme donc, alors, ainsi, par suite...).
Sans ces indications, il est impossible de suivre le raisonnement effectué !

Exemple d'application

Un élève a produit le raisonnement suivant pour montrer que si $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y} \in]-1,1[$, $\boldsymbol{\dfrac{x+y}{1+xy} \in]-1,1[}$. Complétez-le avec les phrases en français manquante.

$$\frac{x+y}{1+xy}<1 \qquad x+y<1+xy \qquad 1+xy-x-y>0 \qquad (1-x)(1-y)>0 \quad \text{OK}$$

$$\frac{x+y}{1+xy}>-1 \qquad x+y>-1-xy \qquad 1+xy+x+y>0 \qquad (1+x)(1+y)>0 \quad \text{OK}$$

Correction :

On souhaite montrer que $\dfrac{x+y}{1+xy} \in]-1,1[$, il y a deux inégalités à montrer. La première inégalité souhaitée est $\dfrac{x+y}{1+xy}<1$. Comme $1+xy>0$, elle est équivalente à :

$$x+y<1+xy \quad \text{i.e.} \quad 1+xy-x-y>0 \quad \text{i.e.} \quad (1-x)(1-y)>0.$$

Cette dernière inégalité est vraie puisque x et y sont dans $]-1,1[$, donc $1-x>0$ et $1-y>0$. En remontant les équivalences, l'inégalité de départ $\dfrac{x+y}{1+xy}<1$ est donc vraie.

La seconde inégalité souhaitée est $\dfrac{x+y}{1+xy}>-1$. Comme $1+xy>0$, elle est équivalente à :

$$x+y>-1-xy \quad \text{i.e.} \quad 1+xy+x+y>0 \quad \text{i.e.} \quad (1+x)(1+y)>0.$$

Cette dernière inégalité est vraie puisque x et y sont dans $]-1,1[$, donc $1+x>0$ et $1+y>0$. En remontant les équivalences, l'inégalité de départ $\dfrac{x+y}{1+xy}>-1$ est donc vraie.

En conclusion, on a bien $\dfrac{x+y}{1+xy} \in]-1,1[$.

- Le terme i.e. est l'abréviation de la locution latine id est (ce qui est, littéralement). On l'utilise souvent en mathématiques.
- Le symbole $\Leftrightarrow$ est à proscrire lorsqu'on écrit un raisonnement. On peut éventuellement l'utiliser lorsqu'on résout une équation ou un système d'équations.

Méthode 0.7 : Savoir rédiger une récurrence

On verra en détail les différentes manières de faire un raisonnement par récurrence au chapitre 10, mais en attendant, il est utile d'avoir une rédaction propre pour le raisonnement par récurrence simple (celui vu en terminale).
Pour montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ une propriété $\mathscr{P}(n)$ (qu'il convient de définir proprement), on commence par montrer $\mathscr{P}(0)$ (phase d'initialisation). On peut aussi montrer $\mathscr{P}(1)$ voire $\mathscr{P}(2)$ si on ne veut $\mathscr{P}(n)$ que pour $n \geqslant 1$ ou $n \geqslant 2$. Ensuite, on se donne un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, et on montre $\mathscr{P}(n+1)$ (phase d'hérédité).

Exemple d'application

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = 1 + 2 + \cdots + n$ (avec $u_0 = 0$). Montrer que $u_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction :

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{P}(n)$: « $u_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ »

On a $u_0 = 0 = \dfrac{0 \times 1}{2}$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$. Alors $u_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ par hypothèse de récurrence. Par suite,

$$u_{n+1} = u_n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

donc on a $\mathscr{P}(n+1)$, ce qui conclut la récurrence.

Bien vérifier qu'on utilise l'hypothèse de récurrence à un moment dans l'hérédité, sinon il était inutile de raisonner par récurrence.

Partie 1

Techniques de calcul

CHAPITRE 1

Nombres complexes

L'essentiel du cours

1 Nombres complexes

Définition

- Un **nombre complexe** est un nombre de la forme $z = a + i\,b$, avec a et $b \in \mathbb{R}$ et où i est un nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$.
- a est appelé la **partie réelle** de z et est noté $\mathrm{Re}(z)$, b est appelé la **partie imaginaire** de z et est noté $\mathrm{Im}(z)$.
- Le **conjugué** de z, noté $\overline{z}$ est le nombre $a - i\,b$.
- Si $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + i\,b_2$, on pose :

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \quad \text{et} \quad z_1 \times z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1).$$

- z^n est défini par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ en posant $z^0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $z^{n+1} = z^n \times z$.

• La définition de la multiplication se retrouve simplement en développant le produit et en utilisant la relation $i^2 = -1$.
• Tout nombre réel a peut être vu sous la forme d'un nombre complexe avec $a = a + i\,0$.
• Les nombres de la forme ia, $a \in \mathbb{R}$ sont appelés **imaginaires purs**. L'ensemble des nombres imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.

Les formules $\mathrm{Re}(zz') = \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(zz') = \mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Im}(z')$ sont fausses !

Propriétés

- Si $z \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{R}$ on a $\mathrm{Re}(az) = a\,\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(az) = a\,\mathrm{Im}(z)$.
- Si $z \in \mathbb{C}$, on a $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.

Propriétés de la conjugaison

Pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$
- $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ (si $z_2 \neq 0$)
- $\overline{z_1^n} = (\overline{z_1})^n$

Définition

On appelle **module** du nombre complexe $z = a + i\,b$, et on note $|z|$ le réel $\sqrt{a^2+b^2}$.

Propriétés du module

Pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

- $z_1\overline{z_1} = |z_1|^2$
- $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$
- $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ (si $z_2 \neq 0$)
- $|z_1^n| = |z_1|^n$

Si $z \in \mathbb{C}^*$, on calcule la forme algébrique de $\dfrac{1}{z}$ en multipliant en haut et en bas par $\overline{z}$, et en utilisant $z\overline{z} = |z|^2$.

Inégalité triangulaire

- Si z_1 et $z_2 \in \mathbb{C}$, $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ avec égalité si et seulement si $z_1 = 0$ ou s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_2 = \lambda z_1$.
- On a également $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 - z_2|$.

On ne peut pas écrire $|z_1 - z_2| \leqslant |z_1| - |z_2|$! La seule chose qu'on puisse dire est $|z_1 - z_2| \leqslant |z_1| + |-z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

2 Exponentielle complexe, argument

Définition

Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $\mathbf{e}^{it}$ le nombre complexe[1] $\cos t + i \sin t$.

Formules d'Euler

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \cos t = \frac{\mathrm{e}^{it} + \mathrm{e}^{-it}}{2} \quad \text{et} \quad \sin t = \frac{\mathrm{e}^{it} - \mathrm{e}^{-it}}{2i}$$

Formule de Moivre

Pour $(t, u) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a

- $\overline{\mathrm{e}^{it}} = \mathrm{e}^{-it}$
- $\mathrm{e}^{i(t+u)} = \mathrm{e}^{it}\mathrm{e}^{iu}$
- $\mathrm{e}^{i(t-u)} = \dfrac{\mathrm{e}^{it}}{\mathrm{e}^{iu}}$
- $(\mathrm{e}^{it})^n = \mathrm{e}^{int}$

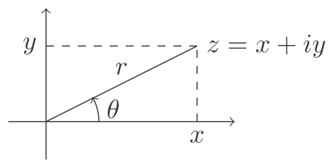
1. Les fonctions cos et sin seront revues en détail au chapitre 3.

Proposition

- L'ensemble des e^{it}, $t \in \mathbb{R}$ est l'ensemble noté $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1.
- Si $z \in \mathbb{C}^*$, on peut écrire z sous la forme $r\,\mathrm{e}^{i\theta}$, avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Définition

- L'écriture de $z \in \mathbb{C}^*$ sous la forme $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$, avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ est appelé **forme trigonométrique** de z.
- θ est appelé un **argument** de z.



Argument d'un nombre complexe

Soit $z = a + i\,b \in \mathbb{C}^*$.
- Si $a = 0$, un argument de z est $\dfrac{\pi}{2}$ si $z \in i\mathbb{R}_+^*$ $(b > 0)$, $-\dfrac{\pi}{2}$ si $z \in i\mathbb{R}_-^*$ $(b < 0)$.
- Sinon, un argument[2] de z est $\arctan\left(\dfrac{b}{a}\right)$ si $a > 0$, $\arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) + \pi$ si $a < 0$.

Un argument de z n'est pas unique : si θ est un argument de z, les arguments de z sont tous les $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. On dit qu'ils sont **congrus** à θ modulo 2π (noté $\equiv \theta \ [2\pi]$). La forme trigonométrique en revanche est unique, au sens où si l'on change θ en un autre argument de z, $\mathrm{e}^{i\theta}$ est inchangé.

Opérations sur les arguments

Si θ_1 est un argument de $z_1 \in \mathbb{C}^*$, θ_2 un argument de $z_2 \in \mathbb{C}^*$, alors :
- un argument de $\overline{z_1}$ est $-\theta_1$,
- un argument de $\dfrac{z_1}{z_2}$ est $\theta_1 - \theta_2$,
- un argument de $z_1 \times z_2$ est $\theta_1 + \theta_2$,
- pour $n \in \mathbb{Z}$, un argument de z_1^n est $n\theta_1$.

La forme trigonométrique d'un nombre complexe est donc très pratique pour le calcul d'inverse ou de puissances.

Proposition

Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$, et si $A\,\mathrm{e}^{i\varphi}$ est la forme trigonométrique de $a + ib$, alors :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ a\,\cos t + b\,\sin t = A\,\cos(t - \varphi).$$

2. La fonction arctan sera définie au chapitre 3.

En physique, si $a\cos t + b\sin t$ représente un signal sinusoïdal, A est appelé son **amplitude** et φ sa **phase**.

Définition

Si $z \in \mathbb{C}$, on note $\mathbf{e}^{\boldsymbol{z}}$ (ou $\mathbf{exp}(\boldsymbol{z})$) le nombre complexe

$$\mathrm{e}^{\operatorname{Re} z}\,\mathrm{e}^{i\operatorname{Im} z} = \mathrm{e}^{\operatorname{Re} z}(\cos(\operatorname{Im} z) + i\sin(\operatorname{Im} z)).$$

Le nombre complexe e^z est donné sous forme trigonométrique : son module est $\mathrm{e}^{\operatorname{Re} z}$ et $\operatorname{Im} z$ en est un argument.

Propriétés de l'exponentielle complexe

Si z_1 et $z_2 \in \mathbb{C}$:
- $\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1} \times \mathrm{e}^{z_2}$.
- $\mathrm{e}^{z_1} = \mathrm{e}^{z_2}$ si et seulement si $z_1 - z_2 \in 2i\pi\mathbb{Z} = \{2ik\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\}$.

3 Équations algébriques

Racines carrées

Si $z \in \mathbb{C}^*$, z admet deux racines carrées dans $\mathbb{C}$, qui sont $\pm\sqrt{|z|}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}$, où θ est un argument de z.

La notation $\sqrt{x}$ est réservée à un réel x positif !

Définition

Si $a\,z^2 + b\,z + c = 0$ est une équation du second degré à coefficients a, b, $c \in \mathbb{C}$ (et $a \neq 0$), on appelle **discriminant** de l'équation le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

Résolution de l'équation du second degré

Pour $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, $a \neq 0$, on considère l'équation $a\,z^2 + bz + c = 0$ de discriminant Δ.
- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution $z = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta \neq 0$, l'équation admet deux solutions qui sont $z_1 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$, avec δ une racine carrée de Δ.

Relations coefficients-racines

On considère l'équation $a\,z^2 + bz + c = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, $a \neq 0$. r_1 et r_2 sont les solutions de l'équation (avec la convention $r_1 = r_2$ si le discriminant est nul) si et seulement si

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad r_1 r_2 = \frac{c}{a}.$$

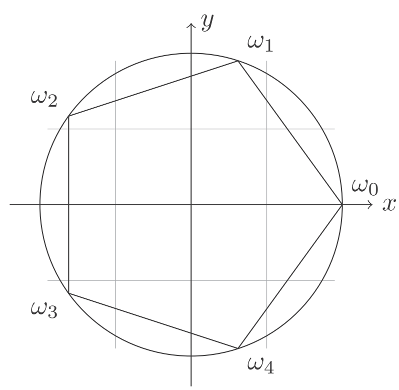
Définition

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle **racine n-ième de l'unité** un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $z^n = 1$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

Énumération de $\mathbb{U}_n$

Il existe précisément n racines n-ièmes de l'unité qui sont les $\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k \in [\![0, n-1]\!]$.

- En particulier, les $\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$ sont deux à deux distincts, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.
- On peut prendre $[\![1, n]\!]$ ou tout autre ensemble de n entiers consécutifs à la place de $[\![0, n-1]\!]$.
- La somme des racines n-ièmes de l'unité vaut 0 pour $n \geqslant 2$.
- Les affixes des racines n-ièmes de l'unité forment un polygone régulier à n côtés.



Représentation graphiques des racines 5-ièmes de l'unité : $\omega_i = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{5}}$.

Équation $z_1^n = z_2^n$.

Si $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, on a $z_1^n = z_2^n$ si et seulement si $z_1 = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} z_2$, $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Ceci est la généralisation de $z_1^2 = z_2^2$ si et seulement si $z_1 = \pm z_2$.

Racine n-ième d'un nombre complexe

Si $z = r\,e^{i\theta}$ est un nombre complexe (avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$), une racine n-ième de z est $z_1 = \sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\theta}{n}}$. Les racines n-ièmes de z sont alors les $z_1\,e^{2ik\pi/n}$, $k \in [\![0, n-1]\!]$.

4 Nombres complexes et géométrie

Dans toute cette partie, on considère le plan $\mathscr{P}$ usuel, muni d'un repère orthonormé direct.

Définition

Si M est un point (resp. $\overrightarrow{u}$ un vecteur) du plan de coordonnées (x, y), on appelle **affixe** de M (resp. de $\overrightarrow{u}$) le nombre complexe $x + i\,y$. On la note z_M (resp. $z_{\overrightarrow{u}}$).

Ceci permet d'identifier l'ensemble des nombres complexes au plan usuel.

Propriété géométrique	Interprétation en complexes
Distance AB	$\lvert z_B - z_A \rvert$
Cercle de centre O et de rayon r	Ensemble des nombres complexes z tels que $\lvert z - z_O \rvert = r$
Disque de centre O et de rayon r	Ensemble des nombres complexes z tels que $\lvert z - z_O \rvert \leqslant r$
Angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$	Argument de $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$
A, B et C alignés	$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$
ABC rectangle en A	$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$
Translation de vecteur $\overrightarrow{u}$	$z \mapsto z + z_{\overrightarrow{u}}$
Homothétie de centre A et de rapport k	$z \mapsto z_A + k(z - z_A)$
Rotation de centre A et d'angle θ	$z \mapsto z_A + e^{i\theta}(z - z_A)$
Symétrie par rapport à l'axe des abscisses	$z \mapsto \overline{z}$

Propriétés

- Les translations et les rotations conservent les angles (donc l'alignement, l'orthogonalité, le parallélisme) et les distances.
- Une homothétie de rapport k conserve les angles (donc l'alignement, l'orthogonalité, le parallélisme) et multiplie les distances par $\lvert k \rvert$.

Les méthodes à maitriser

Méthode 1.1 : Savoir mettre un nombre complexe sous forme trigonométrique

- Dans les cas simples, on divise $z = a + i\,b$ par son module, en espérant reconnaitre des valeurs usuelles de cos et sin.
- Sinon on utilise les formules $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ (si $a > 0$) ou $\arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$ (si $a < 0$).

Exemple d'application

Mettre sous forme trigonométrique $1 - i$ et $3 + 4i$.

(1) On note $z = 1 - i$. On calcule $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ donc

$$z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

(2) On note $z = 3 + 4i$. On calcule $|z| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$. En divisant par le module, on trouve $\frac{3}{5}$ et $\frac{4}{5}$, qui ne sont pas des valeurs usuelles de cos et sin. On applique donc la formule générale, et un argument de z est $\arctan\left(\frac{4}{3}\right)$.

Voir exercice **1.2**.

Méthode 1.2 : Savoir factoriser une expression du type $\mathrm{e}^{ip} \pm \mathrm{e}^{iq}$

Lorsqu'on a une expression du type $\mathrm{e}^{ip} \pm \mathrm{e}^{iq}$, on met en facteur $\mathrm{e}^{\frac{i(p+q)}{2}}$ pour faire apparaitre une formule d'Euler. La cas le plus souvent rencontré est lorsque $p = 0$ (expressions $1 + \mathrm{e}^{ix}$ ou $1 - \mathrm{e}^{ix}$). Cela permet de factoriser des expressions du type $\cos p + \cos q$ ou $\sin p + \sin q$, en prenant la partie réelle ou la partie imaginaire.

Exemple d'application

Factoriser $1 + \mathrm{e}^{ix}$ et $\sin p + \sin q$.

(1) Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $1 + \mathrm{e}^{ix} = \mathrm{e}^{\frac{ix}{2}}(\mathrm{e}^{-\frac{ix}{2}} + \mathrm{e}^{\frac{ix}{2}}) = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{ix}{2}}$.

(2) Pour p et $q \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\sin p + \sin q &= \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{ip} + \mathrm{e}^{iq}) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\frac{i(p+q)}{2}}(\mathrm{e}^{\frac{i(p-q)}{2}} + \mathrm{e}^{\frac{i(q-p)}{2}})\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\frac{i(p+q)}{2}}2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\right) = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right).\end{aligned}$$

Voir exercices **1.2**, **1.4** et **1.11**.

Méthode 1.3 : Savoir calculer les puissances d'un nombre complexe

Pour calculer les puissances élevées d'un nombre complexe, on utilise sa forme trigonométrique. La formule de Moivre permet alors de simplifier le calcul.

Exemple d'application

Calculer le nombre $(1-i)^{2015}$.

On a vu dans l'exemple précédent que $1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, ainsi :

$$\begin{aligned}(1-i)^{2015} &= (\sqrt{2})^{2015}\mathrm{e}^{-i\frac{2015\pi}{4}} = 2^{1007}\sqrt{2}\mathrm{e}^{-503i\pi-\frac{3i\pi}{4}} = -2^{1007}\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{3i\pi}{4}}\\ &= -2^{1007}\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2^{1007}(1+i)\end{aligned}$$

Pour simplifier le résultat, on a effectué la division euclidienne de 2015 par 4 : $2015 = 4\times 503+3$.

Voir exercice **1.1**.

Méthode 1.4 : Savoir calculer les racines carrées d'un nombre complexe

• Dans les cas où l'on connait la formule trigonométrique de z (par exemple si z est réel ou imaginaire pur), on part de cette forme, on prend la racine carrée du module et on divise un argument par 2.
• Dans tous les autres cas, on cherche une racine carrée de $z=a+i\,b$ sous la forme $\delta = x+i\,y$.

1. On développe $\delta^2 = z$ et on identifie parties réelle et imaginaire.
2. On ajoute l'équation $x^2+y^2=|\delta|^2=|z|$ et on trouve les valeurs de x^2 et y^2.
3. On obtient alors quatre solutions. On en élimine deux en gardant celles dont les signes respectent l'équation $2xy=b$.

Exemple d'application

Calculer les racines carrées de $-7i$ et $2+i$.

• $z=-7i$ est un imaginaire pur, sa forme trigonométrique est $z=7\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}$. Ses racines carrées sont donc

$$\pm\sqrt{7}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}} = \pm\left(\frac{\sqrt{14}}{2}-\frac{\sqrt{14}}{2}i\right).$$

• D'après la méthode, on cherche les racines carrées de $z=2+i$ sous la forme $\delta = x+i\,y$, avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

1. On veut $\delta^2 = z$ i.e.

$$2+i=(x+i\,y)^2 = x^2+2xy\,i-y^2 \quad \text{i.e.} \quad \left\{\begin{array}{l} x^2-y^2=2\\ 2xy=1\end{array}\right.$$

2. On ajoute l'équation $x^2+y^2=|\delta|^2=|z|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$:

$$\left\{\begin{array}{l} x^2-y^2=2\\ x^2+y^2=\sqrt{5}\end{array}\right. \quad \text{i.e.} \quad \left\{\begin{array}{l} x^2=\dfrac{2+\sqrt{5}}{2}\\ y^2=\dfrac{\sqrt{5}-2}{2}\end{array}\right. \quad \text{i.e.} \quad \left\{\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{5}}{2}}\\ y=\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-2}{2}}\end{array}\right.$$

3. Enfin, l'équation $2xy = 1 > 0$ nous dit que x et y doivent être de même signe. Il vient donc :

$$\delta = \pm \left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} i \right).$$

Voir exercices **1.3** et **1.9**.

Méthode 1.5 : Savoir résoudre une équation du second degré

Pour résoudre une équation du second degré à coefficients complexes, on calcule le discriminant de l'équation, puis, s'il est non nul, une racine carrée de ce discriminant (en suivant la méthode précédente). On utilise ensuite les formules du cours.

Exemple d'application

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + (1-i)\,z - \dfrac{2+3i}{4} = 0$.

Le discriminant Δ de cette équation vaut

$$\Delta = (1-i)^2 - 4\left(-\frac{2+3i}{4}\right) = -2i + 2 + 3i = 2 + i.$$

On a calculé dans l'exemple précédent les racines carrées de $2+i$. Les solutions de l'équation sont donc :

$$\frac{-1+i}{2} \pm \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} i \right).$$

Voir exercices **1.3**, **1.5** et **1.9**.

Méthode 1.6 : Savoir exploiter les relations coefficients-racines

Si l'on cherche deux nombres x et y dont on connait le produit p et la somme s, il faut résoudre l'équation $z^2 - s\,z + p = 0$. Si ses solutions sont r_1 et r_2, alors $(x, y) = (r_1, r_2)$ ou $(x, y) = (r_2, r_1)$.

Exemple d'application

Résoudre le système $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$.

D'après les relations coefficients-racines, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ce système équivaut à x et y solutions de $z^2 - 3z + 2 = 0$. Cette équation a pour discriminant $9 - 8 = 1$ et pour solutions $\dfrac{3+1}{2} = 2$ et $\dfrac{3-1}{2} = 1$. Ainsi le système a pour solutions $(2, 1)$ et $(1, 2)$.

Voir exercices **1.5** et **1.10**.

Méthode 1.7 : Savoir extraire les racines n-ièmes d'un nombre complexe

Pour extraire les racines n-ièmes ($n \geqslant 3$) d'un nombre complexe z, il faut impérativement passer par la forme trigonométrique de z : $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$.

1. Une racine n-ième de z est $z_1 = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\frac{i\theta}{n}}$.
2. Les racines n-ièmes de z s'obtiennent ensuite en multipliant z_1 par les racines n-ièmes de l'unité.

Exemple d'application

Calculer les racines cubiques de $8i$.

On a $8i = 8\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$ donc une racine cubique de $8i$ est $2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$. Les racines cubiques de $8i$ sont donc

$$2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}} = 1 + i\sqrt{3}, \qquad 2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}} \times \mathrm{e}^{2i\pi/3} = 2\mathrm{e}^{5i\frac{\pi}{6}} = -1 + i\sqrt{3}$$
$$\text{et} \quad 2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}} \times \mathrm{e}^{4i\pi/3} = 2\mathrm{e}^{9i\frac{\pi}{6}} = 2\mathrm{e}^{3i\frac{\pi}{2}} = -2i.$$

Voir exercice **1.3**.

Méthode 1.8 : Savoir résoudre une équation simple de degré n

Pour résoudre une équation de degré n, sans indication particulière, on essaie de se ramener à une équation du type $z_1^n = z_2^n$, que l'on résout en $z_1 = z_2\,\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Exemple d'application

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+1)^n - (z-1)^n = 0$.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Cette équation équivaut à $(z+1)^n = (z-1)^n$, i.e. $z+1 = (z-1)\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k \in [\![0, n-1]\!]$. Cette dernière équation équivaut ensuite à $z(1-\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}) = -1-\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Si $k = 0$, on obtient $0 = -2$, ce qui est impossible. Si $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} \neq 1$ et on obtient :

$$z = -\frac{1+\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}}{1-\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}}(\mathrm{e}^{-\frac{ik\pi}{n}} + \mathrm{e}^{-\frac{ik\pi}{n}})}{\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}}(\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}} - \mathrm{e}^{-\frac{ik\pi}{n}})} = \frac{2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}.$$

On obtient ainsi $n-1$ solutions, les $\dfrac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.

Voir exercice **1.4**.

Méthode 1.9 : Savoir montrer un fait géométrique avec les nombres complexes

Les nombres complexes sont un outil très puissant pour la géométrie. En utilisant le tableau de la partie IV du cours, on interprète les hypothèses et le résultat à montrer en termes d'affixes, et on tente d'arriver à une preuve par un calcul.
Pour se simplifier les calculs, choisir un repère orthonormé adapté au problème considéré !

Exemple d'application

Montrer le théorème de Pythagore : le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

On se place dans un repère orthonormé centré en A. L'affixe de A dans ce repère est donc 0, on note b celle de B et c celle de C. L'hypothèse ABC rectangle en A se traduit par $\frac{c}{b}$ imaginaire pur. L'hypothèse $BC^2 = AB^2 + AC^2$ se traduit par $|c-b|^2 = |c|^2 + |b|^2$. On calcule :

$$|c-b|^2 = (c-b)(\overline{c-b}) = c\bar{c} - b\bar{c} - c\bar{b} + b\bar{b} = |c|^2 + |b|^2 - 2\,\mathrm{Re}(c\bar{b})$$

puisque $b\bar{c}$ est le conjugué de $c\bar{b}$. Ainsi $BC^2 = AB^2 + AC^2$ si et seulement si $\mathrm{Re}(c\bar{b}) = 0$, si et seulement si $c\bar{b}$ est imaginaire pur. Or $\frac{c}{b} = \frac{1}{|b|^2} c\bar{b}$, donc $c\bar{b}$ est imaginaire pur si et seulement si $c\bar{b}$ l'est.
Ainsi, $BC^2 = AB^2 + AC^2$ si et seulement si $\frac{c}{b}$ est imaginaire pur, si et seulement si ABC est rectangle en A.

Voir exercices **1.6**, **1.11** et **1.12**.

Interro de cours

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{C}$. Déterminer (et justifier) si les inégalités suivantes sont vraies ou fausses :

(a) $|x| + |y| \leqslant |x + y|$

(b) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$

(c) $|x| - |y| \leqslant |x - y|$

(d) $|x - y| \leqslant |x| - |y|$

2. À quelle condition a-t-on $|x + y| = |x| + |y|$?

3. Déterminer (et justifier) si les énoncés suivants sont vrais ou faux :

(a) $\cos p - \cos q = 2 \sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right) \sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$

(b) $\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right) \sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$

(c) $\sin p + \sin q = 2 \cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right) \sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$

(d) $\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right) \cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$

4. Calculer les racine carrées de $3 - i$.

5. Résoudre l'équation $z^2 - (1 + i)z + i = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

6. Si x et y sont les solutions de l'équation $2r^2 + 3r - 2 = 0$, que valent $x + y$ et xy ?

7. Donner les racines 6-ièmes de -1.

8. Déterminer (et justifier) si les énoncés suivants sont vrais ou faux :

(a) $\{e^{\frac{2ik\pi}{n}}\ ;\ k \in [\![1, n]\!]\}$ est une énumération de l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

(b) $\{e^{\frac{ik\pi}{n}}\ ;\ k \in [\![1, n]\!]\}$ est une énumération de l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

(c) $\{-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\ ;\ k \in [\![0, n-1]\!]\}$ est une énumération de l'ensemble des racines n-ièmes de -1.

(d) $\{e^{\frac{2ik\pi}{n}}\ ;\ k \in [\![0, n]\!]\}$ est une énumération de l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

9. Comment tester si trois points A, B et C sont alignés avec les nombres complexes ?

10. Déterminer (et justifier) si les énoncés suivants sont vrais ou faux :

(a) $z \mapsto 2z + 1$ est une homothétie de centre d'affixe 1 et de rapport 2.

(b) $z \mapsto iz + 1$ est une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

(c) $z \mapsto 2z + 1$ est une homothétie de centre d'affixe -1 et de rapport 2.

(d) $z \mapsto iz + 1$ est une rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

11. Donner l'interprétation en termes d'affixes de la rotation de centre O et d'angle θ, de l'homothétie de centre O et de rapport k, de la symétrie par rapport à l'axes des abscisses.

Exercices

S'entraîner

Exercice 1.1

Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique.

1. $\dfrac{(5-i)(2-3i)}{(1+i)(1-2i)}$ **2.** $(\sqrt{3}-i)^{2015}$ **3.** $(\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}-1)^{15}$

Exercice 1.2

Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants :

1. $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$ **2.** $1+i\tan\theta$ **3.** $(1+i)^n$ **4.** $\dfrac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1-\cos\theta-i\sin\theta}$

où $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ est tel que la quantité étudiée soit définie.

Exercice 1.3

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

1. $(2+i)\,z^2+(5-i)\,z+2-2i=0$.
2. $z^4+4\,z^2+5=0$.
3. $z^6-2z^3\cos\theta+1=0$, où $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 1.4

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, où $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ est tel que $\dfrac{n\theta}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$:

1. $z^n=-1$
2. $(z-i)^n-(z+i)^n=0$.
3. $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n=\mathrm{e}^{in\theta}$.
4. $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n+\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^n=2\cos(n\theta)$.

Exercice 1.5

1. Que vaut $1+\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{5}}+\mathrm{e}^{\frac{4i\pi}{5}}+\mathrm{e}^{\frac{6i\pi}{5}}+\mathrm{e}^{\frac{8i\pi}{5}}$? En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right)$.

2. Calculer $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)\cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right)$.

3. En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 1.6

On considère un triangle ABC non aplati, et on note O le centre du cercle circonscrit à ABC (le point d'intersection des trois médiatrices).
On se place dans un repère orthonormé de centre O, dans lequel on note a, b et c les affixes respectives de A, B et C.

1. Montrer que le point G d'affixe $\frac{1}{3}(a+b+c)$ est le point d'intersection des trois médianes de ABC.
2. Montrer que le point H d'affixe $a+b+c$ est le point d'intersection des trois hauteurs de ABC.
3. En déduire que O, G et H sont alignés.

Approfondir

Exercice 1.7

On note $P = \{z \in \mathbb{C}\,;\, \operatorname{Im} z > 0\}$ et $D = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| < 1\}$. On considère la fonction

$$f : z \mapsto \frac{z-i}{z+i}.$$

1. Montrer que f est définie sur P et que pour $z \in P$, $f(z) \in D$.
2. Montrer que $f : P \to D$ est bijective (c'est-à-dire que tout élément de D admet un unique antécédent par f dans P).

Exercice 1.8

1. Montrer que

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2,\ |z_1| + |z_2| \leqslant |z_1 + z_2| + |z_1 - z_2|.$$

On cherchera à exprimer z_1 et z_2 en fonction de $(z_1 + z_2)$ et $(z_1 - z_2)$.
2. Interpréter géométriquement cette inégalité.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait égalité.

Exercice 1.9

Dans cet exercice, on s'intéresse à l'équation $(E) : z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = 0$.

1. Déterminer les racines carrées de $5 - 12i$.
2. Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure α que l'on déterminera.
3. Montrer qu'on a $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = (z - \alpha)(az^2 + bz + c).$$

4. Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.
5. Quelle particularité a le triangle dont les sommets ont pour affixe les solutions de l'équation précédente ?

Exercice 1.10

Soit $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{7}}$. Calculer les nombres

$$A = \omega + \omega^2 + \omega^4 \quad \text{et} \quad B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6.$$

On pourra commencer par calculer $A + B$ et AB.

Exercice 1.11

Soient $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon r, A et B deux points distincts de $\mathscr{C}$. Le but de cet exercice est de montrer le théorème de l'angle au centre : M, un point du plan distinct de A et B, est sur le cercle $\mathscr{C}$ si et seulement si $2(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) \ [2\pi]$.

On se place dans un repère orthonormé de centre O, et on note a, b et m les affixes de A, B, M, α, β et t des arguments de a, b et m.

On pose $z = \dfrac{m-b}{m-a}$.

1. Si $M \in \mathscr{C}$, donner les formes trigonométriques de a, b et m. En déduire que

$$z = \mathrm{e}^{i(\beta-\alpha)/2} \frac{\sin\left(\frac{\beta-t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha-t}{2}\right)}.$$

2. Montrer le sens direct du théorème de l'angle au centre.

3. Réciproquement, on suppose que $2(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) \ [2\pi]$. Écrire z sous la forme $\rho \mathrm{e}^{i\theta}$ avec $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2$. En déduire une expression de t puis que $M \in \mathscr{C}$.

Exercice 1.12

Dans cet exercice, on note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On considère un triangle ABC et on note a, b et c les affixes des points A, B et C dans un repère orthonormé.

1. Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct (i.e. on va de $\overrightarrow{AB}$ à $\overrightarrow{AC}$ dans le sens direct) si et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$.

2. Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.

Corrections

Interro de cours

1. (a) est faux : Si $x = 2$ et $y = -2$ on obtiendrait $4 \leqslant 0$!
(b) est vrai : Il s'agit de l'inégalité triangulaire.
(c) est vrai : On a $|x| - |y| \leqslant ||x| - |y||$ (tout nombre est inférieur à sa valeur absolue) et la deuxième inégalité triangulaire donne $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$.
(d) est faux Si $x = 1$ et $y = -1$ on obtiendrait $2 \leqslant 0$!

2. Il s'agit du cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire : $|x + y| = |x| + |y|$ si et seulement si x ou y est nul, ou si on a $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $y = \lambda x$.

3. On a :

$$\begin{aligned}\cos p - \cos q &= \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{ip} - \mathrm{e}^{iq}) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\frac{i(p+q)}{2}}\left(\mathrm{e}^{\frac{i(p-q)}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{i(q-p)}{2}}\right)\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(2i \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{i(p+q)}{2}}\right) = -2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right).\end{aligned}$$

(a) est faux et **(b) est vrai**.
De même :

$$\begin{aligned}\sin p + \sin q &= \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{ip} + \mathrm{e}^{iq}) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\frac{i(p+q)}{2}}\left(\mathrm{e}^{\frac{i(p-q)}{2}} + \mathrm{e}^{\frac{i(q-p)}{2}}\right)\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{i(p+q)}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right).\end{aligned}$$

(c) est vrai et **(d) est faux**.

4. On cherche les racines carrées de $z = 3 - i$ sous la forme $\delta = x + i\,y$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On veut $\delta^2 = z$ i.e.

$$3 - i = (x + i\,y)^2 = x^2 + 2xy\,i - y^2 \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -1 \end{cases}$$

On ajoute l'équation $x^2 + y^2 = |\delta|^2 = |z| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{10} \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} x^2 = \dfrac{3+\sqrt{10}}{2} \\ y^2 = \dfrac{\sqrt{10}-3}{2} \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} x = \pm\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{10}}{2}} \\ y = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{10}-3}{2}} \end{cases}$$

Enfin, l'équation $2xy = -1 < 0$ nous dit que x et y doivent être de signes opposés. Il vient donc :

$$\delta = \pm\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{10}}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{10}-3}{2}}\,i\right).$$

5. Le discriminant de l'équation est $\Delta = (1+i)^2 - 4i = 2i - 4i = -2i = 2\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}$. Une racine de Δ est donc

$$\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - i.$$

Par suite, les solutions de l'équation sont

$$\frac{1 + i + (1 - i)}{2} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1 + i - (1 - i)}{2} = i.$$