

**Aurélien Barrau
Julien Grain**


Relativité générale

Cours et exercices corrigés

2^e édition

DUNOD

Illustration de couverture : The lightwriter – Fotolia
Les auteurs remercient le Laboratoire d'excellence ENIGMASS pour son soutien.

<p>Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.</p> <p>Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique</p>		<p>d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.</p> <p>Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).</p>
--	--	--

© Dunod, 2011, 2016

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-074737-5

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^o et 3^o a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	VII
Chapitre 1. Les idées de la relativité générale	1
1.1 Vers le principe d'équivalence	1
1.2 Conséquences du point de vue relativiste	3
1.3 Retour sur le principe d'équivalence	4
Exercices	7
Corrigés	8
Chapitre 2. Relativité restreinte	11
2.1 Construction de la transformation de Lorentz	11
2.1.1 Symétries	13
2.1.2 Structure de groupe	14
2.2 Quelques conséquences fondamentales	18
2.2.1 Tenseurs	18
2.2.2 Retour sur les symétries	20
2.2.3 Espace-temps	22
2.2.4 $E = mc^2$	23
2.2.5 Les équations de Maxwell	24
Exercices	27
Corrigés	30
Chapitre 3. Qu'est-ce que la courbure ?	35
3.1 Principe d'équivalence : un peu plus précisément	35
3.2 Courbure spatiale	37
3.2.1 Propriétés intuitives, géodésiques	37
3.2.2 Mesurer la courbure	41
3.3 Courbure spatio-temporelle	42
Exercices	44
Corrigés	46
Chapitre 4. Premier aspect de la relativité générale : la physique en espace courbe	51
4.1 Éléments d'analyse tensorielle	51
4.1.1 Le minimum vital	51
4.1.2 Vecteurs et covecteurs	54
4.1.3 Quelques règles et définitions	56
4.2 Première approche de la théorie d'Einstein	58
4.2.1 Principe de covariance généralisé	58
4.2.2 Dérivation covariante	60
4.2.3 Calcul des coefficients de connexion : théorème fondamental	62

Relativité générale

4.3 Covariance généralisée et équation géodésique	64
4.3.1 Covariance générale	64
4.3.2 Équation géodésique : première dérivation	65
4.3.3 Équation géodésique : seconde dérivation	66
Exercices	68
Corrigés	70
Chapitre 5. Second aspect de la relativité générale : comment la masse crée la courbure	75
5.1 Tenseur de courbure de Riemann	75
5.1.1 Définition	75
5.1.2 Quelques remarques	78
5.2 Tenseur énergie-impulsion	80
5.2.1 Définition	80
5.2.2 Conservations	81
5.3 Équations d'Einstein	83
5.4 Ondes gravitationnelles	86
5.4.1 Équations d'Einstein linéarisées	86
5.4.2 Invariance de jauge et choix de jauge	87
5.4.3 Solution en onde plane	89
5.5 Qu'est exactement la relativité générale?	91
5.5.1 Le cœur de la théorie	91
5.5.2 Un mot sur le graviton	93
Exercices	94
Corrigés	97
Chapitre 6. Approche lagrangienne de la relativité générale	103
6.1 Retour sur le principe de moindre action	103
6.1.1 Principe de moindre action en mécanique du point	103
6.1.2 Principe de moindre action en théorie de champ	104
6.2 Action de Einstein-Hilbert	104
6.3 Dérivation des équations d'Einstein	107
6.3.1 Secteur gravitationnel	107
6.3.2 Équation d'Einstein et secteur de la matière	111
6.3.3 Invariance de jauge et loi de conservation	112
6.4 Constante cosmologique	115
6.5 Extension de la relativité générale	116
Exercices	118
Corrigés	122
Chapitre 7. Cosmologie	127
7.1 Métrique FLRW	127
7.1.1 Les bases de la cosmologie	127
7.1.2 Forme de la métrique	129
7.2 Équations de Friedmann-Lemaître	133
7.2.1 Tenseur énergie-impulsion d'un fluide parfait	133
7.2.2 Remarque sur les métriques diagonales	134
7.2.3 Tenseur énergie-impulsion de l'Univers	135

7.2.4	Tenseur d'Einstein de l'Univers	135
7.2.5	Équations de Friedmann-Lemaître	137
7.3	Dynamique cosmologique	141
7.3.1	Définitions	141
7.3.2	Quelques solutions des équations de Friedmann	142
7.4	Des paradoxes dans le paradigme?	146
	Exercices	150
	Corrigés	154
Chapitre 8. Trous noirs		159
8.1	Métrique de Schwarzschild	159
8.1.1	Construction de la métrique de Schwarzschild	159
8.1.2	Remarque sur $r = 2GM$	162
8.1.3	Quelques propriétés élémentaires	164
8.1.4	Sur les coordonnées	166
8.2	Physique au voisinage d'un trou noir	167
8.2.1	Énergie en géométrie de Schwarzschild	167
8.2.2	Vitesse à l'horizon du trou noir	169
8.2.3	Orbite autour d'un trou noir	170
8.3	À l'intérieur du trou noir	175
8.3.1	L'horizon est-il singulier?	175
8.3.2	L'impossible retour	177
8.3.3	Dans le trou noir	178
8.4	Un peu plus loin	178
8.4.1	Effet Hawking	178
8.4.2	Un effet similaire en cosmologie	182
8.4.3	Structure causale	183
	Exercices	184
	Corrigés	188
Chapitre 9. Vers la gravitation quantique : la voie des cordes		197
9.1	Idées fondamentales	197
9.2	Une première ébauche d'introduction	199
9.3	Histoire, incertitudes et conséquences	204
	Exercices	205
	Corrigés	208
Chapitre 10. Vers la gravitation quantique : la voie des boucles		211
10.1	Idées fondamentales	211
10.2	Un peu de formalisme	214
10.3	Cosmologie quantique à boucles	219
	Exercices	222
	Corrigés	225
Bibliographie		229
Index		230

INTRODUCTION

La relativité générale est bien plus qu'une théorie du champ gravitationnel. C'est une déconstruction profonde de notre manière de concevoir l'espace-temps et, au-delà, la physique elle-même. La théorie d'Einstein, sans doute l'une des plus élégantes et des plus subversives propositions jamais élaborées par l'esprit humain, dessine un monde strictement relativiste et relationnel qui infléchit profondément nos rapports au(x) réel(s). L'espace-temps n'est plus un cadre, un fond, une trame : il est un phénomène, lui aussi régi par des équations d'évolution et dépendant de la présence de corps et de leur nature. Sans doute faudrait-il plutôt considérer que l'espace-temps n'existe pas et que nous habitons sur le champ de gravité qui est lui-même en interaction avec tous les autres champs physiques.

Ce livre est une approche hybride de ces questions : moderne dans les thématiques choisies mais traditionnel dans le formalisme utilisé. Nous avons systématiquement choisi le chemin qui nous semblait le plus simple et le plus intuitif, qu'il soit novateur ou très classique. Il s'agit d'une introduction rudimentaire dont l'objectif est de proposer une vision globale des concepts et idées de la relativité générale. Un portrait à « gros trait » qui tente de ne pas trahir l'élégance de la silhouette. Le lecteur plus intéressé, souhaitant entrer dans les subtilités techniques ou les méthodes modernes, est naturellement invité à creuser ce qui l'interpelle par le recours à des ouvrages plus spécialisés. C'est pourquoi nous n'usons ni de géométrie différentielle ni de formes linéaires. Les mathématiques convoquées sont extrêmement simples et les tenseurs sont introduits de manière « historique » afin de ne pas rebuter par excès d'abstraction. Nous avons résisté à la vision « purement géométrique » qui nous semblait trop complexe pour une première découverte de la théorie. Sur chaque aspect des problématiques abordées, des éléments de démonstration sont néanmoins donnés afin que le lecteur comprenne, ce qui est essentiel, l'origine des assertions. Nous insistons systématiquement sur la méthode et évoquons toujours en détail ce qu'il aurait fallu faire quand le calcul n'est pas explicitement mené. Nous n'entrons pas, néanmoins, dans les détails calculatoires qui peuvent rapidement devenir délicats. Nous en restons à l'esquisse. De façon originale, nous ne cachons jamais les difficultés, les controverses, les ambiguïtés, les interprétations éventuellement contradictoires. La pensée scientifique est une attitude de doute et de remise en cause. Nous avons souhaité insister sur les problèmes autant que sur les évidences.

Le livre présente d'emblée les idées de la relativité générale. Bien que la relativité restreinte soit supposée en partie connue, nous en rappelons néanmoins les fondements afin d'insister sur le rôle fondamental qui y est joué par les symétries. Le modèle einsteinien est alors décrit en détail afin de répondre successivement aux deux questions suivantes : comment la physique s'écrit-elle en espace courbe ? Comment la masse crée-t-elle la courbure ? Dans cette nouvelle édition, le modèle einsteinien

Relativité générale

est aussi abordé d'un point de vue plus formel, suivant une approche lagrangienne de théorie des champs. La théorie ainsi établie est ensuite appliquée à deux systèmes particuliers et fascinants : l'Univers dans son ensemble et les trous noirs. Nous concluons en ouvrant sur les pistes de recherche contemporaines en gravitation quantique.

Nous avons tenté de nous placer dans l'« entre deux » : ce livre n'est ni une monographie de référence visant à élucider tous les aspects abordés jusque dans les démonstrations, ni un simple fascicule de vulgarisation. C'est une approche intermédiaire où de nombreux sujets sont discutés, y compris ceux qui se situent au cœur de la recherche contemporaine, sans, bien évidemment, mener explicitement toutes les dérivations ou recourir au formalisme le plus rigoureux.

Chaque chapitre est ponctué de quelques exercices. Ils doivent être considérés comme un second niveau de lecture. On peut parcourir tout l'ouvrage sans les résoudre. Mais ils permettront d'approfondir nombre de notions introduites dans le cours à proprement parler. Il est essentiel, au-delà des aspects techniques, que le lecteur prenne le temps d'interpréter ses résultats. Nous avons choisi, à dessein, de ne pas toujours le guider sur cette voie.

Nous espérons que cet ouvrage introductif conduira ceux qui s'en saisiront à découvrir plus en profondeur la relativité générale. Nous souhaitons surtout qu'il contribuera à développer un rapport à la science tout à la fois innervé d'enchantement et irrigué d'inévidance. Qu'il permettra, par une présentation simple et directe de la plus belle théorie de la physique, de s'affranchir d'un certain « normativisme » universitaire. Notre vœu le plus cher serait également qu'il suscite chez le lecteur quelques désirs de réflexions philosophiques et, qu'en contrepoint de celle d'Einstein, la découverte de Derrida, Deleuze, Nancy ou Foucault s'invite dans la partie. Ces immenses philosophes du complexe, de l'intriqué et de l'imbriqué, de l'abîme et du non-dit, de la faille et de l'intertextuel, ne sont, contrairement à ce qui a été parfois supposé, pas du tout des ennemis des sciences. Ce sont, en revanche, des amis de l'intelligence. Sous toutes ses formes. Que la physique soit une magnifique construction ne signifie certainement pas que tous les modes de pensée doivent s'y réduire. C'est, en tout cas, dans cet esprit que nous avons rédigé cet opuscule.

Ce livre doit beaucoup aux textes et ouvrages : *General Relativity* de Kenyon, *Gravitation* de Misner, Thorne et Wheeler, *Relativité* de Damour, *Gravitation and cosmology* de Weinberg, *Quantum gravity* de Rovelli, *Loop Quantum Cosmology* de Bojowald, *Introduction to string theory* de Mohaupt, *A first course in string theory* de Zwiebach, *Exploring black holes* de Taylor et Wheeler. Qu'ils soient ici remerciés, en particulier Carlo Rovelli dont la démarche singulièrement érudite, modeste, créative et généreuse demeure un exemple et devrait devenir un modèle.

Aurélien Barrau et Julien Grain

LES IDÉES DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE

1

INTRODUCTION

Ce chapitre entend donner un premier aperçu rapide des idées fondatrices de la relativité générale. Il s'agit, de façon très qualitative, de comprendre rapidement d'où vient le célèbre adage suivant lequel, dans la théorie d'Einstein, « l'espace-temps est courbe » et cette courbure est la gravitation. Il s'adresse au lecteur déjà familier des rudiments de relativité restreinte.

1.1 VERS LE PRINCIPE D'ÉQUIVALENCE

La caractéristique la plus frappante du champ gravitationnel est sans doute la suivante : tous les corps, quelles que soient leurs masses et leurs compositions, s'y meuvent de la même manière pour les mêmes conditions initiales. Autrement dit, quand on écrit la loi fondamentale de la dynamique $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ pour la force gravitationnelle $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$, la masse se simplifie et ne subsiste pas dans l'équation du mouvement : $\mathbf{a} = \mathbf{g}$. Ce résultat demeure évidemment valide même si l'on ne considère pas un champ gravitationnel uniforme. Dans le champ de gravité (et seulement dans le champ de gravité), les trajectoires ne dépendent pas des particularités des corps.

Cette propriété fondamentale du champ gravitationnel permet d'établir un parallèle très important entre le mouvement d'un corps dans le champ de gravité et celui d'un corps libre (non soumis à la force gravitationnelle), mais considéré dans un référentiel accéléré. Si, en effet, on rapporte le mouvement de corps – préparés suivant les mêmes conditions initiales dans un référentiel d'inertie – à un référentiel accéléré, ils s'y déplaceront tous de la même façon. Exactement comme dans un champ de gravitation. C'est le cœur du principe d'équivalence : les caractéristiques du mouvement dans un champ de gravitation sont les mêmes qu'en l'absence de champ mais dans un référentiel accéléré et donc non inertiel. De façon remarquable, nous avons ici déjà fait l'essentiel du chemin menant à la relativité générale !

Il est nécessaire de considérer un référentiel *accéléré* car les trajectoires dans un champ de gravitation ne sont, vues d'un référentiel d'inertie, bien évidemment pas uniformes. Le déplacement du référentiel qui permet de générer des trajectoires équivalentes à celles du champ gravitationnel est donc bel et bien accéléré. Considérons, par exemple, la chute d'objets de masses et de compositions différentes, mais soumis

Chapitre 1 • Les idées de la relativité générale

aux mêmes conditions initiales, dans une petite pièce où le champ de gravité peut être considéré comme identique en tous points. Ils suivent une trajectoire uniformément accélérée (avec une accélération g) vers le sol. Si maintenant on considère exactement la même situation, à ce détail près que le champ gravitationnel serait absent mais que la pièce et son référentiel associé seraient accélérés vers le haut (avec, en valeur absolue, la même accélération g), on se trouve bien face à des observations strictement identiques. Les deux circonstances ne peuvent être distinguées. Un référentiel uniformément accéléré est équivalent à un champ gravitationnel homogène. Si l'accélération du référentiel n'est pas uniforme, elle peut rendre compte d'un champ non constant temporellement.

Il est important de bien comprendre dès maintenant que cette démarche ne fonctionne qu'avec la gravitation. Imaginons qu'une charge électrique se déplace entre le plafond chargé positivement et le plancher chargé négativement. On peut évidemment, pour cette trajectoire particulière, considérer que tout se passe comme s'il n'y avait pas de champ électromagnétique mais plutôt un certain déplacement du référentiel. C'est toujours possible et cela semble analogue au raisonnement précédent. Mais, dans ce cas, cette démarche n'aurait aucun sens : une autre charge électrique aurait un autre mouvement (même à conditions initiales identiques) et il n'y a donc pas une accélération *unique* du référentiel qui permette de rendre compte de toutes les trajectoires. L'équation du mouvement est $\mathbf{a} = q\mathbf{E}/m$ et les caractéristiques (charge q et masse m) de la charge ne se simplifient pas. C'est le caractère universel de la gravitation, le fait qu'elle se couple identiquement avec tous les corps, quelles que soient leurs caractéristiques intrinsèques, qui rend l'équivalence avec un mouvement accéléré du référentiel fructueuse.

Il faut insister sur un point fondamental dont les conséquences sont centrales en relativité générale : les champs auxquels sont équivalents les référentiels non inertiels ne sont pas rigoureusement identiques aux champs gravitationnels usuels dans les référentiels d'inertie. Les champs « réels » (cette expression ne sous-tend ici aucun « réalisme » philosophique supposant que la physique donnerait accès au « réel » en soi, bien au contraire) sont toujours inhomogènes et l'équivalence n'est donc possible que *localement*. L'élimination du champ ne peut se faire que dans une région de l'espace suffisamment petite pour que le champ soit considéré comme constant à la précision requise.

Fondamentalement, la relativité générale consiste à prendre au sérieux cette analogie. Bien qu'il nous soit très familier (mais la familiarité est parfois le signe d'une aveuglante proximité) le concept de « force à distance » est extrêmement complexe et conceptuellement coûteux. Il tire justement sa légitimité de sa capacité à rendre compte aisément d'effets qui dépendent des caractéristiques des corps. Si, dans le cadre gravitationnel, l'universalité du couplage permettait de s'affranchir du

recours à des « forces » et autorisait un retour à une vision plus « géométrique » – une physique platonicienne en quelque sorte – il s’agirait sans aucun doute d’une simplification considérable de la théorie. Tel est l’enjeu de la relativité générale. Quelles que soient les difficultés calculatoires qui peuvent survenir, il est raisonnable de considérer que la théorie d’Einstein est, conceptuellement, beaucoup plus simple que la gravitation newtonienne.

1.2 CONSÉQUENCES DU POINT DE VUE RELATIVISTE

En explorant les conséquences du principe d’équivalence dans le cadre de la relativité restreinte, il est aisé de comprendre comment ce que Newton voyait comme un champ gravitationnel va devenir, chez Einstein, un effet géométrique. La quantité fondamentale en relativité restreinte est effectivement l’intervalle¹ $ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$. Son invariance par changement de référentiel d’inertie est le cœur de la théorie. C’est ce qui traduit mathématiquement toute la structure de la relativité restreinte et permet de voir émerger immédiatement les effets de dilatation du temps ou contraction des longueurs. Suivant une approche historique, on pourrait aisément montrer que l’intervalle est invariant en utilisant les symétries fondamentales de l’espace-temps. Ou, suivant une approche plus moderne, construire la transformation de Lorentz (ce qui sera fait au prochain chapitre) et vérifier qu’elle laisse effectivement l’intervalle invariant. Quelle que soit l’approche, le fait que l’intervalle ne change pas lorsqu’on passe d’un référentiel d’inertie à un autre est le point nodal de la relativité restreinte.

Or, précisément, nous venons d’établir que les champs gravitationnels sont équivalents à des référentiels non inertiels. Et si l’on passe à un référentiel non inertiel, l’intervalle n’a plus aucune raison de garder la même forme ! En général, l’intervalle ne s’écrira plus comme une somme des carrés des différentielles des coordonnées. Puisque l’intervalle encode la géométrie (il est en quelque sorte la généralisation du théorème de Pythagore à un espace quadri-dimensionnel pseudo-euclidien²), la modification de sa forme signifie une *modification géométrique*. Le cadre conceptuel de la relativité générale est ici planté.

Si l’on considère, par exemple, la transformation des coordonnées lors du passage d’un système inertiel à un système en rotation à vitesse angulaire constante, il est très simple de montrer que l’expression de ds^2 dans le second système ne *peut pas*

1. Nous utilisons ici, comme dans l’essentiel du livre (sauf quand il est utile de procéder autrement), les unités naturelles. C’est-à-dire que la vitesse de la lumière est prise à $c = 1$. Quelle autre unité de vitesse serait en effet plus naturelle que celle de la lumière ?

2. « Pseudo »-euclidien signifie simplement qu’il y a des signes « - » devant les termes dx^2 , dy^2 et dz^2 . À ce détail près la structure est bien celle de l’espace euclidien usuel à 4 dimensions (3 dimensions d’espace et 1 dimension de temps).

se réduire à une somme des différentielles des quatre coordonnées. Dans un système non inertiel, il faut donc écrire l'intervalle sous une forme plus générale :

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.1)$$

où $g_{\mu\nu}$ se nomme la *métrique* de l'espace temps. Pour des raisons dimensionnelles, il est bien clair que cette forme quadratique est l'écriture la plus générale possible (pour retrouver l'intervalle de la relativité restreinte dans un référentiel d'inertie, il ne peut pas y avoir de termes du type dx^3 ou $dt dy^2$ par exemple). Les quantités $g_{\mu\nu}$ (qu'on peut à ce stade voir comme des coefficients) déterminent toutes les propriétés géométriques. On comprend dès lors très simplement l'importance cruciale de cette métrique : son caractère non trivial (*i.e.* différent de la valeur particulière, notée $\eta_{\mu\nu}$, qu'elle acquiert dans un espace pseudo-euclidien) est engendré par le passage à un référentiel non inertiel, lui même imposé pour rendre compte de la gravitation dans l'optique du principe d'équivalence. Cela témoigne de l'apparition d'une géométrie elle aussi non triviale où la somme des angles d'un triangle ne vaut plus 180 degrés et où la circonférence d'un cercle ne vaut plus 2π fois son rayon.

Il apparaît ainsi non seulement que la géométrie n'est plus aussi simple que ce dont nous étions coutumiers mais surtout qu'elle devient fondamentalement dynamique. Les corps se déplacent et induisent donc une géométrie sans cesse mouvante. La masse dicte la courbure qui, en retour, dicte les mouvements suivis par les masses. Qu'on ne s'y trompe pas : cette description n'est nullement récursive : elle constitue au contraire l'une des propositions sur le monde les plus cohérentes et les mieux testées dont nous disposons à l'heure actuelle. La trame spatio-temporelle devient malléable et dynamique.

L'enjeu de cet ouvrage – celui de la relativité générale – consiste donc simplement à :

- comprendre comment s'écrit la physique déjà connue (par exemple l'électromagnétisme) dans un espace muni d'une métrique $g_{\mu\nu}$ arbitraire et généralement différente de la forme $\eta_{\mu\nu}$ de la relativité restreinte ;
- comprendre comment la masse impose un choix particulier de métrique $g_{\mu\nu}$. Ou, plus exactement, quelles sont les équations d'évolution de la métrique compte tenu de la présence de corps.

1.3 RETOUR SUR LE PRINCIPE D'ÉQUIVALENCE

La présentation précédente est sans doute la plus immédiatement accessible. Elle permet de « sentir » en quelques minutes les idées fondatrices de la relativité générale