

# **Calcul stochastique et modèles de diffusions**

Tout le catalogue sur  
[www.dunod.com](http://www.dunod.com)



ÉDITEUR DE SAVOIRS

**Francis Comets  
Thierry Meyre**

# **Calcul stochastique et modèles de diffusions**

**Cours et exercices corrigés**

**2<sup>e</sup> édition**


*SMAI'*

DUNOD

La série « Mathématiques pour le Master/SMAI » propose une nouvelle génération de livres adaptés aux étudiants de Master niveau M1 et aux élèves ingénieurs. Leur adéquation au cursus LMD et aux outils de calcul modernes sont au service de la qualité scientifique.

La SMAI (Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles) assure la direction éditoriale grâce à un comité renouvelé périodiquement et largement représentatif des différents thèmes des mathématiques appliquées et de leur évolution : analyse numérique, probabilités appliquées, statistique, optimisation, systèmes dynamiques et commande, traitement d'images et du signal, finance, recherche opérationnelle, etc. Son ambition est de constituer un ensemble d'ouvrages de référence.

Illustration de couverture : © Digitalvision

<p>Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.</p> <p>Le Code de la propriété intellectuelle du 1<sup>er</sup> juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements</p>	 <p><b>DANGER</b> LE PHOTOCOPIAGE TUE LE LIVRE</p>	<p>d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.</p> <p>Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).</p>
--	--	--

© Dunod, 2006, 2015

5 rue Laromiguière, 75005 Paris  
[www.dunod.com](http://www.dunod.com)

ISBN 978-2-10-073837-3

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2<sup>o</sup> et 3<sup>o</sup> a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

# Table des matières

<b>AVANT-PROPOS</b>	IX
---------------------	----

## Partie 1 • Cours

### CHAPITRE 1 • INTRODUCTION : PROCESSUS ALÉATOIRE

1.1	Définition	3
1.2	Loi des processus aléatoires	4
1.3	Existence de processus aléatoires	6
1.4	Espaces gaussiens	7

### CHAPITRE 2 • MOUVEMENT BROWNIEN ET MARTINGALES

2.1	Mouvement brownien	11
2.2	Principe d'invariance	16
2.3	Construction du mouvement brownien	18
2.4	Variation quadratique du mouvement brownien	21
2.5	Martingales	22
2.6	Caractérisation de Paul Lévy	32

### CHAPITRE 3 • INTÉGRALE ET DIFFÉRENTIELLE STOCHASTIQUE

3.1	Intégrale stochastique d'Itô	37
3.2	Formule d'Itô	44

**CHAPITRE 4 • PREMIERS PAS AVEC LE CALCUL STOCHASTIQUE**

4.1	Équation de Langevin	55
4.2	Mouvement brownien et équations aux dérivées partielles	60
4.3	La transformation de Girsanov	70
4.4	La loi de l'arcsinus	80

**CHAPITRE 5 • ÉQ. DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES ET PROCESSUS DE DIFFUSION**

5.1	Équations différentielles stochastiques	83
5.2	Approximation diffusion	96
5.3	Filtrage linéaire	99

**CHAPITRE 6 • DIFFUSIONS ET OPÉRATEURS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES**

6.1	Les diffusions comme processus de Markov	107
6.2	Diffusions et équations aux dérivées partielles	112
6.3	Mouvement d'une particule dans un potentiel	119
6.4	Générateur infinitésimal : d'autres applications	131

**CHAPITRE 7 • SIMULATION DE DIFFUSIONS**

7.1	Introduction et le cas du mouvement brownien	137
7.2	Schéma d'Euler	140
7.3	Approximation forte	141
7.4	Approximation faible	144
7.5	Schéma de Milstein	146

**Partie 2 • Exercices et problèmes corrigés****CHAPITRE 8 • EXERCICES D'INTRODUCTION : VECTEURS GAUSSIENS**

8.1	Rappels de cours	153
8.2	Exercices corrigés	156

**CHAPITRE 9 • MOUVEMENT BROWNIEN ET MARTINGALES, EXERCICES**

9.1	Rappels sur l'espérance conditionnelle	165
9.2	Complément de cours en vue des exercices : variation d'un processus	167
9.3	Propriétés du mouvement brownien	168
9.4	Pont brownien	173
9.5	Martingales	182

**CHAPITRE 10 • INTÉGRALE ET DIFFÉRENTIELLE STOCHASTIQUE, EXERCICES**

10.1	Complément de cours : intégrale de Wiener	203
10.2	Exercices sur l'intégrale de Wiener	204
10.3	Processus d'Itô	214
10.4	Formule d'Itô avec un mouvement brownien réel	217
10.5	Formule d'Itô avec un mouvement brownien multidimensionnel	224

**CHAPITRE 11 • PREMIERS PAS AVEC LE CALCUL STOCHASTIQUE, EXERCICES**

11.1	Oscillation d'une diffusion à l'origine	233
11.2	Loi d'un temps d'atteinte pour le mouvement brownien avec dérive constante	234
11.3	Fonctionnelle d'Onsager-Machlup	241
11.4	Changement de dérive	244

**CHAPITRE 12 • EDS ET PROCESSUS DE DIFFUSION, EXERCICES**

12.1	Mouvement brownien sur le cercle unité	247
12.2	Variation de la constante	248
12.3	Changement de variable	250
12.4	Borne supérieure d'une diffusion	251
12.5	Propriété de martingale pour une transformée de diffusion	253
12.6	Mouvement brownien géométrique	254
12.7	Carré de processus de Bessel	258
12.8	Dépendance en la condition initiale	259
12.9	Équation différentielle stochastique de Tanaka	261

**CHAPITRE 13 • DIFFUSIONS ET OPÉRATEURS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES, EXERCICES**

13.1	Compléments de cours	265
13.2	Passages successifs de barrières pour un mouvement brownien réel	267
13.3	Principe de réflexion du mouvement brownien	269
13.4	Réurrence ou transience du mouvement brownien	272

**CHAPITRE 14 • SIMULATION DE DIFFUSIONS, EXERCICES**

14.1	Introduction à Matlab	279
14.2	Simulation d'un mouvement brownien	282
14.3	Fonction de répartition du maximum d'un pont brownien	286
14.4	Simulation d'une diffusion	289

**CHAPITRE 15 • PROBLÈMES CORRIGÉS**

15.1	Équation de Smoluchowski	295
15.2	Fonction hyperbolique d'un mouvement brownien	303
15.3	Mouvement brownien sur le cercle	308
15.4	Fonctionnelle quadratique du mouvement brownien	313
15.5	Martingale et transformée de Fourier	316
15.6	Martingale locale exponentiellement intégrable mais non martingale	320
15.7	Mouvement brownien conditionné à rester positif	325
15.8	Équation des ondes	330

<b>RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES</b>	337
------------------------------------	-----

<b>INDEX</b>	339
--------------	-----



# Avant-propos

Ce livre est une introduction au calcul stochastique et aux processus de diffusion. Les diffusions sont des fonctions aléatoires, qui sont très utilisées en physique, chimie, biologie, statistique et en finance. Leur nature même en fait un outil de *modélisation* formidable : elle permet de capter des dynamiques instantanées entachées d'incertitude. Bien au-delà de leur intérêt descriptif, elles se prêtent aux utilisations quantitatives. Ce livre donne les outils d'étude et de calcul, à la fois analytiques et numériques, et détaille par ailleurs certains aspects phénoménologiques des diffusions.

Le livre reprend nos notes de cours et de travaux dirigés au Diplôme d'études approfondies (DEA) de statistique et modèles aléatoires en économie et finance – devenu maintenant le Master 2<sup>e</sup> année (M2) modélisation aléatoire – à l'université Paris 7 – Denis Diderot.

Nous avons voulu écrire un cours direct et simple, fluide et illustré, en privilégiant les arguments et les aspects essentiels. Il existe d'excellents ouvrages sur le sujet, mais la difficulté technique et le niveau de généralité sont souvent des obstacles difficiles à franchir. Celui-ci ne vise pas à la plus grande généralité, mais aux objets et concepts primordiaux, en ne développant que les outils strictement nécessaires, dans un cadre simple. Il est cependant, le plus souvent, sans concession mathématique. La rigueur est le prix à payer pour disposer de la puissance du calcul stochastique, mais il reste néanmoins que le calcul stochastique doit être utilisé aussi communément que le calcul différentiel classique de Newton.

La beauté de la théorie des diffusions ne saurait faire oublier les exigences de sa mise en œuvre pratique : comme toutes les autres formes de calcul, le calcul stochastique ne s'acquiert réellement qu'à force d'exercice. C'est pourquoi il nous a paru important, aussi bien dans notre enseignement oral que dans la présente édition, d'offrir à nos

étudiants et à nos lecteurs l'opportunité de développer une habileté technique en se confrontant à divers énoncés puis en comparant leur travail aux corrigés, généralement très détaillés, qui leur sont proposés. En outre, divers rappels et compléments utiles sont donnés au fil de cet ouvrage ; certains auraient pu trouver leur place dans la première partie consacrée au cours, mais nous avons fait le choix de les présenter sous forme d'exercices. Divers sujets de problèmes sont proposés en annexe ; à la suite de chacun d'eux, une proposition de correction est développée. Il s'agit en fait d'énoncés d'examens, composés dans le cadre de notre enseignement.

Les diverses applications du calcul stochastique soulèvent rapidement la question de la simulation des diffusions apparaissant dans les modèles étudiés. En outre, c'est souvent en cherchant à simuler un processus que l'on comprend plus en détail son mode de construction. C'est pourquoi nous avons voulu consacrer les chapitres 7 et 14 à une introduction à ce vaste sujet. Le lecteur y trouvera un guide des premiers pas avec le logiciel Matlab puis des exercices de simulation de diffusions « classiques », accompagnés de propositions de codes en Matlab. Les figures qui illustrent cet ouvrage ont été obtenues à l'aide de tels codes.

Ce livre s'adresse aux élèves de master qui ont déjà suivi, à l'université ou en école d'ingénieur, un cours de probabilité avec théorie de la mesure et de l'intégration abstraite : étudiants en mathématiques financières, en statistique, en probabilité dans une filière théorique ou appliquée, en physique théorique ou statistique.

Le livre s'articule en deux parties : I. Cours ; II. Exercices, énoncés et corrigés. Nos expériences pédagogiques nous ont conduits à préférer cette forme dans l'intérêt du lecteur. Au final, l'exposé du cours est linéaire, il est conçu pour se lire sans devoir nécessairement remettre à plus tard la lecture de certains paragraphes. La deuxième partie du livre rassemble les énoncés des exercices et leurs corrigés détaillés ; par sa variété, sa progressivité et son aspect complet, elle est, pensons-nous, unique dans le domaine. De nombreux renvois et références rendent les deux parties parfaitement complémentaires. Le découpage en chapitre est identique dans les deux parties.

Les aspects essentiels que nous abordons sont : le mouvement brownien, les martingales continues, les équations différentielles stochastiques, les liens avec les équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre, la simulation des diffusions. Nous avons détaillé certains exemples : le processus d'Ornstein-Uhlenbeck, le filtrage de Kalman, la diffusion de Feynman-Kac, la diffusion de Smoluchowski – en particulier sous l'aspect de la réversibilité –, une version simplifiée de l'algorithme de recuit simulé. Pour les équations différentielles stochastiques, nous avons aussi privilégié l'aspect modélisation. Nous nous sommes volontairement abstenu d'aborder les changements de temps, la théorie spécifique des équations différentielles stochastiques unidimensionnelles, celle du temps local. Nous avons volontairement sacrifié l'exhaustivité à la simplicité et la clarté.

C'est le lieu pour nous de remercier d'abord Jean-François Le Gall et Gabriel Ruget qui nous ont fait découvrir le mouvement brownien et les modèles de diffusion avec enthousiasme. Francis Comets a beaucoup appris de Jacques Neveu et Étienne Pardoux à l'occasion d'enseignements communs à l'École Polytechnique. Nous remercions

Laure Élie qui nous a donné l'opportunité de faire cet enseignement en DEA à Paris 7, où Thierry Meyre a aussi collaboré avec Mireille Chaleyat-Maurel. Nous remercions Dominique Prochasson pour ses critiques et remarques sur le manuscrit du cours. Thierry Meyre remercie Marc Hoffmann avec lequel il a partagé de sympathiques séances de travaux pratiques en Matlab. Enfin, ce livre ne serait pas écrit sans l'attention, la réactivité et la bonne humeur de nos étudiants de DEA : ils ont fortement motivé sa rédaction, nous espérons que leurs successeurs leur donneront raison et qu'ils pourront évoquer ensemble quelques anecdotes et souvenirs lors de la traditionnelle « réunion des anciens ».

La deuxième édition de cet ouvrage a été pour nous l'occasion de rectifier des inexactitudes – dont certaines signalées par nos lecteurs auxquels nous sommes reconnaissants – et de renouveler une partie des exercices et problèmes. Nous remercions vivement nos collègues François Delarue, Mathieu Merle et Justin Salez, pour leurs contributions à cette nouvelle édition.



PARTIE 1



**COURS**



## Chapitre 1

---

# Introduction : processus aléatoire

Dans ce court chapitre, nous donnons quelques définitions de base et le plus souvent élémentaires, concernant les processus aléatoires. Nous nous limitons au strict nécessaire pour la suite du livre, bien loin d'entrer dans une étude systématique qu'on pourra trouver dans [8, 15, 17].

### 1.1 DÉFINITION

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  un espace de probabilité, et  $(E, \mathcal{E})$  un espace mesurable. Soit  $\mathbb{T}$  un ensemble, par exemple  $\mathbb{T} = \mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^d$ . On considère une application

$$\begin{aligned} X : \mathbb{T} \times \Omega &\rightarrow E \\ (t, \omega) &\mapsto X(t, \omega). \end{aligned}$$

On lui associe, pour tout  $t \in \mathbb{T}$ , sa coordonnée d'indice  $t$ , notée  $X_t$  ou encore  $X(t)$ , qui est définie comme l'application  $\omega \mapsto X(t, \omega)$  de  $\Omega$  dans  $E$ . On dira que  $X$  est un processus aléatoire  $X$  défini sur  $\Omega$ , indexé par  $\mathbb{T}$  et à valeurs dans  $E$  si ses coordonnées sont des variables aléatoires sur  $\Omega$ , i.e., si

$$X(t) : \omega \mapsto X(t, \omega) \text{ est une variable aléatoire pour tout } t \in \mathbb{T}.$$

Ce cadre englobe à la fois le cas où  $\mathbb{T} = \mathbb{N}$  ou  $\mathbb{Z}$  – on dit alors aussi que  $X$  est une suite aléatoire –, le cas où  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^+$  – on dit alors que  $X$  est une fonction aléatoire –, et celui où  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}^d$  ou  $\mathbb{R}^d$  – on dit que  $X$  est un champ aléatoire. Bien sûr, dans le cas d'un ensemble d'indice fini  $\mathbb{T} = \{1, \dots, n\}$ ,  $X = (X_1, \dots, X_n)$  est un vecteur

aléatoire, et le lecteur gardera à l'esprit ce cas simple, pour le mettre en regard du cas général.

**Exemple 1.1.** a) Avec  $\xi_i, i \geq 1$  une suite de variables aléatoires réelles sur  $\Omega$ , et  $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ , la suite des sommes partielles

$$X(t, \omega) = \sum_{i \leq t} \xi_i$$

intervient dans de nombreux problèmes.

b) Considérons des fréquences  $f_k > 0$ , des modulations d'amplitude  $\lambda_k > 0$  avec  $\sum_k \lambda_k < \infty$ , et

$$X(t, \omega) = \sum_{k \geq 1} \lambda_k A_k(\omega) \sin\{2\pi f_k t + \phi_k(\omega)\}, \quad t \in \mathbb{T} = \mathbb{R}, \quad (1.1.1)$$

avec une suite indépendante identiquement distribuée  $(A_k, \phi_k)_k$  définie sur  $\Omega$  à valeurs  $(0, 1] \times (-\pi, \pi]$ . La fonction aléatoire  $X$  est la superposition d'ondes avec amplitudes et phases aléatoires, c'est un modèle couramment utilisé en théorie du signal.

## 1.2 LOI DES PROCESSUS ALÉATOIRES

En particulier, on désire considérer la trajectoire de  $X$ , i.e., l'application (encore notée  $X$ ) :  $\omega \mapsto (X(t, \omega))_{t \in \mathbb{T}}$ , de  $\Omega$  dans l'ensemble  $E^{\mathbb{T}}$  des applications de  $\mathbb{T}$  dans  $E$ .

Rappelons que la tribu produit  $\bigotimes_{t \in \mathbb{T}} \mathcal{E}$  est la tribu sur  $E^{\mathbb{T}}$  engendrée par les cylindres mesurables de dimension finie, i.e., les sous-ensembles de  $E^{\mathbb{T}}$  de la forme

$$C = \prod_{t \in \mathbb{T}} A_t, \quad \text{avec } A_t \in \mathcal{E} \text{ et } \text{Card}\{t : A_t \neq E\} < \infty. \quad (1.2.2)$$

On peut vérifier que si  $X$  est un processus aléatoire, sa trajectoire  $\omega \mapsto (X(t, \omega))_{t \in \mathbb{T}}$  est mesurable de  $(\Omega, \mathcal{A})$  dans  $(E^{\mathbb{T}}, \bigotimes_{t \in \mathbb{T}} \mathcal{E})$ . On appelle loi du processus aléatoire  $X$  la mesure de probabilité  $\mathbf{P}_X$  sur  $\bigotimes_{t \in \mathbb{T}} \mathcal{E}$ , image de  $\mathbf{P}$  par  $X$ , définie par

$$\mathbf{P}_X(A) = \mathbf{P}(X \in A), \quad A \in \bigotimes_{t \in \mathbb{T}} \mathcal{E}.$$

Puisque la classe des cylindres mesurables de dimension finie engendre la tribu, et est stable par intersection finie, le théorème de la classe monotone (page 48 [24]) montre que la probabilité  $\mathbf{P}_X$  est déterminée par ses valeurs sur cette classe. Mais, si  $C = \prod_{t \in \mathbb{T}} A_t$  est un cylindre et si  $t_1, \dots, t_n$  désignent les indices  $t$  pour lesquels  $A_t \neq E$ , la valeur de la probabilité  $\mathbf{P}_X(C)$  s'exprime à l'aide de la loi du vecteur fini-dimensionnel  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ , puisque

$$\mathbf{P}_X(C) = \mathbf{P}((X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in A_{t_1} \times \dots \times A_{t_n}).$$



Ainsi, la loi de  $X$  est déterminée par ses marginales fini-dimensionnelles. Si  $Y = (Y_t)_{t \in \mathbb{T}}$  est un autre processus aléatoire dans  $E$ , et si  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  a même loi que  $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})$  pour tout  $n$  et tout  $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{T}$ , les deux processus sont égaux en loi.

Réciproquement, à toute loi de probabilité  $Q$  sur  $\bigotimes_{t \in \mathbb{T}} \mathcal{E}$  correspond un processus au moins : considérons  $\Omega = E^{\mathbb{T}}$ ,  $\mathcal{A} = \bigotimes_{t \in \mathbb{T}} \mathcal{E}$ ,  $\mathbf{P} = Q$ , et le processus  $X = (X_t)_t$ , appelé *processus canonique* défini par  $X_t : \omega = (\omega_s)_{s \in \mathbb{T}} \mapsto \omega_t$ . (Il s'agit bien d'un processus, car l'application projection  $X_t$  est mesurable.) Alors, le processus  $X$  est simplement l'identité sur  $\Omega$ , et sa loi est  $X \circ \mathbf{P} = Q$ .

**Indépendance de deux processus :** par définition, les processus  $X = (X_t, t \in \mathbb{T})$  et  $Y = (Y_s, s \in \mathbb{S})$  définis sur le même espace  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  sont dits indépendants si et seulement si les tribus engendrées,  $\sigma(X) = \sigma(X_t, t \in \mathbb{T})$  et  $\sigma(Y)$ , le sont. Puisque  $\sigma(X)$  est engendrée par les ensembles  $\{X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_n} \in A_n\}$  pour  $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{T}, n \geq 1$  et  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ , on a les équivalences

$$\begin{aligned} X, Y \text{ indépendants} &\iff \mathbf{P}_{(X,Y)} = \mathbf{P}_X \otimes \mathbf{P}_Y \\ &\iff (X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \text{ et } (Y_{s_1}, \dots, Y_{s_m}) \text{ indépendants} \\ &\iff \forall n, t_1, \dots, t_n, m, s_1, \dots, s_m, \end{aligned}$$

i.e., si on a l'indépendance de tous les vecteurs fini-dimensionnels extraits de  $X$  et de  $Y$ .

Il existe plusieurs notions de **continuité** de fonction aléatoire réelle, mais celle-ci est la plus importante pour nous. Dorénavant,  $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$  est un intervalle.

**Définition 1.1.** Une fonction aléatoire réelle continue est une fonction aléatoire réelle  $X : (t, \omega) \mapsto X(t, \omega) \in \mathbb{R}$ , telle que

$$t \mapsto X(t, \omega) \text{ est continue } \forall \omega .$$

On considérera aussi des fonctions aléatoires réelles presque sûrement (p.s.) continues, i.e., telles que la propriété ci-dessus soit vraie pour  $\mathbf{P}$ -presque tout  $\omega$ , et notre propos s'applique à ces fonctions aléatoires réelles p.s. continues sans modification. Notant  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions continues de  $\mathbb{T}$  dans  $\mathbb{R}$ , il est plus naturel de définir, vu la continuité, la trajectoire  $\omega \mapsto X(\cdot, \omega)$  de  $X$  comme l'application (toujours notée  $X$ ) de  $\Omega$  dans  $\mathcal{C}$ . Mais  $\mathcal{C}$  possède une topologie naturelle, et le résultat suivant montre que cette application est borélienne. Munissons  $\mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$  de la norme uniforme  $\|x - y\|_{\infty} = \max_{t \in \mathbb{T}} |x(t) - y(t)|$  si  $\mathbb{T}$  est un intervalle fermé borné, et sinon, de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de  $\mathbb{T}$ . Considérons enfin la tribu borélienne  $\mathcal{B}(\mathcal{C})$  sur  $\mathcal{C}$ .

**Définition 1.2.** Si  $X$  est une fonction aléatoire réelle continue, l'application

$$X : \omega \mapsto X(\cdot, \omega) .$$

est mesurable de  $(\Omega, \mathcal{A})$  dans  $(\mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathcal{C}))$ . On appellera loi de la fonction aléatoire réelle continue  $X$  la loi image de  $\mathbf{P}$  par  $X$  sur la tribu borélienne  $\mathcal{B}(\mathcal{C})$ .

**Démonstration.** (que l'on pourra passer en première lecture) : Montrons que la trace sur  $\mathcal{C}$  de la tribu produit  $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes \mathbb{T}}$  coïncide avec la tribu borélienne  $\mathcal{B}(\mathcal{C})$ , ce qui entraîne la mesurabilité.

(i) L'inclusion  $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes \mathbb{T}} \cap \mathcal{C} \subset \mathcal{B}(\mathcal{C})$  : pour tout  $t$ , l'application coordonnée  $x \mapsto x(t)$  de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathbb{R}$  est continue – car liptchitzienne de rapport 1 dans la norme uniforme –, donc borélienne. Mais la tribu produit étant la plus petite tribu rendant les projections mesurables, on a l'inclusion voulue.

(ii) Réciproquement, la tribu borélienne est engendrée par les ouverts, et puisque  $\mathcal{C}$  est séparable, elle est engendrée par les boules ouvertes, ou encore par les boules fermées. Mais on peut écrire toute boule fermée  $B(y, \varepsilon)$  de centre  $y = (y(t), t \in \mathbb{T})$  et rayon  $\varepsilon > 0$  sous la forme

$$\begin{aligned} B(y, \varepsilon) &= \bigcap_{t \in \mathbb{T}} \{x \in \mathcal{C} : |x(t) - y(t)| \leq \varepsilon\} \\ &= \bigcap_{n > 0} \bigcap_{t \in \mathbb{T} \cap \mathbb{Q}} \{x \in \mathcal{C} : |x(t) - y(t)| \leq \varepsilon + 1/n\} \end{aligned}$$

par continuité de  $x$  et  $y$ . La dernière écriture montre que les boules fermées sont dans la tribu produit.  $\square$

### 1.3 EXISTENCE DE PROCESSUS ALÉATOIRES

Pour nous assurer de l'existence de processus élémentaires, rappelons deux résultats classiques. Le premier affirme l'existence d'une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi prescrite.

**Théorème 1.1.** *Soit  $(E, \mathcal{E}, \rho)$  un espace probabilisé quelconque. Il existe une unique probabilité  $P$  sur  $(E^{\mathbb{N}}, \mathcal{E}^{\otimes \mathbb{N}})$  telle que  $P(C) = \prod_{n \in \mathbb{N}} \rho(A_n)$  pour tout cylindre mesurable  $C = \prod_n A_n$ .*

Voir [21], p. 149, pour une démonstration. En ajoutant une hypothèse sur l'espace de base  $E$ , on peut construire des familles i.i.d. infinies mais non dénombrables, comme le montre le deuxième résultat.

Si  $Q$  est une probabilité sur  $E^{\mathbb{T}}$  et  $J \subset \mathbb{T}$ , on note  $Q_{|J}$  la projection de  $Q$  sur  $E^J$ , i.e., l'image de  $Q$  par la projection de  $E^{\mathbb{T}}$  sur  $E^J$ . On a bien sûr la propriété de compatibilité : si  $I \subset J$ ,  $(Q_{|J})_{|I} = Q_I$ .

**Théorème 1.2.** *(de prolongement de Kolmogorov.) Soit  $\mathbb{T}$  un ensemble d'indice quelconque, et  $E$  un espace polonais (i.e., métrisable, séparable, complet). Considérons une famille  $Q_I$  de probabilités sur  $\mathcal{B}(E)^{\otimes I}$  indexée par les sous-ensembles finis  $I$  de  $\mathbb{T}$ , qui soit compatible au sens où*

$$(Q_J)_{|I} = Q_I, \quad I \subset J \subset \mathbb{T}, J \text{ fini.}$$

Alors, il existe une unique probabilité  $R$  sur la tribu borélienne de  $E^{\mathbb{T}}$  telle que  $R_{|I} = Q_I$ ,  $I \subset \mathbb{T}$  fini.

Voir [21], p. 79, pour une démonstration. Nous allons plutôt donner ici un exemple d'application.

Si  $X$  est un processus aléatoire réel indexé par  $\mathbb{T}$ , arbitraire mais de carré intégrable (i.e.,  $\mathbf{E}X(t)^2 < \infty, t \in \mathbb{T}$ ), on définit ses fonctions de moyenne  $m$  et de covariance  $\Gamma$ ,

$$m(t) = \mathbf{E}X(t), \quad \Gamma(s, t) = \text{Cov}(X(s), X(t)).$$

Notons que  $\Gamma$  est nécessairement symétrique de type positif, c'est-à-dire que toute matrice carrée extraite de  $\Gamma$  est symétrique positive. On dira qu'une fonction  $\Gamma$  de  $\mathbb{T} \times \mathbb{T} \mapsto \mathbb{R}$  est *symétrique de type positif* si

$$\Gamma(s, t) = \Gamma(t, s), \quad \sum_{1 \leq i, j \leq n} u_i u_j \Gamma(t_i, t_j) \geq 0 \quad \forall n \geq 1, u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}.$$

Notons que dans le cas où  $\Gamma$  est une fonction de covariance, cette dernière somme vaut  $\text{Var}(\sum_i u_i X(t_i)) \geq 0$ .

**Exemple 1.2.** (Existence de processus gaussiens, voir définition ci-dessous)

Soit  $m : \mathbb{T} \mapsto \mathbb{R}$ , et  $\Gamma : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \mapsto \mathbb{R}$  une fonction symétrique de type positif. Alors, il existe un processus gaussien  $X$  indexé par  $\mathbb{T}$ , de moyenne  $m$  et covariance  $\Gamma$ . Il est unique en loi, sa loi est appelée *loi normale* de moyenne  $m$  et covariance  $\Gamma$ , notée  $\mathcal{N}_{\mathbb{T}}(m, \Gamma)$ .

En effet, pour un sous-ensemble fini  $I \subset \mathbb{T}$ , considérons le vecteur  $m|_I = (m(t); t \in I)$ , et la matrice  $\Gamma|_I = [\Gamma(s, t); s, t \in I]$ , qui est symétrique positive par hypothèse : il est bien connu que la loi normale  $Q_I = \mathcal{N}_I(m|_I, \Gamma|_I)$  existe sur  $\mathbb{R}^I$ . D'autre part, si  $I \subset J \subset \mathbb{T}$  sont finis, soit  $Y$  un variable aléatoire indexé par  $J$  de loi  $Q_J$  ; la projection de  $Q_J$  sur  $\mathbb{R}^I$  est la loi de la restriction  $(Y(t), t \in I)$ , qui est encore un vecteur gaussien d'après les propriétés classiques des vecteurs gaussiens, il a pour moyenne  $(m|_J)|_I = m|_I$  et matrice de covariance  $[\Gamma|_J]|_I = \Gamma|_I$ . Finalement,  $(Q_J)_I = Q_I$ , et d'après le théorème 1.2, il existe une loi  $Q$  sur  $\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$  dont les projections sont les  $Q_I$ . Pour montrer son unicité, il suffit de remarquer qu'une telle loi est définie par ses projections fini-dimensionnelles, et que la loi  $\mathcal{N}(m|_I, \Gamma|_I)$  est unique.

## 1.4 ESPACES GAUSSIENS

Voici quelques rappels : la densité gaussienne d'espérance  $m \in \mathbb{R}$  et d'écart-type  $\sigma > 0$  est la fonction

$$g_{m, \sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x - m)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

On écrira  $g_{\sigma^2}$  au lieu de  $g_{m, \sigma^2}$  pour simplifier les notations. La loi de densité  $g_{m, \sigma^2}$  sur  $\mathbb{R}$  est notée  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ , et appelée loi normale (ou gaussienne) de moyenne  $m$  et variance  $\sigma^2$ . Une variable aléatoire réelle  $X$  est dite gaussienne si elle suit une densité

gaussienne, ou si elle est p.s. constante ; dans ce dernier cas, on note  $m$  cette constante,  $\sigma = 0$  et  $\mathcal{N}(m, 0)$  la loi – de manière consistante. Sa fonction caractéristique est

$$\mathbf{E} \exp\{iuX\} = \exp\{ium - \sigma^2 u^2/2\}, \quad u \in \mathbb{R}$$

Un vecteur aléatoire  $X = (X_1, \dots, X_n)$  est dit gaussien si toute combinaison linéaire  $\sum_i u_i X_i$  de ses composantes est une variable aléatoire réelle gaussienne. On constate aisément que, notant  $m = \mathbf{E}(X)$  et  $\Gamma = \text{Cov}(X)$  la matrice de covariance de taille  $n \times n$ , alors la fonction caractéristique de  $X$  est

$$\mathbf{E} \exp\{iu \cdot X\} = \exp\{iu \cdot m - \frac{1}{2} u^* \Gamma u\}, \quad u \in \mathbb{R}^n,$$

avec  $u^*$  le transposé du vecteur  $u$ .

**Définition 1.3.** Une fonction aléatoire réelle  $X = (X(t), t \in \mathbb{T})$  est dite gaussienne si tout vecteur fini-dimensionnel  $(X(t_1), \dots, X(t_n))$  (avec  $n \geq 1$  et  $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{T}$  arbitraires), est gaussien.

La loi de la fonction aléatoire réelle  $X$ , définie par les lois des vecteurs fini-dimensionnels qui sont eux-mêmes caractérisés par moyenne et variance, est donc entièrement spécifiée par les fonctions de moyenne  $m(t)$  et de covariance  $\Gamma(s, t)$ .

Pour étudier les processus gaussiens, il est souvent utile d'utiliser la force de la théorie hilbertienne. Voici un exemple.

Par définition, si  $X$  est une fonction aléatoire gaussienne, l'espace vectoriel engendré par les composantes de  $X$ ,

$$\text{Vect}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^n u_i X(t_i); n \geq 1, u_i \in \mathbb{R}, t_i \in \mathbb{T}, i \leq n \right\}$$

est constitué de variables aléatoires gaussiennes. C'est donc un sous-espace vectoriel de  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ , qui lui-même est un espace de Hilbert pour le produit scalaire  $Y, Z \mapsto \langle Y, Z \rangle = \mathbf{E}(XY)$ . L'adhérence  $\overline{\text{Vect}(X)}^{L^2}$  de  $\text{Vect}(X)$  dans  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  est encore un sous-espace vectoriel de  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ , il est fermé dans cet espace de Hilbert : il est lui-même un espace de Hilbert, en restreignant le produit scalaire à  $\overline{\text{Vect}(X)}^{L^2}$ . Ses éléments sont des variables aléatoires gaussiennes, car elles sont  $L^2$ -limites de variables aléatoires gaussiennes. En effet, une propriété bien connue est que toute limite en loi de variables aléatoires gaussiennes est encore gaussienne.

**Définition 1.4.** (i) Un sous-espace vectoriel fermé  $H$  de  $L^2$  est appelé espace gaussien, s'il est constitué de variables aléatoires gaussiennes centrées.

(ii) Soit  $X$  une fonction aléatoire gaussienne. L'espace gaussien  $H^X$  associé à  $X$  est

$$H^X = \overline{\text{Vect}(X(t) - \mathbf{E}X(t); t \in \mathbb{T})}^{L^2}.$$

Lorsque  $X$  est centré, c'est le plus petit sous-espace gaussien contenant toutes les composantes de  $X$ .

Supposons à présent que  $X$  est une fonction aléatoire réelle gaussienne, indexée par  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ , continue en moyenne quadratique, i.e.,

$$t \mapsto X(t), \text{ est continue de } \mathbb{R} \rightarrow L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$$

Cette propriété de continuité de  $X$  entraîne que l'espace  $H^X$  est séparable : on constate facilement que le  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel engendré par la famille dénombrable  $(X(t) - \mathbf{E}X(t); t \in \mathbb{Q})$  est dense dans  $H^X$  muni de sa norme. L'espace  $H^X$  est donc un Hilbert séparable, il possède une suite orthonormée  $(\xi_n; n \in \mathbb{N})$ . Remarquons que les variables aléatoires  $\xi_n = \xi_n(\omega)$  sont gaussiennes centrées – car éléments de  $H^X$  –, de variance 1 – car elles sont normées –, et non corrélées – car  $\text{Cov}(\xi_n, \xi_m) = \langle \xi_n, \xi_m \rangle = 0$  – donc indépendantes – puisque la suite  $(\xi_n)_n$  de  $H^X$  est une suite conjointement gaussienne. Ainsi, les  $\xi_n, n \geq 0$ , forment tout simplement une suite indépendante et identiquement distribuée de loi gaussienne centrée réduite. Réciproquement, pour une telle suite, le sous-espace fermé engendré par cette suite est un espace gaussien séparable.

Développons maintenant  $X(t) - \mathbf{E}X(t)$  sur cette base orthonormée :

$$X(t) = \mathbf{E}X(t) + \sum_n c_n(t) \xi_n(\omega) \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.4.3)$$

avec les coefficients donnés par

$$c_n(t) = \langle X(t) - \mathbf{E}X(t), \xi_n \rangle = \mathbf{E}X(t) \xi_n.$$

Cette décomposition s'appelle la *formule de Karhunen-Loève*. Il convient de remarquer que  $X$  s'écrit comme somme d'une série de produits d'une fonction de  $t$  seulement, et d'une fonction de  $\omega$  seulement. Nous la retrouverons dans le chapitre suivant, lors de la construction du mouvement brownien, plus précisément à la formule (2.3.4).



## Chapitre 2

---

# Mouvement brownien et martingales

### 2.1 MOUVEMENT BROWNIEN

C'est au botaniste Brown en 1827 que l'on doit – outre son nom – une des premières observations du mouvement brownien. Examinant le mouvement de grains de pollen en suspension dans un liquide, il remarqua les trajectoires erratiques des grains, dont les collisions avec les particules du liquide occasionnaient une dispersion (diffusion) des grains. Vers 1905, Albert Einstein mit en évidence le mouvement brownien en étudiant la dynamique moléculaire, ainsi que ses relations avec l'équation de la chaleur et la diffusion. Jean Perrin entreprit son étude expérimentale systématique vers 1909, et observa le caractère exotique des trajectoires (qu'il qualifiait de « lignes rugueuses », et dont il pressentait l'invariance d'échelle). Ces deux séries de travaux valurent, chacun à leur tour, le prix Nobel à leurs auteurs pour avoir donné une démonstration de la nature atomique de la matière. Paul Langevin proposa bientôt une équation – phénoménologique et susceptible d'être résolue – pour la dynamique d'une grosse molécule plongée dans un gaz de particules plus petites et désordonnées. À partir de 1925, Norbert Wiener jeta les fondements mathématiques du mouvement brownien, puis Paul Lévy étudia ses propriétés analytiques fines. Depuis 1950, de nombreux travaux lui ont été consacrés, dont l'un des plus importants est le développement du calcul stochastique par Kiyoshi Itô. Le lecteur pourra consulter la section 2.11 de [15] pour un aperçu historique, ou encore les chapitres 2-3-4 de [19] pour un point de vue de physicien théoricien sur l'histoire plus ancienne.

### 2.1.1. Définition

**Définition 2.1.** On appelle **mouvement brownien** toute fonction aléatoire réelle continue  $B = (B(t); t \geq 0)$  à accroissements indépendants gaussiens

$$B(t) - B(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s), \quad 0 \leq s \leq t,$$

avec  $B(0) = 0$ .

Soit une subdivision  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t$  de  $[0, t]$ . Par définition, le vecteur  $(B(t_i) - B(t_{i-1}))_{i=0}^n$  possède une densité, donnée au point  $y = (y_i)_{i=1}^n$  par

$$\prod_{i=1}^n g_{t_i - t_{i-1}}(y_i) = \prod_1^n (2\pi(t_i - t_{i-1}))^{-1/2} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{t_i - t_{i-1}} \right\}.$$

Par changement de variables linéaire  $y \mapsto (y_1, y_1 + y_2, y_1 + y_2 + y_3, \dots)$  de déterminant jacobien égal à un, on en déduit que le vecteur  $(B(t_i))_{i=1}^n$  a lui-même une densité, donnée en  $x = (x_i)_{i=1}^n$  par

$$\prod_1^n (2\pi(t_i - t_{i-1}))^{-1/2} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{t_i - t_{i-1}} \right\}, \quad (2.1.1)$$

avec la convention  $x_0 = 0$ . Ainsi la définition 2.1 définit un unique processus (en loi).

**Remarque.** Une extrapolation audacieuse  $n \rightarrow \infty$  dans la formule précédente conduit à voir la loi  $\mathbf{P}_B$  du mouvement brownien comme la probabilité sur l'espace  $\mathcal{C}([0, t], \mathbb{R})$  des fonctions  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}(s))_s$  réelles continues sur  $[0, t]$ , donnée par

$$d\mathbf{P}_B(\mathbf{x}) = C \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^t \dot{\mathbf{x}}(s)^2 ds \right\} d\mu(\mathbf{x}),$$

avec  $\mu$  une « mesure uniforme » sur  $\mathcal{C}([0, t], \mathbb{R})$  (analogue de la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$ ),  $\dot{\mathbf{x}}$  la dérivée et  $C$  la constante de normalisation pour que  $\mathbf{P}_B$  soit de masse 1. En fait, aucun des trois facteurs du membre de droite n'a de sens ! Précisément,

(i) il n'existe pas de mesure non triviale sur les boreliens de  $\mathcal{C}([0, t], \mathbb{R})$  qui soit invariante par les translations ;

(ii) nous verrons que pour presque toute trajectoire  $\mathbf{x}$  du brownien,  $\int_0^t \dot{\mathbf{x}}(s)^2 ds = \infty$ , de sorte que l'exponentielle est nulle p.s. ;

(iii) la constante  $C$  est donc infinie.

Cependant, le membre de droite existe, en tant que loi de la fonction aléatoire réelle  $B$  que nous allons construire, et la formule (2.1.1) est la version rigoureuse de la formule heuristique ci-dessus.



**Remarque.** Dans la définition 2.1 on pourrait remplacer l'hypothèse d'accroissements « gaussiens » par une hypothèse, apparemment plus faible, d'accroissements stationnaires centrés de variance  $t - s$ . Plus précisément, si les accroissements  $B(t) - B(s)$  sont indépendants stationnaires centrés de variance  $t - s$ , le théorème de la limite centrale de Lindeberg (th. 4.6 dans [7]) – avec la continuité – entraîne alors que les accroissements

$$B(t) - B(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n B(s + (t-s)i/n) - B(s + (t-s)(i-1)/n)$$

sont nécessairement de loi gaussienne. Ainsi le caractère gaussien est en fait automatique, pour un processus continu à accroissements indépendants stationnaires.

### Le bruit blanc

Beaucoup de phénomènes se modélisent à l'aide du bruit blanc, une fonction aléatoire réelle  $N(t) = N(t, \omega), t \in \mathbb{R}_+$ , qui serait un analogue parfait des suites de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, c'est-à-dire une fonction aléatoire réelle dont les coordonnées sont « totalement aléatoires ».

Les ingénieurs utilisent couramment ce concept, mais donnons plutôt un exemple simple tiré de la finance. Un capital investi a une valeur  $X(t)$  à l'instant  $t$ . S'il est investi dans un actif sans risque, il évolue selon l'équation différentielle

$$\frac{dX(t)}{dt} = \alpha X(t),$$

où  $\alpha > 0$  est le taux d'intérêt. Mais s'il est investi dans un actif risqué, ou si le taux d'intérêt fluctue, l'évolution de la valeur  $X$  n'est qu'approximativement gouvernée par cette équation, que l'on doit corriger par un terme aléatoire décrivant les facteurs extérieurs de risque et/ou les fluctuations, par exemple,

$$\frac{dX(t)}{dt} = \alpha X(t) + X(t)N(t), \quad (2.1.2)$$

avec  $N$  un bruit blanc qui fait que le taux d'intérêt instantané  $\alpha + N(t)$  est à présent fluctuant autour de sa valeur moyenne  $\alpha$ .

Plus précisément et de manière générale, le bruit blanc devrait répondre aux exigences suivantes :

les variables aléatoires réelles  $N(t), t \in \mathbb{R}_+$ ,  
sont indépendantes et de même loi centrée.

Le problème alors est que, nécessairement pour une telle famille « continue » de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, avec probabilité 1 l'application  $t \mapsto N(t)$  n'est pas mesurable (sauf si  $N(t) \equiv 0$ , voir l'exemple 1.2.5 de [13]). Ceci est bien gênant, puisque l'on aimerait considérer des

intégrales  $\int_0^t N(s)ds$  du bruit blanc. Le problème du bruit blanc, en les termes ci-dessus, est donc mal posé. Avant d'abandonner le point de vue du bruit blanc, notons tout de même que, si on avait pu lui donner un sens, la primitive du bruit blanc aurait été le mouvement brownien,

$$” \int_0^t N(s)ds = B(t) ”$$

puisque les accroissements  $(B(t_i) - B(t_{i-1}))_i$  sont indépendants, centrés et de même loi si  $t_i - t_{i-1}$  est constant. Au contraire du précédent, le problème du mouvement brownien, en les termes de la définition ci-dessus, est quant à lui, bien posé : on est capable de le construire, c'est ce que nous allons faire dans la section 2.3 ci-dessous. On peut alors définir le bruit blanc, non pas comme ci-dessus, mais comme la dérivée (au sens des distributions) du mouvement brownien : cette dérivée n'est pas une fonction, mais bien une distribution. De même, l'équation différentielle (2.1.1) est bien posée, nous l'étudierons dans la suite sous le nom de « mouvement brownien géométrique ».

### 2.1.2. Premières propriétés

Voilà les premières propriétés – élémentaires mais fondamentales – du mouvement brownien.

**Proposition 2.1.** *a)  $B$  est une fonction aléatoire réelle continue, gaussienne centrée de covariance*

$$\mathbf{E}B(t)B(s) = \min(s, t) ,$$

*et réciproquement ces propriétés caractérisent (en loi) le brownien.*

*b) Si  $B$  est un mouvement brownien, il en est de même pour :*

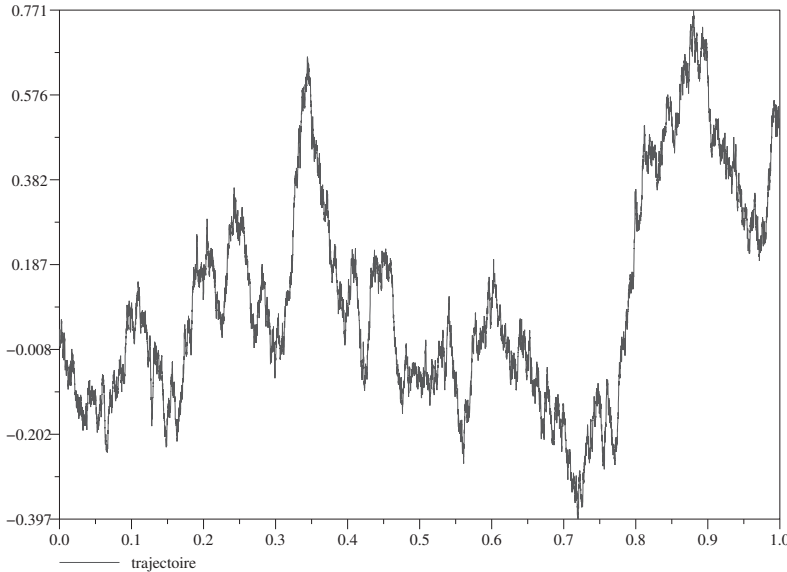
1.  $X(t) = a^{-1}B(a^2t)$  avec  $a$  une constante non nulle
2.  $X(t) = tB(1/t), t > 0, X(0) = 0$
3.  $X(t) = B(t + t_0) - B(t_0)$
4.  $X(t) = B(T - t) - B(T), t \in [0, T]$  (avec  $T > 0$ ).

Faisons quelques commentaires des propriétés b) :

1. Le changement d'échelle et de temps décrit dans 1) est appelé *scaling diffusif* : le processus  $(aB(t))_t$  a même loi que le processus  $(B(a^2t))_t$ . Cette loi d'échelle s'oppose au comportement balistique : l'archétype dans ce cas est la fonction  $x(t) = vt$ , avec  $v \neq 0$  constante, pour laquelle on a  $x(at) = ax(t)$ , et  $x(t) = a^{-1}x(at)$ , qualifié de *scaling hyperbolique*.
2. Le mouvement brownien est invariant – en loi ! – par inversion du temps d'après 2).

3. Il renaît « tout neuf » après des temps fixes  $t_0$  (3, appelée *propriété de Markov*, si l'on lui adjoint la remarque que, d'après l'indépendance des accroissements du mouvement brownien,  $X$  est de plus indépendant de  $(B(s))_{s \leq t_0}$ ).
4. Il est invariant par retournement du temps d'après 4), une propriété appelée *réversibilité* en physique.

On pourra appréhender plus complètement ces propriétés en observant les figures 2.1 et 2.2



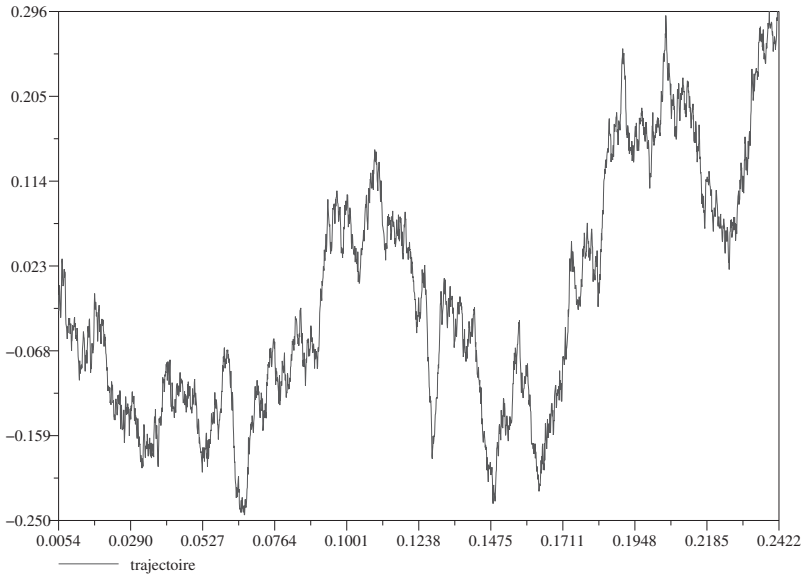
**Figure 2.1** Une trajectoire du mouvement brownien sur  $[0,1]$

Le graphe du mouvement brownien vu dans le repère  $((t_0, B_{t_0}), \vec{z}, \vec{y})$  est (statistiquement) identique à celui du mouvement brownien vu dans le repère habituel  $((0, 0), \vec{z}, \vec{y})$ , d'après la propriété 3 de la proposition 2.1. Le graphe du mouvement brownien (ne considérant que les temps  $t \leq t_0$ ) vu dans le repère  $((t_0, B_{t_0}), -\vec{z}, \vec{y})$  est (statistiquement) identique à celui du mouvement brownien, d'après la propriété 4 de la proposition 2.1.

**Démonstration.** a) Le vecteur  $(B(t_i))_{i=1}^n$  est gaussien d'après (2.1.1), par conséquent le processus  $B$  est gaussien. Bien sûr,  $\mathbf{E}B(t) = 0$ , et pour  $0 \leq s \leq t$ , on a par indépendance des accroissements,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(B(s), B(t)) &= \mathbf{E}(B(s)B(t)) = \mathbf{E}(B(s)\{B(t) - B(s)\}) + \mathbf{E}(B(s)^2) \\ &= \mathbf{E}(B(s))\mathbf{E}\{B(t) - B(s)\} + \text{Var}(B(s)) = 0 + s \\ &= s \wedge t . \end{aligned}$$

Réciproquement, la loi d'un processus gaussien est défini par moyenne et covariance.



**Figure 2.2** Zoom de la trajectoire de la figure 2.1, entre les instants 0 et 0.24...

Cette figure est (statistiquement) identique à la précédente, sous la renormalisation diffusive, conformément à la propriété 1 de la proposition 2.1. Cela met en évidence le caractère fractal de la trajectoire brownienne.

b) Dans chaque cas, on vérifie facilement que le processus  $X$  est gaussien centré et a la bonne covariance. Seule la continuité en 0 dans le cas 2) n'est pas évidente, elle sera établie dans le corollaire 2.12.  $\square$

## 2.2 PRINCIPE D'INVARIANCE

Soit  $\xi_i, i \geq 1$ , une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi, avec  $\mathbf{E}\xi = 0, \mathbf{E}\xi^2 = \sigma^2$ . On considère la marche aléatoire

$$S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n, \quad n \geq 0.$$

Le théorème de la limite centrale implique que  $S_n/(\sigma\sqrt{n}) \rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$  en loi quand  $n \rightarrow \infty$ . Derrière cette convergence de variables aléatoires se cache une convergence de fonctions aléatoires. Définissons la ligne polygonale  $X^n$  extrapolant la marche  $S$ ,

$$X^n(t) = \frac{\sum_{i=1}^{[nt]} \xi_i + (nt - [nt])\xi_{[nt]+1}}{\sigma\sqrt{n}}, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (2.2.3)$$