J'intègre

MÉTHODES
ET EXERCICES

PCSI

Anne-Emmanuelle **Badel**
Emmanuel **Angot**

Physique

méthodes et exercices

DUNOD

Conception et création de couverture : Atelier 3+

5 rue Laromiguière, 75005 Paris
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-072655-4

Table des matières

Chapitre 1

Oscillateurs harmoniques et signaux sinusoïdaux

Thèmes abordés dans les exercices

- Amplitude.
- Pulsation, période et fréquence.
- Phase instantanée ou à l'origine et déphasage.
- Oscillateur harmonique.
- Conservation de l'énergie mécanique.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Caractériser un signal sinusoïdal.
- Etablir l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique.
- Résoudre l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique.
- Etablir l'équivalence entre les deux formes de solution d'un oscillateur harmonique.

Les méthodes à retenir

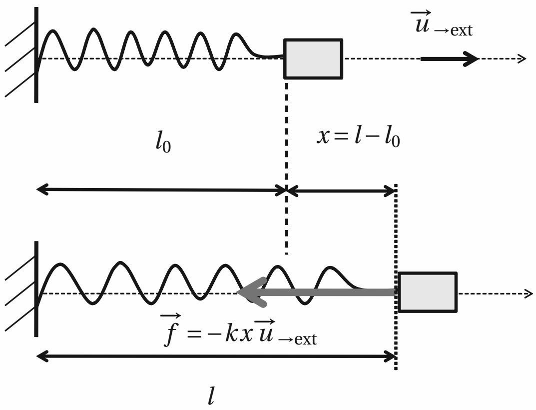
Etablir et reconnaître l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique.

- Connaître l'expression de la force de rappel d'un ressort

$$\vec{f} = -kx\vec{u}_{\rightarrow\text{ext}}$$

  en notant k la raideur du ressort, x son allongement algébrique et $\vec{u}_{\rightarrow\text{ext}}$ le vecteur unitaire dirigé vers l'extérieur du ressort.
- Utiliser le principe fondamental de la dynamique après avoir défini le système et le référentiel et établi un bilan des forces. Cf. chapitre Principe fondamental de la dynamique.
- Connaître la forme de l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ en notant x le paramètre étudié et ω_0 la pulsation du mouvement.

Exemple :



On étudie le système constitué de la masse m dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen. Il est soumis à la force de rappel du ressort $\vec{f}$ ainsi qu'à son poids $m\vec{g}$ et à la réaction $\vec{R}$ du support, ces deux forces étant perpendiculaires au mouvement selon l'axe Ox. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit $m\vec{a} = \vec{f} + m\vec{g} + \vec{R}$ dont la projection sur l'axe Ox donne $m\ddot{x} = -kx$ ou $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$. C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ obtenue par identification.

↪ **Exercice 1.8.**

Résoudre l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique.

- Savoir que la solution de l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique $\ddot{x}+\omega_0^2 x=0$ peut s'écrire sous l'une des deux formes :

  a) $x(t)=\mathrm{A}\cos(\omega_0 t)+\mathrm{B}\sin(\omega_0 t)$ où A et B sont deux constantes d'intégration à déterminer à l'aide des conditions initiales,

  b) $x(t)=\mathrm{X}\cos\left(\omega_0 t+\varphi\right)$ où X et φ sont deux constantes d'intégration à déterminer à l'aide des conditions initiales.

- Savoir passer d'une forme de solution de l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique à l'autre en utilisant les deux relations trigonométriques $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$ d'une part et $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$ d'autre part, ce qui conduit aux relations

$$\left\{\begin{array}{l}\mathrm{A}=\mathrm{X}\cos\varphi\\ \mathrm{B}=-\mathrm{X}\sin\varphi\end{array}\right.\qquad\left\{\begin{array}{l}\mathrm{X}=\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}\\ \tan\varphi=-\dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}\end{array}\right.$$

Exemple :

> On reprend l'exemple précédent pour lequel on suppose qu'on écarte initialement la masse m d'une distance a et qu'on l'abandonne sans vitesse initiale. La solution de l'équation différentielle s'écrit $x(t)=\mathrm{X}\cos\left(\omega t+\varphi\right)$ et la dérivée $\dot{x}(t)=-\omega\mathrm{X}\sin\left(\omega t+\varphi\right)$. Les conditions initiales sont d'une part pour la position $x(0)=\mathrm{X}\cos\varphi=a$ et d'autre part pour la vitesse $\dot{x}(0)=-\omega\mathrm{X}\sin\varphi=0$ donc $\sin\varphi=0$ ou encore $\varphi=0$ et $\mathrm{X}=a$. Finalement $x(t)=a\cos\omega t$.

> Autre manière de faire : on écrit la solution sous la forme $x(t)=\mathrm{A}\cos(\omega t)+\mathrm{B}\sin(\omega t)$ et la dérivée $\dot{x}(t)=-\mathrm{A}\omega\sin(\omega t)+\mathrm{B}\omega\cos(\omega t)$. Les conditions initiales conduisent à $x(0)=\mathrm{A}=a$ et $\dot{x}=\mathrm{B}\omega=0$ donc $\mathrm{A}=a$ et $\mathrm{B}=0$ à savoir la même expression.

> Enfin on peut passer d'une forme à l'autre par les relations indiquées ci-dessus.

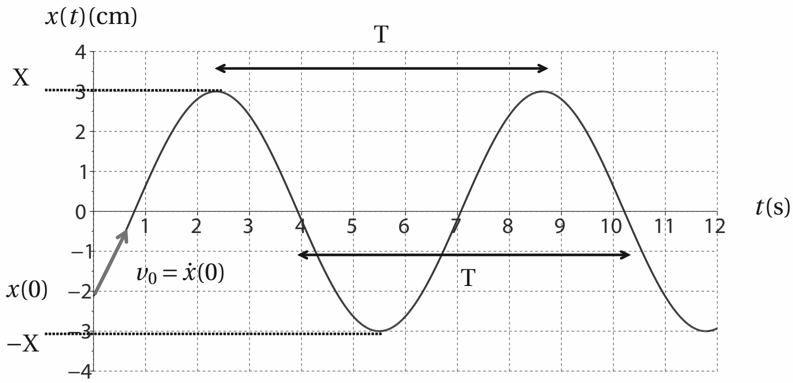
$\hookrightarrow$ **Exercices 1.2, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 1.10.**

Utiliser et relier les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence et de pulsation.

Pour un signal $x(t)=\mathrm{X}\cos\left(\omega t+\varphi\right)$, on définit les différentes grandeurs suivantes :

- l'amplitude X,
- la pulsation ω_0 ou la fréquence f vérifiant $f=\dfrac{\omega_0}{2\pi}$ ou la période T telle que $\mathrm{T}=\dfrac{1}{f}=\dfrac{2\pi}{\omega_0}$,
- la phase à l'instant t : $\omega_0 t+\varphi$ et la phase initiale φ.

Exemple :



On lit une amplitude $X = 3{,}0$ cm. On mesure la période T par l'écart entre les instants de deux maxima successifs soit $T = t_2 - t_1 = 8{,}6 - 2{,}4 = 6{,}2$ s. On en déduit la valeur de la fréquence $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{6{,}2} = 0{,}16$ Hz ainsi que celle de la pulsation $\omega = 2\pi f = 1{,}0$ rad.s^{-1}.

↪ **Exercices 1.1, 1.3, 1.5, 1.6, 1.7, 1.9, 1.10.**

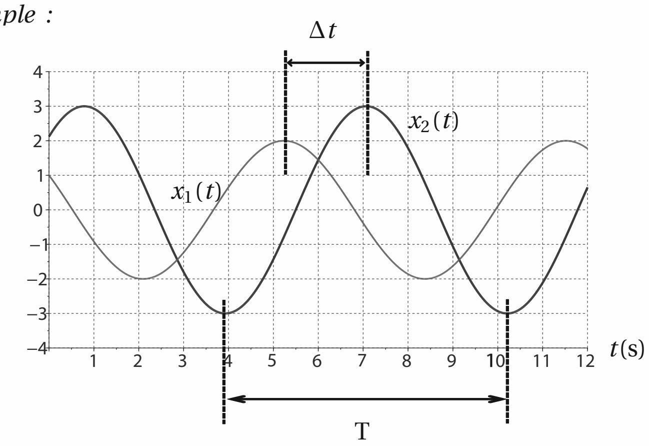
Estimer un déphasage et déterminer si un signal est en avance ou en retard sur un autre.

Soient $x_1(t) = X_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $x_2(t) = X_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$ deux signaux de même pulsation ω donc de même période T. Ils sont dits déphasés dans le temps. Le déphasage du signal $x_2(t)$ par rapport au signal $x_1(t)$ est noté $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ et est lié au plus petit décalage temporel Δt entre deux maxima consécutifs de x_1 et x_2. On a alors $\varphi = \pm 2\pi \dfrac{\Delta t}{T}$.

- Si $x_2(t)$ atteint son maximum après $x_1(t)$ (ce qui est le cas ici), on dit que $x_2(t)$ est en retard sur $x_1(t)$ et on a $\varphi < 0$.
- Si $x_2(t)$ atteint son maximum avant $x_1(t)$, on dit que $x_2(t)$ est en avance sur $x_1(t)$ et on a $\varphi > 0$.

Remarque : le déphasage étant défini à 2π près, avance et retard sont bien évidemment deux notions relatives. Ainsi un déphasage retard $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$ correspond à un déphasage avance de $2\pi - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{2}$. Afin de lever toute ambiguité, on choisit souvent une valeur de déphasage $\varphi \in]-\pi\,;\pi]$.

Exemple :



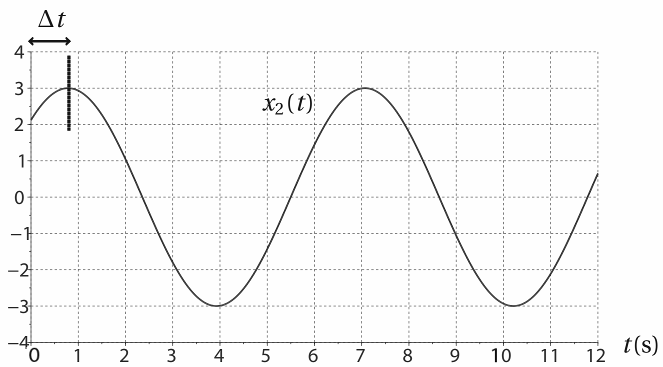
On mesure la période par l'écart entre les deux minima soit $T = t_2 - t_1 = 10{,}2 - 3{,}9 = 6{,}3$ s. Le déphasage correspond au décalage temporel des deux maxima soit pour $t_1 = 5{,}3$ s et $t_2 = 7{,}1$ s donc $\Delta t = 7{,}1 - 5{,}3 = 1{,}8$ s. La valeur du déphasage est donc $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -2\pi\dfrac{\Delta t}{T} = -2\pi\dfrac{1{,}8}{6{,}3}$ soit numériquement $\varphi = -1{,}8$ rad. Le déphasage de $x_2(t)$ par rapport à $x_1(t)$ est négatif puisque $x_2(t)$ est en retard sur $x_1(t)$ c'est-à-dire que $x_2(t)$ passe par son maximum après $x_1(t)$.

↪ **Exercices 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.9.**

Interpréter la phase à l'origine.

L'interprétation de la phase à l'origine φ_2 du signal $x_2(t)$ peut aussi être envisagé en termes de déphasage avec une courbe fictive présentant son maximum en $t = 0$. Il faut alors pour la calculer prendre l'écart temportel Δt comme indiqué sur la courbe suivante.

Exemple :



On mesure la période par l'écart entre deux maxima successifs soit $T = t_2 - t_1 = 7{,}1 - 0{,}8 = 6{,}3$ s. Le phase à l'origine correspond à la position du premier maximum soit $\Delta t = 0{,}80$ s, sa valeur est donc $\varphi = -2\pi\frac{\Delta t}{T} = -2\pi\frac{0{,}80}{6{,}3}$ soit numériquement $\varphi = -0{,}80 \text{ rad} \approx -\frac{\pi}{4}$ rad.

↪ **Exercice 1.5**

.

Vérifier ou utiliser la conservation de l'énergie mécanique.

a) Expliciter l'expression de l'énergie cinétique $Ec = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$.

b) Expliciter l'expression de l'énergie potentielle de la force de rappel $Ep = \frac{1}{2}kx^2$.

c) Calculer l'énergie mécanique $Em = Ec + Ep$.

d) Simplifier l'expression obtenue en utilisant la relation trigonométrique valable pour toute valeur de α : $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ et en explicitant l'expression de la pulsation en fonction des paramètres du système.

Exemple :

Soit un oscillateur harmonique dont la solution s'écrit $x(t) = X\cos(\omega t)$. Sa vitesse est $\dot{x}(t) = -\omega X\sin(\omega t)$, son énergie cinétique s'écrit $Ec = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) = \frac{1}{2}kX^2\sin^2(\omega t)$ en utilisant le fait que $k = m\omega^2$ et son énergie potentielle se met sous la forme $Ep = \frac{1}{2}kX^2\cos^2(\omega t)$. Son énergie mécanique $Em = Ec + Ep = \frac{1}{2}kX^2$ est une constante, ce qui prouve la conservation de cette quantité.

↪ **Exercice 1.8.**

Énoncés des exercices

1.1

Caractériser une périodicité temporelle

Calculer la fréquence et la pulsation d'un phénomène qui se répète identique à lui-même à intervalles de temps réguliers égaux à 0,40 s. Comment appelle-t-on cet intervalle de temps ?

1.2 Visualiser les vibrations du la 440

Le signal sonore correspondant à la note la$_3$ de fréquence 440 Hz est observé sur un oscilloscope. On observe 4,4 oscillations sur l'écran.

a) Déterminer le calibre utilisé sur l'oscilloscope.

b) On visualise un autre son de fréquence f avec les mêmes réglages. On observe 6,5 oscillations. En déduire la valeur de f.

c) On observe maintenant trois oscillations avec un calibre horizontal de 0,5 ms.cm^{-1} sur un écran de largeur $\ell = 10$ cm. Quelle est la fréquence du son correspondant ?

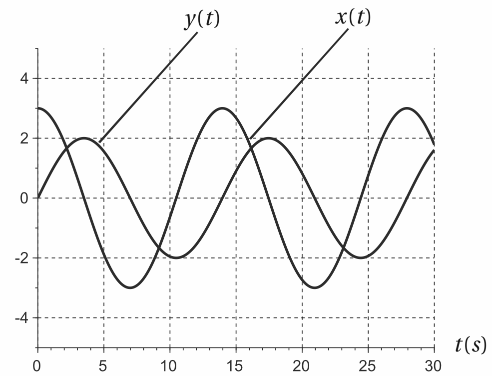
1.3 Estimer les caractéristiques de signaux sinusoïdaux

On observe les signaux $x(t)$ et $y(t)$ représentés ci-dessous.

a) Déterminer la fréquence des signaux x et y.

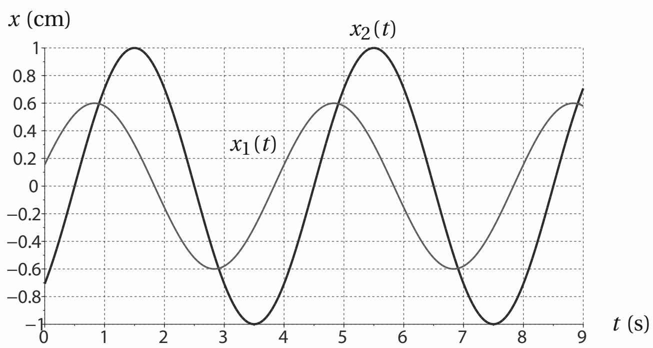
b) Indiquer lequel des signaux x et y est en avance sur l'autre.

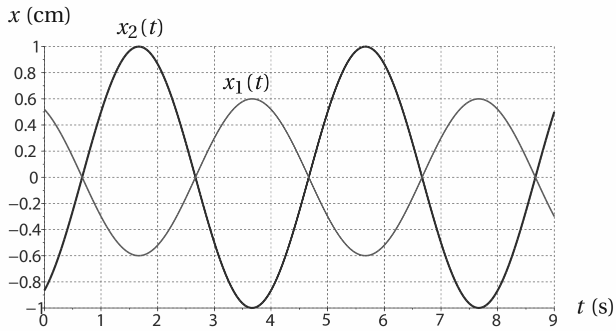
c) Estimer le déphasage du signal $x(t)$ sur le signal $y(t)$.



1.4 Lecture graphique d'un déphasage

On considère les courbes suivantes représentant deux signaux sinusoïdaux.

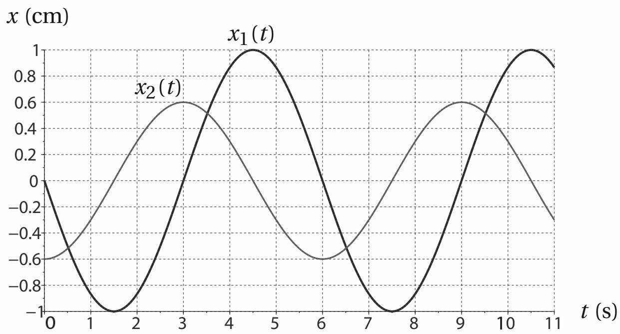




Dans chaque cas, déterminer la valeur numérique du déphasage du signal $x_2(t)$ par rapport au signal $x_1(t)$.

1.5 Détermination d'un déphasage et de phases à l'origine

On considère les signaux $x_1(t) = X_1 \cos\left(\omega t + \varphi_1\right)$ et $x_2(t) = X_2 \cos\left(\omega t + \varphi_2\right)$ représentés ci-dessous :



Les phases seront prises sur l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.

a) Déterminer graphiquement les valeurs des amplitudes X_1 et X_2 ainsi que de la période T.

b) En déduire les valeurs de la pulsation ω du mouvement et de sa fréquence f.

c) On s'intéresse au déphasage $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ du signal x_2 par rapport au signal x_1. Quel est le signe de φ ?

d) Déterminer graphiquement la valeur numérique approchée de ce déphasage et l'écrire sous la forme $\varphi = \pm\dfrac{\pi}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

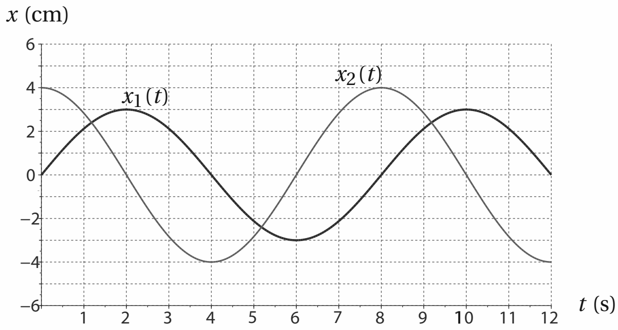
e) En ne considérant que le signal $x_1(t)$, déterminer la phase à l'origine φ_1.

f) Faire de même pour la phase à l'origine φ_2 du signal $x_2(t)$.

g) Montrer la cohérence des résultats avec la valeur trouvée précédemment pour φ.

1.6 Les deux formes de solutions de l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique : étude graphique

On représente les signaux $x_1(t) = X_1 \cos(\omega t)$ et $x_2(t) = X_2 \sin(\omega t)$:

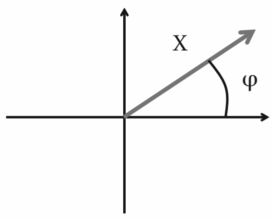


a) Déterminer graphiquement la période T du mouvement ainsi que les amplitudes X_1 et X_2.

b) Déterminer le déphasage du signal $x_2(t)$ par rapport au signal $x_1(t)$.

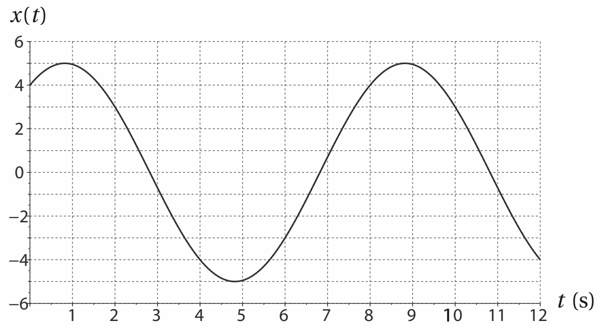
c) On s'intéresse au signal $x(t) = x_1(t) + x_2(t) = X\cos\left(\omega t + \varphi\right)$. On donne $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$. Calculer l'amplitude X en fonction de X_1 et X_2. Faire l'application numérique.

d) En représentation de Fresnel, le signal $x(t)$ est représenté par un vecteur de norme X faisant un angle φ avec l'axe des abscisses.



Représenter les signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ par leurs vecteurs respectifs. Faire leur somme vectorielle pour trouver la représentation de $x(t)$ et retrouver la relation entre X, X_1 et X_2 plus simplement que par calcul.

e) Le signal obtenu $x(t)$ est alors le suivant :



Vérifier la cohérence avec la valeur numérique de X précédemment obtenue puis déterminer la valeur approximative de φ, la phase à l'origine de $x(t)$ en radians.

1.7 Les deux formes de solutions de l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique : étude numérique

a) Un oscillateur harmonique obéit à l'équation différentielle $\ddot{x}+3x=0$ avec comme conditions initiales $x(0)=2{,}0$ cm et $\dot{x}(0)=-6{,}0$ cm.s^{-1}. Quelle est la pulsation ω du mouvement et sa période T ?

b) Déterminer numériquement $x(t)$. On présentera la solution sous la forme

$$x(t)=\mathrm{A}\sin(\omega t)+\mathrm{B}\sin(\omega t)$$

où on cherchera numériquement A et B.

c) On cherche désormais à écrire $x(t)$ sous la forme $x(t)=\mathrm{X}\cos\left(\omega t+\varphi\right)$ en déterminant les trois paramètres numériquement.

i) On donne $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$. En développant l'expression précédente de $x(t)$, redémontrer les relations $\mathrm{A}=\mathrm{X}\cos\varphi$ et $\mathrm{B}=-\mathrm{X}\sin\varphi$. Exprimer X en fonction de A et B.

ii) Quelle est la valeur numérique de l'amplitude X du mouvement ?

iii) Calculer la phase φ à l'origine.

iv) En déduire numériquement l'expression de $x(t)$.

d) Représenter qualitativement le graphe de la fonction $x(t)$.

e) Donner une expression numérique approchée de $x(t)$, $\dot{x}(t)$ et $\ddot{x}(t)$ à $t=1{,}0$ s.

1.8 Conservation de l'énergie mécanique pour un oscillateur harmonique

Soit une masse m attachée à un ressort de raideur k et astreinte à se déplacer sans frottement sur un plan horizontal.

a) Rappeler la forme de la force exercée par le ressort sur la masse.

b) Etablir l'équation différentielle du mouvement.

c) A l'instant initial, on écarte la masse d'une distance x_0 de sa position d'équilibre et on l'abandonne sans vitesse initiale. Déterminer l'expression de la position de la masse en fonction du temps.

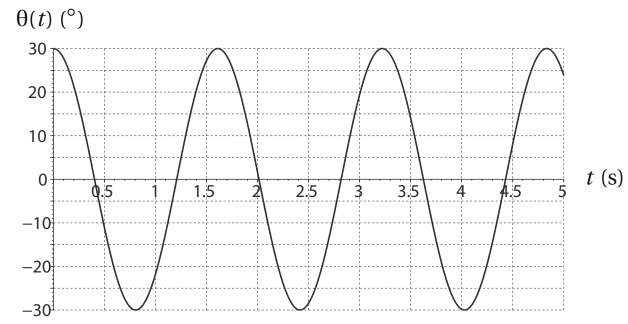
d) Exprimer les énergies cinétique Ec et potentielle Ep.

e) En déduire que l'énergie mécanique $\mathrm{E}m=\mathrm{E}c+\mathrm{E}p$ est constante.

1.9 Oscillations d'un pendule simple

a) Un pendule simple est constitué d'un fil inextensible de longueur l auquel est attachée une masse m assimilée à un point matériel. On note $g=9{,}8$ m.s^{-2} l'intensité du champ de pesanteur. L'évolution de l'angle θ que fait le pendule avec la verticale, pour de petits angles, est régie par l'équation différentielle $\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=0$. Que vaut la période T du mouvement ? et sa fréquence ?

b) L'évolution de $\theta(t)$ est donnée sur le graphe ci-dessous.



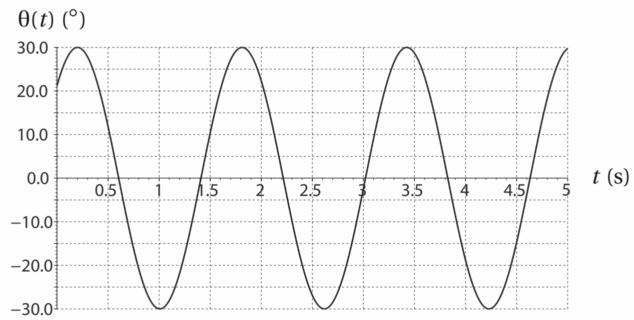
i) Déterminer numériquement la période T du mouvement. En déduire la longueur l du pendule utilisé.

ii) Déterminer une valeur approchée de l'amplitude θ_m et de la phase φ à l'origine du signal.

iii) Après avoir calculé la pulsation ω du mouvement, en déduire une expression numérique de $\theta(t)$.

iv) Déterminer graphiquement $\theta(0)$ et $\dot{\theta}(0)$. En déduire simplement $\ddot{\theta}(0)$.

c) On recommence avec de nouvelles conditions initiales, la période restant identique :



i) Déterminer une valeur approchée de l'amplitude θ_m et de la phase φ à l'origine du signal.

ii) Donner alors une expression numérique de $\theta(t)$. En déduire par calcul les conditions initiales $\theta(0)$ et $\dot{\theta}(0)$.

iii) Déterminer graphiquement la valeur de $\theta(0)$ et le signe de $\dot{\theta}(0)$. Comment pourrait-on procéder pour mesurer cette dernière valeur graphiquement ?

1.10 **Obtenir l'expression de la période par une analyse dimensionnelle**

Un objet de masse m attaché à un ressort oscille horizontalement autour de sa position d'équilibre. La période T du mouvement dépend de la masse m et de la raideur k du ressort.

a) Par une analyse dimensionnelle, indiquer laquelle des deux expressions suivantes donne la période du mouvement :

$$(a) \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad\qquad (b) \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$$

b) Donner sa valeur pour $k = 50$ N.m^{-1} et $m = 500$ g.

Du mal à démarrer ?

1.1

Utiliser les relations liant période T, fréquence f et pulsation ω soit $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$.

1.2

Utiliser la relation liant la période T et la fréquence f d'un signal. Exploiter les proportionnalités entre les grandeurs.

1.3

a) Estimer la période T et en déduire la fréquence f par la relation $f = \frac{1}{T}$.

c) Appliquer la méthode d'estimation d'un déphasage.

1.4

Appliquer la méthode d'estimation d'un déphasage.

1.5

a) L'amplitude correspond à la valeur du maximum si le signal admet zéro comme valeur moyenne. La période est égale à l'écart temporel entre deux maxima successifs.

b) Utiliser les relations entre période T, pulsation ω et fréquence f.

c) Appliquer la méthode d'estimation d'un déphasage.

1.6

c) Utiliser la relation $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ pour toute valeur de a.

d) Utiliser le théorème de Pythagore dans un triangle rectangle ayant pour hypothénuse une longueur X.

1.7

a) Reconnaître la forme de l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique et identifier la pulsation. Utiliser ensuite la relation entre la période T et la pulsation ω.

b) Appliquer la méthode de résolution de l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique.

c) Utiliser le passage d'une forme des solutions à l'autre.

e) Utiliser les expressions de $x(t)$, $\dot{x}(t)$ et $\ddot{x}(t)$ en appliquant l'équation différentielle pour obtenir cette dernière expression pour $t = 1{,}0$ s.

1.8

b) Utiliser la méthode de résolution de l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique.

c) Expliciter la vitesse par dérivation $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ puis expliciter $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$ pour déterminer les constantes d'intégration.

d) Expliciter à partir des expressions précédentes $Ec = \frac{1}{2}k\dot{x}^2$ et $Ep = \frac{1}{2}kx^2$.

e) Calculer $Em = Ec + Ep$ et utiliser $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ pour toute valeur de α.

1.9

a) Reconnaître la forme de l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique et identifier la pulsation. Utiliser ensuite la relation entre la période T et la fréquence f.

b) La période correspond à l'écart entre deux maxima successifs et l'amplitude à la valeur du maximum si le signal admet zéro pour valeur moyenne tandis que la phase à l'origine φ désigne l'écart entre la valeur du signal à l'instant initial et le maximum.

c) Idem.

1.10

Rechercher la dimension de la constante de raideur en explicitant l'expression de la force de rappel d'un ressort et déterminer la dimension d'une force grâce à l'expression du principe fondamental de la dynamique et à la dimension de l'accélération.

Corrigés des exercices

1.1

L'intervalle de temps entre deux phénomènes identiques se répétant régulièrement dans le temps est appelé **période**. Ici on a donc une période $T = 0,40$ s.

La relation $f = \dfrac{1}{T}$ donne la fréquence $f = 2,5$ Hz.

De même, pour la pulsation $\omega = 2\pi f$ soit $\omega = 16$ rad.s^{-1}.

1.2

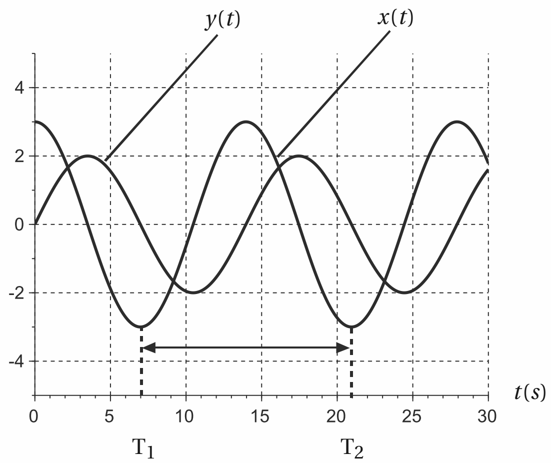
a) La période du signal est l'inverse de la fréquence, ce qui se traduit par la relation $T = \dfrac{1}{f}$. Les données numériques conduisent à une période $T = 2,27$ ms. Sur l'écran, les 10 carreaux correspondent à $4,4T$, ce qui conduit à un calibre de $\dfrac{4,4T}{10} = 1,0$ ms.

b) La durée de l'écran correspond à $\tau = 10$ ms donc la durée d'une période est $T' = \dfrac{\tau}{6,5}$. Comme à la question précédente, on a $T = \dfrac{1}{f}$ donc $f = \dfrac{6,5}{\tau} = 650$ Hz.

c) La durée de l'écran étant de 5,0 ms correspond à 3T donc la période ou durée d'une vibration est $T = \dfrac{5,0}{3} = 1,67$ ms. La relation entre période et fréquence permet alors d'en déduire la fréquence $f = \dfrac{1}{T} = 600$ Hz.

1.3

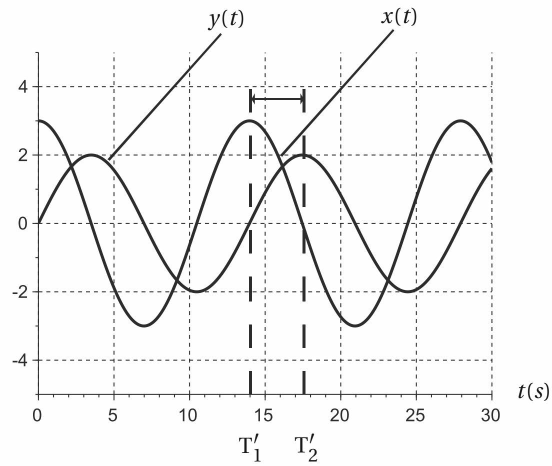
a) Pour déterminer la fréquence, on mesure la période en calculant l'écart d'abscisses entre deux minima successifs par exemple.



Ici on lit $T_1 = 7,0$ s et $T_2 = 21$ s donc on obtient une période $T = T_2 - T_1 = 14$ s et une fréquence $f = \dfrac{1}{T} = 71$ mHz.

b) Le signal x passe par son maximum avant que ce ne soit le cas pour le signal y donc x est en avance sur y.

c) Les maxima de x et de y sont séparés d'un intervalle de temps $\Delta t = T'_2 - T'_1$ avec $T'_1 = 14$ s et $T'_2 = 17,5$ s donc $\Delta t = 3,5$ s, ce qui correspond à $0,25T$.



Par conséquent, on a un déphasage $\varphi = 2\pi \dfrac{\Delta t}{T} = \dfrac{\pi}{2}$.

1.4

Dans le premier cas, on voit que le signal $x_2(t)$ est en retard sur le signal $x_1(t)$ soit un déphasage $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 < 0$ puisque $x_2(t)$ atteint son maximum en $t_2 = 5,5$ s alors que le maximum le plus proche de $x_1(t)$ est obtenu à l'instant $t_1 = 4,8$ s. On a donc un écart temporel $\Delta t = 0,70$ s entre les deux maxima pour une période $T = 5,5 - 1,5 = 4,0$ s. On en déduit le déphasage correspondant $\varphi = -2\pi \dfrac{\Delta t}{T} = -1,1$ rad.

Dans le second cas, les courbes sont décalées dans le temps de $\Delta t = \dfrac{T}{2}$ soit un déphasage $\varphi = 2\pi \dfrac{\Delta t}{T} = \pi = 3,1$ rad. On dit qu'elles sont en opposition de phase.

1.5

a) L'amplitude qui est la valeur maximale du signal se lit graphiquement : on trouve $X_1 = 1,0$ cm et $X_2 = 0,60$ cm. On peut lire la période en prenant l'écart temporel entre deux maxima consécutifs d'une même courbe. En considérant la courbe $x_1(t)$, on lit $T = 10,5 - 4,5 = 6,0$ s.

b) La pulsation s'en déduit par $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1{,}0\ \text{rad.s}^{-1}$ ainsi que la fréquence $f = \frac{1}{T} = 0{,}17$ Hz.

c) En considérant les deux maxima consécutifs de $x_2(t)$ et $x_1(t)$ situés à $t_A = 3{,}0$ s pour $x_2(t)$ et $t_B = 4{,}5$ s pour $x_1(t)$, on constate que $x_2(t)$ passe par un maximum avant $x_1(t)$ donc que $x_2(t)$ est en avance sur $x_1(t)$ d'une durée $\Delta t = t_B - t_A = 1{,}5$ s. On en déduit donc $\varphi_2 - \varphi_1 > 0$ *via* ce raisonnement.

d) Le déphasage s'écrit $\varphi = 2\pi\frac{\Delta t}{T} = \frac{\pi}{2}$ qui est bien dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.

e) Le premier maximum de la courbe $x_1(t)$ est en retard d'une durée $\Delta t' = 4{,}5$ s par rapport à l'origine. La phase à l'origine est donc négative et vaut $\varphi_1 = -2\pi\frac{\Delta t'}{T} = -\frac{3\pi}{2}$. Comme la phase est définie à 2π près, on peut aussi dire que la phase à l'origine vaut $\varphi_1 = -\frac{3\pi}{2} + 2\pi = \frac{\pi}{2}$ et que le signal $x_1(t)$ est en avance (cela reviendrait à considérer le maximum arrivant juste avant l'instant initial $t = 0$ qui n'est pas représenté sur le graphe).

Comme on veut $\varphi_1 \in\,]-\pi\,;\pi]$, on conserve $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$.

f) On procède de même pour le signal $x_2(t)$ qui est en retard d'une durée $\Delta t' = 3{,}0$ s par rapport à l'origine. La phase à l'origine est donc négative et vaut $\varphi_2 = -2\pi\frac{\Delta t'}{T} = -\pi$. Comme on veut $\varphi_2 \in\,]-\pi\,;\pi]$, on garde $\varphi_2 = -\pi + 2\pi = \pi$.

g) On retrouve bien $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

1.6

a) On lit sur le graphe les valeurs maximales en ordonnée $X_1 = 3{,}0$ cm et $X_2 = 4{,}0$ cm. La période T se lit en regardant par exemple l'écart temporel entre deux maxima consécutifs de $x_1(t)$ soit $T = 10 - 2{,}0 = 8{,}0$ s.

b) Sachant que $x_1(t) = X_1\cos(\omega t + 0)$ et $x_2(t) = X_2\sin(\omega t)$ ou $x_2(t) = X_2\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$, on en déduit

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\pi}{2} - 0 = -\frac{\pi}{2}$$

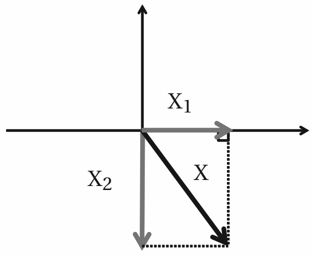
c) On développe $x(t) = X\cos(\omega t + \varphi)$ soit

$$x(t) = X\cos(\omega t)\cos\varphi - X\sin(\omega t)\sin\varphi$$

D'autre part, on a $x(t) = X_1\cos(\omega t) + X_2\sin(\omega t)$ d'où par identification $X_1 = X\cos\varphi$ et $X_2 = -X\sin\varphi$.
On a donc $X_1^2 + X_2^2 = X^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = X^2$ soit

$$X = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} = 5{,}0 \text{ cm}$$

d) Sachant que $x_1(t) = X_1\cos(\omega t)$ et $x_2(t) = X_2\sin(\omega t)$ ou $x_2(t) = X_2\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$, on a le schéma suivant :



En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OAB par exemple, on retrouve bien $X_1^2 + X_2^2 = X^2$.

e) On vérifie bien que $X = 5{,}0$ cm.
Le premier maximum en retard de la courbe $x(t)$ est obtenu après une durée $\Delta t' \approx 0{,}80$ s par rapport à l'origine. La phase à l'origine est donc négative et vaut $\varphi = -2\pi\frac{\Delta t'}{T}$ ou numériquement $-0{,}60$ rad.

1.7

a) L'équation différentielle est du type $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ soit une pulsation $\omega = \sqrt{3} = 1{,}7\ \text{rad.s}^{-1}$.
On a donc $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} = 3{,}6$ s.

b) On cherche une solution sous la forme

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

soit en tenant compte de la valeur obtenue de la pulsation $x(t) = A\cos\left(\sqrt{3}t\right) + B\sin\left(\sqrt{3}t\right)$.
Sachant que $x(0) = A$, on trouve $A = 2{,}0$ cm.
Pour trouver B, on calcule la dérivée de $x(t)$ soit

$$\dot{x}(t) = -A\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}t\right) + B\sqrt{3}\cos\left(\sqrt{3}t\right)$$

On a donc $\dot{x}(0) = B\sqrt{3}$ soit $B = -\frac{6{,}0}{\sqrt{3}} = -3{,}5$ cm.

On trouve donc $x(t) = 2{,}0\cos\left(\sqrt{3}t\right) - \frac{6{,}0}{\sqrt{3}}\sin\left(\sqrt{3}t\right)$ soit numériquement $x(t) = 2{,}0\cos(1{,}7t) - 3{,}5\sin(1{,}7t)$.

i) On développe $x(t) = X\cos(\omega t + \varphi)$, ce qui donne $x(t) = X\cos(\omega t)\cos\varphi - X\sin(\omega t)\sin\varphi$. D'autre part, on a $x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$. On en déduit par identification $A = X\cos\varphi$ et $B = -X\sin\varphi$.

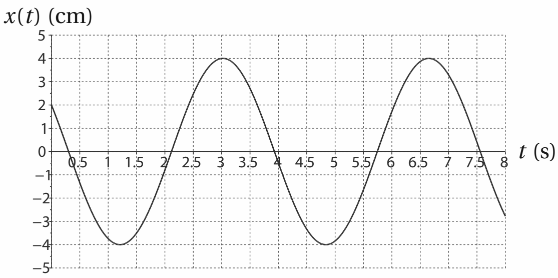
ii) On a donc $A^2 + B^2 = X^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = X^2$ dont on déduit $X = \sqrt{A^2 + B^2}$. L'amplitude X du mouvement vaut $X = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{2{,}0^2 + \left(-\frac{6}{\sqrt{3}}\right)^2} = 4{,}0$ cm.

iii) Pour trouver la phase à l'origine, on utilise le fait que $\cos\varphi = \frac{A}{X} = \frac{1}{2}$ et $\sin\varphi = -\frac{B}{X} = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. On en déduit $\varphi = \frac{\pi}{3} = 1{,}0$ rad.s^{-1}.

iv) On en déduit une autre forme de $x(t)$ à savoir

$$x(t) = 4\cos\left(\sqrt{3}t + \frac{\pi}{3}\right) = 4\cos(1{,}7t + 1{,}0)$$

c) L'allure est une sinusoïde partant de $0 < x(0) < X$ avec une tangente à l'origine de pente $\dot{x}(0) < 0$ donc une allure décroissante en $t = 0{,}0$ s. On obtient alors le graphe :



d) On prend $x(t) = 4\cos\left(\sqrt{3}t + \frac{\pi}{3}\right)$ et on l'évalue en $t = 1{,}0$ s soit $x(1{,}0) = -3{,}7$ cm.

On a par dérivation $\dot{x}(t) = -4\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}t + \frac{\pi}{3}\right)$.

On l'évalue pour $t = 1{,}0$ s soit $\dot{x}(1{,}0) = -2{,}5$ cm.s^{-1}.

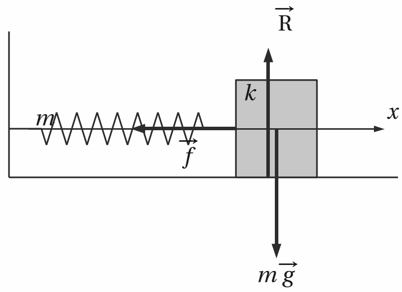
Enfin l'équation différentielle donnant $\ddot{x} = -3x$, on en déduit $\ddot{x}(1{,}0) = -3x(1) = 11{,}2$ cm.s^{-2}.

On peut noter ici l'intérêt de n'effectuer les applications numériques qu'à la fin.

En effet, si on utilise l'expression approchée intermédiaire, on trouve $x(1{,}0) = -3{,}6$ cm ; $\dot{x}(1{,}0) = -3{,}0$ cm.s^{-1} et $\ddot{x}(1{,}0) = 11{,}1$ cm.s^{-2}. Force est de constater des écarts relativement significatifs.

1.8

a) La force exercée par le ressort sur la masse peut s'écrire $\vec{f} = -kx\vec{u}_{\rightarrow\text{ext}}$ en notant x l'allongement, k la constante de raideur du ressort et $\vec{u}_{\rightarrow\text{ext}}$ le vecteur unitaire dirigé vers l'extérieur du ressort.



b) On étudie le système constitué de la masse m dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Il est soumis à son poids $m\vec{g}$, à la force de rappel du ressort $\vec{f}$ explicitée à la question précédente et à la réaction $\vec{R}$ du support normale à ce dernier du fait de l'absence de frottement. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{f} + \vec{R}$. Le poids et la réaction du support étant perpendiculaires au déplacement, ces forces n'interviennent pas dans la projection du principe fondamental sur l'horizontale. On obtient donc $m\ddot{x} = -kx$ ou encore $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$. On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

c) La solution de cette équation peut s'écrire sous la forme $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$.

Par dérivation par rapport au temps t de $x(t)$, on obtient l'expression de la vitesse sous la forme

$$\dot{x}(t) = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t)$$

Les conditions initiales se traduisent par $x(0) = x_0$ soit $A = x_0$ d'une part et $\dot{x}(0) = 0$ soit $B\omega_0 = 0$ d'où $B = 0$.

Finalement on a $x(t) = x_0\cos(\omega_0 t)$.

A noter qu'on pourrait aussi utiliser *a priori* l'autre forme de la solution $x(t) = X\cos(\omega_0 t + \varphi)$ dont la dérivée s'écrit $\dot{x}(t) = -X\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi)$. La traduction des conditions initiales donne $x(0) = X\cos\varphi = x_0$ et $\dot{x}(0) = -X\sin\varphi = 0$ soit $\sin\varphi = 0$ ou $\varphi = 0$ et $X = x_0$. On retrouve la même expression, ce qui est rassurant.

d) L'énergie cinétique vaut $Ec = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$.

Or $\dot{x}(t) = -\omega_0 x_0\sin(\omega_0 t)$ donc

$$Ec = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_0^2\sin^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2}kx_0^2\sin^2(\omega_0 t)$$

en utilisant l'expression de la pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ou encore $k = m\omega_0^2$.

L'énergie potentielle s'écrit $\mathrm{E}p = \frac{1}{2}kx^2$ qui s'explicite en $\mathrm{E}p = \frac{1}{2}kx_0^2\cos^2(\omega_0 t)$.

e) L'énergie mécanique $\mathrm{E}m = \mathrm{E}c + \mathrm{E}p$ admet alors pour expression $\mathrm{E}m = \frac{1}{2}kx_0^2\left(\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)\right) = \frac{1}{2}kx_0^2$ en utilisant le fait que $\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t) = 1$. On obtient donc une expression indépendante du temps t, ce qui justifie que l'énergie mécanique est constante au cours du mouvement.

1.9

a) L'équation d'un oscillateur harmonique est de la forme $\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$ donc par identification avec la formule proposée, on en déduit $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ et $\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{1}{f}$.

b) *i)* On lit que trois périodes correspondent à 4,8 s soit $\mathrm{T} = \frac{4{,}8}{3} = 1{,}6$ s. On en déduit $l = g\frac{\mathrm{T}^2}{4\pi^2} = 0{,}64$ m.

ii) Le signal atteint son maximum pour $\theta_m = 30°$ et le maximum est atteint en $t = 0{,}0$ s donc la phase à l'origine vaut $\varphi = 0$.

iii) On en déduit $\theta(t) = \theta_m\cos(\omega t + \varphi) = 30\cos(3{,}9t)$ puisque $\omega = \frac{2\pi}{\mathrm{T}}$.

iv) Ici $\theta(0) = \theta_m = 30°$ et cela correspond à un maximum, ce qui implique une dérivée nulle en $t = 0{,}0$ s donc $\dot{\theta}(0) = 0{,}0°.\mathrm{s}^{-1}$.

Comme $\ddot{\theta} = -\omega^2\theta$, on trouve

$$\ddot{\theta}(0) = -3{,}9^2\theta(0) = -4{,}6.10^{2°}.\mathrm{s}^{-2}$$

c) *i)* On a toujours $\theta_m = 30°$ mais le signal $\theta(t)$ présente cette fois un retard (soit $\varphi < 0$) associé à un écart temporel $\Delta t = 0{,}20$ s puisque son maximum survient cette fois-ci à $t = 0{,}20$ s. On en déduit $\varphi = -2\pi\frac{\Delta t}{\mathrm{T}}$ soit approximativement $-\frac{\pi}{4}$.

On a alors $\theta(t) = \theta_m\cos(\omega t + \varphi) = 30\cos(3{,}9t - 0{,}57)$.

ii) On en déduit $\theta(0) = 30\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 21°$ d'une part et $\dot{\theta}(0) = -1{,}2.10^2\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 83°.\mathrm{s}^{-1}$ d'autre part. Le calcul de la dérivée de $\theta(t)$ donne $\dot{\theta}(t) = \theta_m\omega\cos(\omega t + \varphi)$ soit numériquement $\dot{\theta}(t) = -1{,}2.10^2\sin(3{,}9t - 0{,}57)$.

iii) Graphiquement on lit bien $\theta(0) \approx 21°$ et $\dot{\theta}(0) > 0$ puisque la pente est croissante en $t = 0$. La valeur de $\dot{\theta}(0)$ pourrait être trouvée en calculant la pente de la tangente à la courbe $\theta(t)$ en $t = 0{,}0$ s.

1.10

a) La force de rappel d'un ressort peut s'écrire sous la forme $\vec{f} = -kx\vec{u}_{\rightarrow\mathrm{ext}}$. La dimension de la raideur du ressort est donc le rapport d'une force par une distance. Pour expliciter la dimension de la force, on utilise la relation du principe fondamental de la dynamique $m\vec{a} = \sum_i \vec{f_i}$ où m est la masse, $\vec{a}$ l'accélération soit dimensionnellement le rapport d'une longueur par un temps au carré et $\vec{f_i}$ les forces qui s'appliquent sur le système. On a finalement

$$[k] = \frac{[\mathrm{F}]}{[\mathrm{L}]} = \frac{[\mathrm{M}]\,[\mathrm{L}]}{[\mathrm{L}]\,[\mathrm{T}]^2} = [\mathrm{M}]\,[\mathrm{T}]^{-2}$$

Par ailleurs, la période est un temps donc pour obtenir un temps avec la constante de raideur et une masse, il suffit de prendre la racine carrée du rapport de la masse par la constante de raideur soit $[\mathrm{T}] = \sqrt{\frac{[\mathrm{M}]}{[k]}}$.

L'expression de la période est par conséquent $\mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

On peut remarquer que l'analyse dimensionnelle permet de choisir entre les deux relations proposées mais qu'elle ne peut en aucun cas fournir le coefficient ici 2π.

b) En appliquant la relation retenue à la question précédente, on obtient $\mathrm{T} = 0{,}63$ s en effectuant l'application numérique.

CHAPITRE 2

Circuits linéaires en régime continu

Thèmes abordés dans les exercices

- Approximation des régimes quasistationnaires ARQS.
- Lois de Kirchhoff : loi des nœuds et loi des mailles.
- Conventions générateur et récepteur.
- Puissance dissipée par effet Joule dans une résistance.
- Modèle de Thévenin d'une source.
- Association de résistances en série et en parallèle.
- Ponts diviseurs de tension et de courant.
- Caractéristique d'un dipôle.
- Point de fonctionnement.
- Influence de la résistance d'entrée d'un appareil de mesure et de la résistance interne d'une source.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Connaître les ordres de grandeur des intensités et des tensions.
- Utiliser des grandeurs algébriques.
- Déterminer une résistance équivalente.
- Déterminer les grandeurs électriques d'un circuit avec les lois de Kirchhoff ou les ponts diviseurs.
- Analyser la caractéristique d'un dipôle.
- Déterminer un point de fonctionnement.

Les méthodes à retenir

Valider l'approximation des régimes quasistationnaires (ARQS).

L'approximation des régimes quasistationnaires consiste à négliger les phénomènes de propagation pour pouvoir appliquer les lois du régime continu aux régimes variables. Il faut comparer le temps caractéristique de propagation τ au temps caractéristique du signal à savoir la période T pour un signal périodique et vérifier que $\tau \ll T$ ou en termes de fréquences $\tau \ll \frac{1}{f}$. Les signaux électriques étant des signaux électromagnétiques se propagent à la vitesse de la lumière c, la condition peut aussi s'écrire $L \ll cT$ où L est la distance caractéristique de propagation.

Exemple :

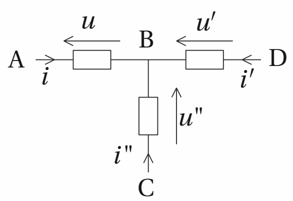
Les signaux électriques se propageant à la vitesse de la lumière $c = 3{,}0.10^8$ m.s^{-1}, le temps de propagation τ pour un circuit de dimension $\ell = 20$ cm est $\tau = \frac{\ell}{c} = 0{,}67$ ns. La période d'un signal de fréquence $f = 100$ MHz est $T = \frac{1}{f}$ soit 10 ns. $\tau \ll T$ donc on peut négliger le temps de propagation par rapport au temps caractéristique du signal et appliquer l'approximation des régimes quasistationnaires.

$\hookrightarrow$ **Exercice 2.1.**

Utiliser des grandeurs électriques algébriques.

Les grandeurs électriques que ce soient les intensités ou les tensions sont des grandeurs algébriques. On fixe arbitrairement une orientation à ces grandeurs. Si la valeur obtenue de la grandeur est positive, la grandeur est effectivement orientée dans le sens choisi. Si elle est négative, l'orientation réelle de la grandeur est opposée à celle choisie.

Exemple :



Si $i = 4{,}0$ A, l'orientation arbitrairement choisie sur le schéma correspond au sens réel de l'intensité. De même, si $i' = -2{,}0$ A donc l'orientation arbitrairement choisie sur le schéma est opposée au sens réel de l'intensité.

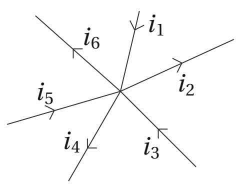
Si la tension (ou différence de potentiels) $u = V_A - V_B = 10$ V, l'orientation arbitrairement choisie sur le schéma correspond au sens réel de la tension, le potentiel V_A en A est plus grand que V_B celui en B. Si $u" = V_B - V_C = -5,0$ V, l'orientation arbitrairement choisie sur le schéma est opposée au sens réel de la tension, le potentiel V_B en B est plus faible que V_C celui en C.

$\hookrightarrow$ **Exercices 2.2, 2.9, 2.11, 2.16.**

Utiliser la loi des nœuds.

La loi des nœuds s'écrit $\sum_k i_k = 0$ où les courants i_k arrivent au nœud considéré. Si l'orientation choisie donne un courant partant du nœud, il convient d'ajouter un signe "-" pour respecter le caractère algébrique de l'intensité.

Exemple :



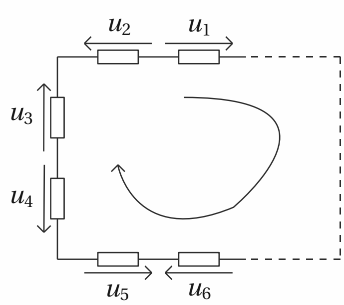
La loi des nœuds s'écrit : $-i_1 + i_2 - i_3 + i_4 - i_5 + i_6 = 0$.

$\hookrightarrow$ **Exercices 2.3, 2.4, 2.7, 2.10, 2.11, 2.13, 2.16.**

Utiliser la loi des mailles.

La loi des mailles s'écrit $\sum_k u_k = 0$ où les tensions u_k sont dans le sens arbitrairement choisi sur la maille. Si l'orientation choisie pour définir les tensions est opposée, il convient d'ajouter un signe "-" pour respecter le caractère algébrique de la tension.

Exemple :

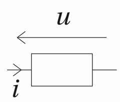


La loi des mailles s'écrit $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 - u_5 + u_6 = 0$.

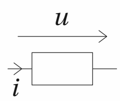
$\hookrightarrow$ **Exercices 2.5, 2.7, 2.10, 2.11, 2.16.**

Utiliser les conventions générateur ou récepteur.

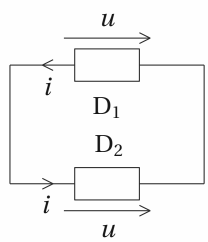
⋆ convention récepteur : les sens choisis par convention pour l'intensité i et la tension u sont opposés,



⋆ convention générateur : les sens choisis par convention pour l'intensité i et la tension u sont les mêmes.



Exemple :



Pour le dipôle D_1, u et i sont orientées dans des sens opposés : il est en convention récepteur. A l'inverse, u et i sont dans le même sens pour le dipôle D_2 qui est donc en convention générateur.

En supposant que le dipôle D_1 est une résistance R, la relation entre u et i s'écrit $u = Ri$. De même, si le dipôle D_2 est une résistance R, on a $u = -Ri$.

$\hookrightarrow$ **Exercices 2.4, 2.5, 2.6, 2.8, 2.9, 2.10, 2.11, 2.12, 2.13, 2.16.**

Connaître les ordres de grandeur des intensités et des tensions.

- installation électrique domestique : fusible 16 A pour les prises électriques de courant, fusible 32 A pour un four ou des plaques électriques, 5 A pour un chauffage électrique de 1000 W ou entre 0,1 et 0,7 A pour des ampoules,
- électronique des circuits intégrés de 10^{-12} A à l'entrée à 20 mA en sortie, 2 μA pour une montre à quartz par exemple,
- 500 A en régime de croisière avec des pointes à 1000 A pour l'alimentation d'un T.G.V., 1000 A pour les lignes de distribution électrique hautes tensions, 100 kA pour un électrolyseur à aluminium ou 5 kA pour la dynamo d'une centrale.

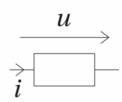
Exprimer la puissance dissipée par effet Joule dans une résistance.

Convention récepteur	Convention générateur
puissance reçue $P(t) = u(t)\ i(t)$	puissance reçue $P(t) = -u(t)\ i(t)$
puissance cédée $P(t) = -u(t)\ i(t)$	puissance cédée $P(t) = u(t)\ i(t)$

Pour une résistance en convention récepteur $u(t) = Ri(t)$ donc la puissance reçue en convention récepteur peut s'écrire

$$P = Ri^2(t) = \frac{u^2(t)}{R}$$

Exemple :

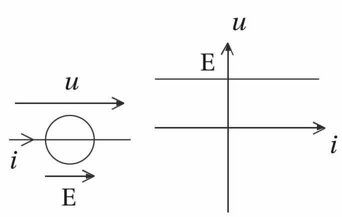


> Sachant que $u = 6{,}0$ V et $i = 2{,}0$ A, la puissance reçue s'écrit en convention générateur (utilisée ici) : $\mathscr{P} = -ui = -12$ W. Comme la puissance reçue est négative, elle est en pratique fournie.

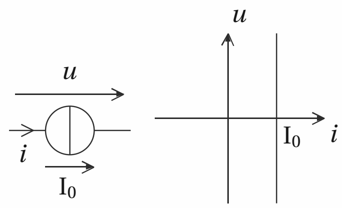
↪ **Exercices 2.6, 2.8, 2.11, 2.12, 2.13.**

Modéliser une source idéale de tension ou de courant ou une source réelle.

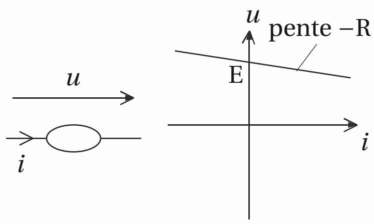
Une source de tension est telle que la tension à ses bornes est constante quelle que soit l'intensité du courant qui la traverse. Sa représentation et sa caractéristique sont les suivantes :



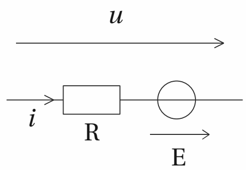
Une source de courant est telle que l'intensité du courant qui la traverse est constante quelle que soit la tension à ses bornes. Sa représentation et sa caractéristique sont les suivantes :



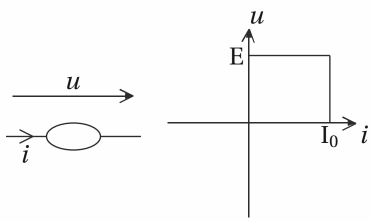
La caractéristique d'une source réelle est la suivante :



et a pour équation $u = \mathrm{E} - \mathrm{R}i$. On peut la modéliser par l'association en série d'une source idéale de tension de force électromotrice E et d'une résistance R. C'est le modèle de Thévenin.



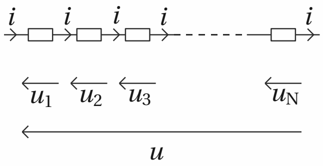
Exemple :



> Pour la partie de caractéristique pour laquelle $i = \mathrm{I}_0$, la source peut être modélisée par une source idéale de courant. Pour la partie de caractéristique pour laquelle $u = \mathrm{E}$, la modélisation est celle d'une source idéale de tension.

↪ **Exercice 2.12.**

Déterminer la résistance équivalente à une association en série.



Une même intensité $i_1 = i_2 = \ldots = i_N$ traverse les N résistances et les tensions u_k s'ajoutent $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u$ soit avec la loi d'Ohm qui s'écrit $u_k = R_k i_k$ la résistance équivalente

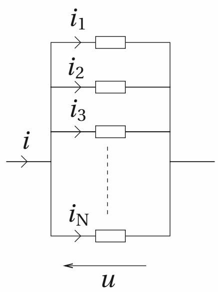
$$R = R_1 + R_2 + \ldots + R_N = \sum_{k=1}^{N} R_k$$

Exemple :

> L'association en série de deux résistances R_1 et R_2 est équivalente à une résistance de valeur $R_e = R_1 + R_2$.

⟶ **Exercices 2.2, 2.8.**

Déterminer la résistance équivalente à une association en parallèle.



La tension aux bornes des résistances est la même $u_1 = u_2 = \ldots = u_N$ pour toutes les résistances et les intensités les traversant s'ajoutent $i_1 + i_2 + \ldots + i_N = i$ soit avec la relation $u_k = R_k i_k$ la résistance équivalente R telle que

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_N} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{R_k}$$

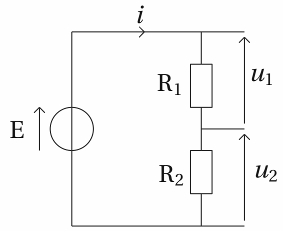
Exemple :

> L'association en parallèle de deux résistances R_1 et R_2 est équivalente à une résistance telle que $\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ soit $R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

⟶ **Exercices 2.2, 2.8, 2.8.**

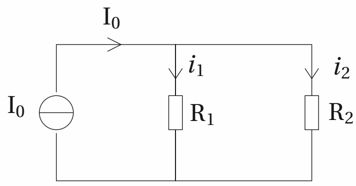
Utiliser un pont diviseur de tension ou de courant.

⋆ un pont diviseur de tension correspond à l'association en série de deux résistances et on cherche la tension aux bornes de l'une d'elles :



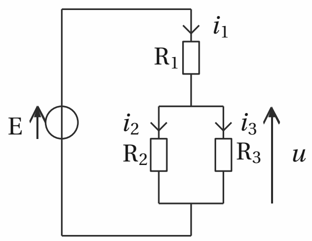
$$u_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} E$$

⋆ un pont diviseur de courant correspond à l'association en parallèle de deux résistances et on cherche l'intensité du courant qui traverse l'une d'elles :



$$i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I_0$$

Exemple :



On reconnaît sur le montage ci-dessus un pont diviseur de tension qui permet d'obtenir $u = \frac{R'R_1}{R' + R_1}$ avec $R' = \frac{R_2R_3}{R_2 + R_3}$ par l'association en parallèle de R_2 et R_3. On identifie également un pont diviseur de courant $i_2 = \frac{R_3 i_1}{R_2 + R_3}$.

↪ **Exercices 2.8, 2.9, 2.10, 2.13, 2.15, 2.17, 2.18.**