

# **Mathématiques**

## **exercices incontournables**



*l'intègre*

**EXERCICES  
INCONTOURNABLES**

**ECS 1<sup>re</sup> année**

---

V. ROUSSE

R. PÉREYROL

M. DEL HIERRO

N. BLANC

# **Mathématiques**

## **exercices incontournables**

DUNOD

## Conception et création de couverture : Atelier 3+

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1<sup>er</sup> juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du

Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 2015

5 rue Laromiguière, 75005 Paris

[www.dunod.com](http://www.dunod.com)

ISBN 978-2-10-071228-1

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2<sup>o</sup> et 3<sup>o</sup> a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

# Table des matières

## Algèbre

1	Calcul algébrique	9
2	Nombres complexes et polynômes	29
3	Calcul matriciel	59
4	Systèmes linéaires et matrices	93
5	Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels	113
6	Applications linéaires et matrices	169

## Analyse

7	Nombres réels et suites réelles	245
8	Étude locale et globale des fonctions	265
9	Séries	305
10	Intégration des fonctions d'une variable réelle	337
11	Formules de Taylor et développements limités	379

## Probabilités

12	Dénombrement	407
13	Espaces probabilisés	423
14	Variations aléatoires discrètes	449
15	Variations aléatoires à densité	485
16	Convergence en probabilité et en loi	503





# Avant-propos


Cet ouvrage s'adresse aux étudiants de première année E.C.S. de classes préparatoires économiques. Il leur propose de mettre en pratique les notions abordées en cours de mathématiques et d'algorithmique par le biais d'exercices. Chacun est suivi d'une correction détaillée et commentée dans laquelle l'accent est mis sur la méthode qui mène à la solution.

Le livre est divisé en trois parties et seize chapitres, consacrés chacun à une partie du programme avec respect de la séparation en deux semestres. Au sein d'un même chapitre, les exercices ont été choisis de façon à passer en revue toutes les capacités attendues autour des notions à connaître. Ces capacités sont listées à la fin de chaque chapitre avec un renvoi explicite aux questions et exercices dans lesquels elles sont utilisées. Les principales formules sont également rappelées au sein de chaque capacité. En ce qui concerne les corrections, nous avons choisi de séparer clairement :

- la réflexion préliminaire, comprenant analyse du problème et tâtonnements au brouillon (nous nous sommes autorisés une plus grande liberté dans la façon de formuler les idées et le sens profond de certaines notions parfois au mépris d'une certaine rigueur mathématique mais toujours dans un souci pédagogique),
- de la rédaction finale, rigoureuse et précise.

Cette dernière étape est signalée dans le texte par la présence d'un liseré gris sur la



gauche et d'un . Bien évidemment, il n'est nullement question de prétendre, ici, à l'unique cheminement logique, ou encore à la seule rédaction acceptable.

Par ailleurs, nous avons souhaité mettre en exergue les idées réutilisables en les rédi-

geant sur un fond grisé et indiqué par un . De même, la présence d'une difficulté

courante est signalée par un .

L'index présent en fin d'ouvrage fournit des renvois aux principales notions aussi bien vers la liste de capacités du chapitre dont elles dépendent que vers leurs utilisations explicites dans d'autres chapitres.

Enfin, comme l'usage le veut, l'expression « si et seulement si » sera parfois abrégée en « ssi » et on écrira « resp. » comme abréviation de « respectivement ».

Chaque exercice est référencé selon le codage CHAP.EXO où CHAP est le numéro du chapitre et EXO le numéro de l'exercice. De même chaque question d'un exercice est référencée selon le codage CHAP.EXO.Q.SQ, voire Q.SQ, où Q est le numéro de question et SQ la sous-question.





# Partie 1

## Algèbre



# Algèbre

## 1 Calcul algébrique 9

### Semestre 1

1.1 : Techniques de sommation de base	9
1.2 : Séparation pairs/impairs	15
1.3 : Sommes télescopiques	16
1.4 : Formule du binôme et moments de la loi binomiale	18
1.5 : La somme des premiers cubes I	21
1.6 : La formule de Vandermonde	24
<b>Liste des capacités attendues</b>	27

## 2 Nombres complexes et polynômes 29

### Semestre 1

2.1 : Complexes de module 1	29
2.2 : Équations sur $\mathbb{C}$	31
2.3 : Racines 5-ièmes et constructibilité du pentagone	34
2.4 : Linéarisation et primitivation	35
2.5 : Système d'équations sur $\mathbb{C}$	36
2.6 : La somme des premiers cubes II	37
2.7 : Autour des polynômes de Tchebychev	41
2.8 : Division euclidienne et restes	45
2.9 : Polynômes interpolateurs de Lagrange	46
2.10 : Relation entre racines et coefficients	48
2.11 : Autour des racines $n$ -ièmes de l'unité	49
2.12 : Divisibilité et ordre de multiplicité des racines	52
<b>Liste des capacités attendues</b>	57

## 3 Calcul matriciel 59

### Semestre 1

3.1 : Polynômes de matrice et inversibilité	60
3.2 : Puissances de matrice I	62
3.3 : Modèle de Leslie I	66
3.4 : Théorème de Cayley-Hamilton pour les matrices $2 \times 2$	70
3.5 : Produit scalaire, symétrie et antisymétrie	74
3.6 : Matrices de permutation	76

3.7 : Opérations élémentaires et produit matriciel	79
3.8 : Polynôme annulateur de matrice	87
<b>Liste des capacités attendues</b>	91
<b>4 Systèmes linéaires et matrices</b>	<b>93</b>
<b>Semestre 1</b>	
4.1 : Systèmes rectangulaires et carrés	93
4.2 : Inversion matricielle et systèmes	95
4.3 : Systèmes à paramètres I	96
4.4 : Systèmes à paramètres II	98
4.5 : Systèmes et déterminant	100
4.6 : Résolution de systèmes par Scilab	103
4.7 : Méthode de Gauss-Jordan	108
<b>Liste des capacités attendues</b>	112
<b>5 Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels</b>	<b>113</b>
<b>Semestre 1</b>	
5.1 : Sous-espaces de $\mathbb{R}^5$	114
5.2 : Équations cartésiennes et paramétrisation	122
5.3 : Espace de suites	125
5.4 : Famille de polynômes	129
5.5 : Famille échelonnée et famille de puissances	132
5.6 : Manifestement libre	139
5.7 : Familles extrémales	141
5.8 : Image et noyau d'une matrice	145
<b>Semestre 2</b>	
5.9 : Espace de suites linéairement récurrentes	148
5.10 : Carrés magiques	154
5.11 : Dimensions et espaces	160
5.12 : Analyse harmonique	163
<b>Liste des capacités attendues</b>	167
<b>6 Applications linéaires et matrices</b>	<b>169</b>
<b>Semestre 2</b>	
6.1 : Applications coordonnées	169
6.2 : Projecteurs et symétries I	172

6.3 : Projecteurs et symétries II	178
6.4 : Matrice=Application Linéaire	181
6.5 : $\text{rg}(A) = \text{rg}({}^tA)$	186
6.6 : Diagonale en toute base	192
6.7 : Image et noyau par pivot de Gauss	194
6.8 : Matrice de Vandermonde et polynômes de Lagrange	198
6.9 : Polynôme annulateur et réduction	204
6.10 : Commutant d'une matrice carrée	208
6.11 : Commutant d'un endomorphisme cyclique	212
6.12 : Matrices à paramètre et de Vandermonde	217
6.13 : AB donne BA	220
6.14 : Inversion de Pascal	223
6.15 : Formes linéaires de $\mathbb{K}^n$	226
6.16 : Hyperplans	232
<b>Liste des capacités attendues</b>	<b>237</b>



## Calcul algébrique

On rappelle le vocabulaire élémentaire associé aux sommes  $\sum_{k \in I} u_k$  et aux produits

$\prod_{k \in I} u_k$  des éléments d'une famille finie de réels (ou complexes)  $(u_k)_{k \in I}$  :

- $k$  est l'*indice* de la somme ou du produit,
- $u_k$  est le *terme général* de la somme ou du produit.

Lorsque  $I$  est vide on pose, par convention,  $\sum_{k \in I} u_k = 0$  (resp.  $\prod_{k \in I} u_k = 1$ ). Dans le cas

particulier où  $I = \llbracket m, n \rrbracket$ , on note  $\sum_{k=m}^n u_k$  la somme et  $\prod_{k=m}^n u_k$  le produit.  $m$  et  $n$  sont appelés les *bornes* respectivement *inférieure* et *supérieure* de la somme ou du produit.

### Exercice 1.1 : Techniques de sommation de base

1. Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de raison  $r$  ( $r \neq 0$ ) et de premier terme  $u_0$ .

Calculer  $\sum_{k=m}^n u_k$ .

2. Soit  $(u_n)$  une suite géométrique de raison  $q$  ( $q \neq 1$ ) et de premier terme  $u_0$ .

Calculer  $\sum_{k=m}^n u_k$  et  $\prod_{k=m}^n u_k$ .

3. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\prod_{k=1}^n (2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$ .

Écrire une fonction Scilab d'entête `function p=produit_impairs(n)` qui calcule le produit des  $n$  premiers entiers naturels impairs.

4. Calculer  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} |i-j|$  et  $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i}$ .

1. Il y a plusieurs façons naturelles de procéder :

- la suite est arithmétique donc son terme général s'écrit  $u_k = u_0 + kr$  et on est ainsi ramené à une somme d'entiers consécutifs ;



$$\begin{aligned}
 \sum_{k=m}^n u_k &= \sum_{k=m}^n (u_0 + kr) = u_0 \sum_{k=m}^n 1 + r \sum_{k=m}^n k \\
 &= u_0(n - m + 1) + r \left[ \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^{m-1} k \right] \\
 &= (n - m + 1)u_0 + r \left[ \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(m-1)m}{2} \right] \\
 &= (n - m + 1)u_0 + \frac{n^2 + n - m^2 + m}{2} r \\
 &= (n - m + 1)u_0 + \frac{(n+m)(n-m+1)}{2} r.
 \end{aligned}$$

- on peut alternativement utiliser l'expression  $u_k = u_m + (k - m)r$  pour se ramener directement à la somme des premiers entiers ;



$$\begin{aligned}
 \sum_{k=m}^n [u_m + (k - m)r] &= u_m \sum_{k=m}^n 1 + r \sum_{k=m}^n (k - m) \\
 &= u_m(n - m + 1) + r \sum_{k'=0}^{n-m} k' \\
 &\quad \text{(avec le changement d'indice } k' = k - m) \\
 &= (n - m + 1)u_m + r \frac{(n - m)(n - m + 1)}{2} \\
 &= (n - m + 1)(u_0 + mr) + r \frac{(n - m)(n - m + 1)}{2} \\
 &= (n - m + 1)u_0 + r \frac{(n + m)(n - m + 1)}{2}.
 \end{aligned}$$

- on peut encore utiliser la démarche du jeune Gauss\* en ajoutant la somme inconnue à elle-même mais en ordonnant les termes dans l'autre sens

$$\begin{array}{cccccccc}
 1 & + & 2 & + & \dots & + & k & + & \dots & + & n-1 & + & n \\
 n & + & n-1 & + & \dots & + & n+1-k & + & \dots & + & 2 & + & 1 \\
 \hline
 (n+1) & + & (n+1) & + & \dots & + & (n+1) & + & \dots & + & (n+1) & + & (n+1)
 \end{array}$$

ce qui lui a permis d'obtenir rapidement que  $2 \sum_{k=1}^{100} k = 100 \times (100 + 1)$ .

---

\*. Carl Friedrich Gauss (1777-1865), le *Prince des mathématiciens*, a ouvert la voie à de nombreux domaines des mathématiques. Il racontait lui-même cette anecdote pour construire sa légende.





Avec les changements d'indice  $k' = k - m$  et  $k'' = n - k$ , on a

$$\sum_{k=m}^n u_k + \sum_{k=m}^n u_k = \sum_{k'=0}^{n-m} u_{m+k'} + \sum_{k''=0}^{n-m} u_{n-k''} = \sum_{k=0}^{n-m} (u_{m+k} + u_{n-k}).$$

On remarque alors que  $u_{m+k} + u_{n-k} = u_m + kr + u_n - kr = u_m + u_n$  est indépendant de  $k$ , d'où

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n u_k &= (n - m + 1) \frac{u_m + u_n}{2} = (n - m + 1) \frac{u_0 + mr + u_0 + nr}{2} \\ &= (n - m + 1)u_0 + r \frac{(n - m + 1)(m + n)}{2}. \end{aligned}$$

**2.** Pour la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique, il y a encore plusieurs façons naturelles de procéder :

- la suite est géométrique donc son terme général s'écrit  $u_k = u_0 q^k$  et on est ainsi ramené à la somme connue  $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$  ;



$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n u_k &= \sum_{k=m}^n u_m q^{k-m} = u_m \sum_{k=m}^n q^{k-m} \\ &= u_m \sum_{k'=0}^{n-m} q^{k'} \quad (\text{avec le changement d'indice } k' = k - m) \\ &= u_m \frac{1 - q^{n-m+1}}{1 - q} = u_0 q^m \frac{1 - q^{n-m+1}}{1 - q}. \end{aligned}$$

- on peut aussi reprendre l'idée de Gauss et voir comment la relation  $u_{k+1} = qu_k$  permet d'obtenir une équation algébrique du premier degré d'inconnue la somme cherchée.



$$q \sum_{k=m}^n u_k = \sum_{k=m}^n u_{k+1} = \sum_{k'=m+1}^{n+1} u_{k'} = \sum_{k=m}^n u_k + u_{n+1} - u_m,$$

d'où

$$\sum_{k=m}^n u_k = \frac{u_m - u_{n+1}}{1 - q} = \frac{u_m - qu_n}{1 - q} = \frac{u_0 q^m - qu_0 q^n}{1 - q} = u_0 q^m \frac{1 - q^{n-m+1}}{1 - q}.$$

Quant au produit des termes consécutifs de la même suite géométrique, le problème se déplace dans l'exposant et se ramène à la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique.



$$\prod_{k=m}^n u_k = \prod_{k=m}^n (u_0 q^k) = u_0^{n-m+1} q^{\left(\sum_{k=m}^n k\right)} = u_0^{n-m+1} q^{\frac{(n+m)(n-m+1)}{2}}.$$

3. Le produit fait penser à la définition d'une factorielle mais seuls les termes impairs sont présents :

$$1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (2k-1) \times (2k) \times \dots \times (2n-1) \times (2n) = (2n)!$$

$$1 \times 3 \times \dots \times (2k-1) \times \dots \times (2n-1) = \prod_{k=1}^n (2k-1).$$

Les termes pairs manquants donnent eux :

$$2 \times 4 \times \dots \times (2n-2) \times (2n) = \underbrace{[2 \times \dots \times 2]}_{n \text{ fois}} [1 \times 2 \times \dots \times (n-1) \times n].$$



$$\prod_{k=1}^n (2k-1) = \frac{(2n)!}{\prod_{k=1}^n (2k)} = \frac{(2n)!}{\left(\prod_{k=1}^n 2\right) \left(\prod_{k=1}^n k\right)} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

L'implémentation en Scilab du calcul du produit se fait naturellement à l'aide d'une boucle for, il y a plusieurs possibilités selon que l'on calcule le terme général du produit à part ou non.

```
function p=produit_impairs(n)
    p=1;
    for k=2:n
        p=p*(2*k-1);
    end
endfunction
```

```
function p=produit_impairs(n)
    p=1; i=3;
    for k=1:n-1
        p=p*i; i=i+2;
    end
endfunction
```




```
function p=produit_impairs(n)//
    p=1; //
    for k=3:2:2*n //boucle pour chaque impair
        p=p*k; // entre 3 et 2n-1
    end //
endfunction //
```

4. On commence par écrire la somme double comme deux sommes simples imbriquées ;



$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} |i-j| = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n |i-j| \right)$$

 Toute somme double s'écrit comme une somme de sommes, cette transformation porte le nom de *relation de Fubini*.

puis on découpe la somme intérieure selon le signe de la différence  $i - j$  pour pouvoir « éliminer » la valeur absolue ;



$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} |i - j| = \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^{i-1} (i - j) + 0 + \sum_{j=i+1}^n (j - i) \right]$$

en les écrivant en extension, on constate que les deux sommes sont connues

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{i-1} (i - j) &= (i - 1) + (i - 2) + \dots + 2 + 1, \\ \sum_{j=i+1}^n (j - i) &= 1 + 2 + \dots + (n - i - 1) + (n - i). \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j'=1}^{i-1} j' + \sum_{j''=1}^{n-i} j'' \right] \\ &\quad \text{(avec les changements d'indice } j' = i - j \text{ et } j'' = j - i) \\ &= \sum_{i=1}^n \left[ \frac{(i-1)i}{2} + \frac{(n-i)(n-i+1)}{2} \right] \end{aligned}$$

On peut poursuivre de deux manières différentes :

- soit on remarque que tout ceci vaut  $\sum_{i=1}^n (i-1)i$ , puisque, par linéarité,

$$\sum_{i=1}^n \left[ \frac{(i-1)i}{2} + \frac{(n-i)(n-i+1)}{2} \right] = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^n (i-1)i + \sum_{i=1}^n (n-i)(n-i+1) \right]$$

et que, par le changement d'indice  $k = n - i + 1$ ,  $\sum_{i=1}^n (n-i)(n-i+1) = \sum_{k=1}^n (k-1)k$ ;

- soit on regroupe selon les puissances de  $i$  et on conclut par linéarité de la sommation.

On va détailler cette deuxième méthode.



$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n \left[ i^2 - (n+1)i + \frac{n(n+1)}{2} \right] \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - (n+1) \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{2} n^2 (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{6} [2n+1 - 3(n+1) + 3n] = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}. \end{aligned}$$

Quant à la seconde somme, on choisit de sommer en premier (la somme extérieure) sur  $j$  qui varie donc selon  $1 \leq j \leq n$  (à ce stade,  $i$  n'existe pas encore) *i.e.*  $\sum_{j=1}^n$ , une

fois  $j$  fixé, on somme sur  $i$  qui varie donc selon  $1 \leq i \leq j$  (la contrainte concernant  $j$  a déjà été prise en compte précédemment) *i.e.*  $\sum_{i=1}^j$ .



$$\begin{aligned}
 \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i} &= \sum_{j=1}^n \left[ \sum_{i=1}^j \binom{j}{i} \right] \\
 &= \sum_{j=1}^n (2^j - 1) \quad (\text{d'après la formule du binôme de Newton}) \\
 &= 2 \sum_{j=1}^n 2^{j-1} - \sum_{j=1}^n 1 \quad (\text{par linéarité de la sommation}) \\
 &= 2 \frac{1 - 2^n}{1 - 2} - n = 2^{n+1} - n - 2.
 \end{aligned}$$

Fort de cette compréhension des sommations sur un triangle, on peut alors proposer une autre méthode pour la première somme en utilisant les propriétés de symétrie du terme général : on va, à l'inverse de ce qui a été fait en première méthode, reporter la relation de Fubini en toute fin de calcul et commencer par simplifier la somme double initiale au moyen des opérations habituelles (changement d'indice ou regroupement des termes).

En l'occurrence, en regroupant les termes d'indice  $(i, j)$  selon que  $i < j$ ,  $i = j$  ou  $i > j$ , on trouve

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} |i - j| = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \underbrace{|i - j|}_{j-i} + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i=j}} \underbrace{|i - j|}_{=0} + \sum_{1 \leq j < i \leq n} \underbrace{|i - j|}_{i-j}.$$

Finalement, en prenant  $(j, i)$  en lieu et place de  $(i, j)$  comme couple d'indices indexant la dernière somme, on trouve

$$\begin{aligned}
 \sum_{1 \leq i, j \leq n} |i - j| &= 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (j - i) \stackrel{\text{Fubini}}{=} 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (j - i) \stackrel{k=j-i}{=} 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-i} k \\
 &= 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(n-i)(n-i+1)}{2} \stackrel{j=n-i}{=} \sum_{j=1}^{n-1} j(j+1) \\
 &= \sum_{j=1}^{n-1} j^2 + \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2} \\
 &= \frac{(n-1)n}{6} [(2n-1) + 3] = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}.
 \end{aligned}$$

**Exercice 1.2 : Séparation pairs/impairs**

1. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $P_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k}$  et  $I_n = \sum_{k=1}^n \binom{2n}{2k-1}$ .

En considérant  $P_n + I_n$  et  $P_n - I_n$ , calculer les deux sommes  $P_n$  et  $I_n$ .

2. Calculer, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k^2$ .

1. Écrivons les sommes en extension pour visualiser ce qui se passe :

$$\begin{array}{r}
 P_n = \binom{2n}{0} + \binom{2n}{2} + \dots + \binom{2n}{2k} + \dots + \binom{2n}{2n} \\
 I_n = \binom{2n}{1} + \binom{2n}{3} + \dots + \binom{2n}{2k-1} + \dots + \binom{2n}{2n-1} \\
 \hline
 P_n + I_n = \binom{2n}{0} + \binom{2n}{1} + \dots + \binom{2n}{2k-1} + \binom{2n}{2k} + \dots + \binom{2n}{2n-1} + \binom{2n}{2n} \\
 P_n - I_n = \binom{2n}{0} - \binom{2n}{1} + \dots - \binom{2n}{2k-1} + \binom{2n}{2k} - \dots - \binom{2n}{2n-1} + \binom{2n}{2n}.
 \end{array}$$



On a, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , d'après la formule du binôme de Newton,

$$P_n + I_n = \sum_{p=0}^{2n} \binom{2n}{p} = (1+1)^{2n} = 2^{2n},$$

$$P_n - I_n = \sum_{p=0}^{2n} (-1)^p \binom{2n}{p} = (1-1)^{2n} = 0.$$

D'où  $P_n = I_n = \frac{1}{2} 2^{2n} = 2^{2n-1}$ .

2. Là encore, écrivons la somme en extension :

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k^2 = 0^2 - 1^2 + 2^2 - \dots - (2p-1)^2 + (2p)^2 - \dots - (2n-1)^2 + (2n)^2$$

pour constater qu'il y a des simplifications entre deux termes consécutifs puisque  $(2p)^2 - (2p-1)^2 = [2p+2p-1][2p-(2p-1)] = 4p-1$ .



Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , en séparant les termes d'indices pairs et impairs,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k^2 &= \sum_{p=1}^n (2p)^2 - \sum_{p=1}^n (2p-1)^2 \\
 &= \sum_{p=1}^n (4p-1) = 4 \sum_{p=1}^n p - \sum_{p=1}^n 1 \\
 &= 2n(n+1) - n = n(2n+1).
 \end{aligned}$$

## Exercice 1.3 : Sommes télescopiques

1. Calculer  $\sum_{i=2}^n \ln \left(1 - \frac{1}{i^2}\right)$  pour  $n \geq 2$ .

2. a. Déterminer des constantes réelles  $a$ ,  $b$  et  $c$  telles que

$$\forall k \geq 2, \quad \frac{1}{k(k^2 - 4)} = \frac{a}{k-2} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+2}.$$

b. En déduire une expression simple de la somme  $\sum_{k=3}^n \frac{1}{k(k^2 - 4)}$  pour  $n \geq 7$ .

1. Il faut transformer l'écriture du terme général pour mettre en évidence la forme  $a_{i+1} - a_i$  (utilisée ici avec  $a_i = \ln i - \ln(i-1)$ ).



On a, pour  $i \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} \ln \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) &= \ln \frac{i^2 - 1}{i^2} = \ln \frac{(i+1)(i-1)}{i^2} = \ln(i+1) - 2 \ln i + \ln(i-1) \\ &= [\ln(i+1) - \ln i] - [\ln i - \ln(i-1)]. \end{aligned}$$

Par télescopage, on en déduit

$$\sum_{i=2}^n \ln \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = [\ln(n+1) - \ln n] - [\ln 2 - \ln(2-1)] = \ln \frac{n+1}{2n}.$$

2.a. Comme mentionné dans l'énoncé, on demande de trouver  $a$ ,  $b$  et  $c$  mais pas forcément d'expliquer comment. On procède donc au brouillon en partant de l'égalité à atteindre et en réduisant le second membre au même dénominateur

$$\begin{aligned} \frac{1}{k(k^2 - 4)} &= \frac{a}{k-2} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+2} = \frac{ak(k+2) + b(k-2)(k+2) + c(k-2)k}{(k-2)k(k+2)} \\ &= \frac{a(k^2 + 2k) + b(k^2 - 4) + c(k^2 - 2k)}{k(k^2 - 4)} = \frac{(a+b+c)k^2 + 2(a-c)k - 4b}{k(k^2 - 4)}. \end{aligned}$$

La comparaison des termes de même degré (en  $k$ ) du numérateur fait dire qu'il suffit d'avoir  $a + b + c = 0$ ,  $a - c = 0$  et  $-4b = 1$  qu'on résout très simplement :  $b = -\frac{1}{4}$  et  $a = c = -\frac{b}{2} = \frac{1}{8}$ .



On ne peut pas affirmer qu'à partir de la simple égalité entre, d'un côté,  $\alpha \cdot k^2 + \beta \cdot k + \gamma$  et, de l'autre,  $0 \cdot k^2 + 0 \cdot k + 1$  on obtient nécessairement  $\alpha = \beta = 0$  et  $\gamma = 1$ .

Il sera établi (lors de l'étude des systèmes ou des polynômes) que ceci résulte d'une multitude d'égalités faisant intervenir plusieurs valeurs de

$k$  (voire une infinité).

Ici, la condition nécessaire n'était pas celle recherchée, puisque l'on cherche en réalité une condition suffisante.

Ces nombres obtenus au brouillon sont alors injectés dans le second membre et la réduction au même dénominateur montre l'égalité avec le membre de gauche.



Pour  $k \geq 2$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{8(k-2)} - \frac{1}{4k} + \frac{1}{8(k+2)} &= \frac{k(k+2) - 2(k-2)(k+2) + (k-2)k}{8(k-2)k(k+2)} \\ &= \frac{k^2 + 2k - 2(k^2 - 4) + k^2 - 2k}{8k(k^2 - 4)} = \frac{1}{k(k^2 - 4)} \end{aligned}$$

donc  $a = c = \frac{1}{8}$  et  $b = -\frac{1}{4}$  conviennent.

**2.b.** Ce coup-ci, après transformation d'écriture, la structure  $a_{k+1} - a_k$  n'apparaît pas clairement.



Pour  $n \geq 7$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k(k^2-4)} &= \frac{1}{8} \sum_{k=3}^n \left[ \frac{1}{(k-2)} - \frac{2}{k} + \frac{1}{(k+2)} \right] \\ &= \frac{1}{8} \left[ \sum_{k=3}^n \frac{1}{k-2} - 2 \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k+2} \right] \end{aligned}$$

Les termes généraux des trois sommes sont en fait les mêmes mais décalés de deux crans vers la gauche ou vers la droite, on va donc faire des changements d'indice pour le mettre en évidence.



$$\begin{aligned} &= \frac{1}{8} \left[ \sum_{k'=1}^{n-2} \frac{1}{k'} - 2 \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} + \sum_{k''=5}^{n+2} \frac{1}{k''} \right] \\ &\quad \text{(avec les changements d'indice } k' = k - 2 \text{ et } k'' = k + 2) \\ &= \frac{1}{8} \left[ 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right] \\ &= \frac{1}{8} \left[ \frac{11}{12} - \frac{2}{n^2-1} - \frac{2}{n(n+2)} \right] \\ &= \frac{1}{8} \left[ \frac{11}{12} - 2 \frac{n(n+2) + (n^2-1)}{n(n^2-1)(n+2)} \right] \\ &= \frac{1}{8} \left[ \frac{11}{12} - 2 \frac{2n^2 + 2n - 1}{n(n^2-1)(n+2)} \right]. \end{aligned}$$

## Exercice 1.4 : Formule du binôme et moments de la loi binomiale

On se propose de calculer de deux façons § distinctes la valeur des sommes

$$E_n(p) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad I_n(p) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

$$\text{et } M_n(p) = \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (\text{avec } p \neq 0).$$

1. a. Vérifier que, pour  $1 \leq k \leq n$ ,  $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ .

b. En déduire la valeur de  $E_n(p)$ .

c. Avec la même stratégie, montrer que

$$M_n(p) = n(n-1)p^2 \quad \text{et} \quad I_n(p) = \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{(n+1)p}.$$

2. a. Donner une expression simple de  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-p)^{n-k}$ .

b. En dérivant par rapport à  $x$  l'égalité obtenue, montrer que  $E_n(p) = np$ .

c. En dérivant une seconde fois, déterminer une expression simple de  $M_n(p)$  et, en intégrant au contraire sur  $[0, p]$  la première égalité, calculer  $I_n(p)$ .

3. Avec le changement d'indice  $j = n - k$ , montrer que  $E_n(p) = n - E_n(1-p)$  et retrouver la valeur de  $E_n(p)$  pour  $p = \frac{1}{2}$ .

1.a. Il s'agit ni plus ni moins de la formule du pion dont on va reproduire la preuve à l'aide de la définition des coefficients binomiaux par les factorielles.



$$\begin{aligned} k \binom{n}{k} &= k \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= n \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n \binom{n-1}{k-1}. \end{aligned}$$

1.b. La définition de  $E_n(p)$  ressemble beaucoup au développement du binôme au facteur surnuméraire  $k$  près (que l'on ne peut mettre en facteur vu que c'est l'indice de sommation). Il suffirait d'éliminer ce facteur, l'égalité précédente va permettre de transférer la dépendance en  $k$  en dépendance en  $n$  que l'on pourra alors mettre en facteur. La somme obtenue ressemble alors clairement au développement du binôme mais pour la puissance  $(n-1)^e$ .

§. On trouvera un développement théorique plus systématique de la seconde façon dans l'exercice 14.4 en page 456.





D'où,

$$\begin{aligned} E_n(p) &= 0 + \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= np \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} = np(p+1-p)^{n-1} = np. \end{aligned}$$

**1.c.** On reprend donc la stratégie en utilisant d'abord la formule du pion pour convertir la dépendance en  $k(k-1)$  ou  $\frac{1}{k+1}$  en dépendance en  $n$  puis on reconnaît alors une formule du binôme.



On a, pour  $2 \leq k \leq n$ ,  $k(k-1) \binom{n}{k} = (k-1)n \binom{n-1}{k-1} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2}$ .

D'où,

$$\begin{aligned} M_n(p) &= \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} p^{k-2} (1-p)^{(n-2)-(k-2)} \\ &= n(n-1)p^2 (p+1-p)^{n-2} \quad (\text{d'après la formule du binôme de Newton}) \\ &= n(n-1)p^2. \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour  $0 \leq k \leq n$ ,  $\frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1}$  donc

$$\begin{aligned} I_n(p) &= \frac{1}{(n+1)p} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} p^{k+1} (1-p)^{(n+1)-(k+1)} \\ &= \frac{(p+1-p)^{n+1} - \binom{n+1}{0} p^0 (1-p)^{n+1-0}}{(n+1)p} \\ &= \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{(n+1)p}. \end{aligned}$$

**2.a.** Il s'agit de la partie développée de la formule du binôme.



D'après la formule du binôme de Newton,  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-p)^{n-k} = (x+1-p)^n$ .

**2.b.** Les deux membres sont sous forme polynomiale donc la dérivation ne pose pas de problème.



En dérivant par rapport à  $x$ , on obtient, par linéarité de la dérivation,

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k x^{k-1} (1-p)^{n-k} = n(x+1-p)^{n-1}.$$

En particulier, avec  $x = p$ , on a  $\frac{1}{p} E_n(p) = n$  donc  $E_n(p) = np$ .

2.c. On suit l'indication donnée en dérivant une seconde fois l'égalité.



En dérivant une seconde fois toujours par rapport à  $x$ , on a

$$\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} k(k-1)x^{k-2}(1-p)^{n-k} = n(n-1)(x+1-p)^{n-2}$$

d'où, en particulier avec  $x = p$ ,  $\frac{1}{p^2}M_n(p) = n(n-1)$  de sorte que  $M_n(p) = n(n-1)p^2$ .

Pour  $I_n(p)$ , on procède comme indiqué, par intégration.



En reprenant l'égalité initiale et en intégrant sur  $[0, p]$ , on a, par linéarité de l'intégration,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \int_0^p x^k dx (1-p)^{n-k} &= \int_0^p (x+1-p)^n dx \\ \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left[ \frac{x^{k+1}}{k+1} \right]_0^p (1-p)^{n-k} &= \left[ \frac{(x+1-p)^{n+1}}{n+1} \right]_0^p \\ \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{p^{k+1}}{k+1} (1-p)^{n-k} &= \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{n+1}. \end{aligned}$$

D'où,  $I_n(p) = \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{(n+1)p}$ .

3. Le changement d'indice donné va échanger les rôles respectifs de  $p$  et  $1-p$  et ne rien changer pour le coefficient binomial puisqu'il est symétrique.



Avec le changement d'indice  $j = n - k$ ,

$$\begin{aligned} E_n(p) &= \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{j=0}^n (n-j) \binom{n}{n-j} p^{n-j} (1-p)^j \\ &= \sum_{j=0}^n (n-j) \binom{n}{j} (1-p)^j p^{n-j} \\ &= n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (1-p)^j p^{n-j} - \sum_{j=0}^n j \binom{n}{j} (1-p)^j p^{n-j} \\ &= n(1-p+p)^n - E_n(1-p) \quad (\text{d'après la formule du binôme}) \\ &= n - E_n(1-p). \end{aligned}$$

En particulier pour  $p = \frac{1}{2}$ ,  $E_n\left(\frac{1}{2}\right) = n - E\left(\frac{1}{2}\right)$  d'où  $E_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n}{2}$ .

**Exercice 1.5 : La somme des premiers cubes I**

On se propose de calculer  $S_n = \sum_{k=1}^n k^3$ , pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , par quatre\* méthodes différentes et indépendantes.

1. Donner l'expression de  $S_n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et démontrer la par récurrence.
2. Calculer  $(k+1)^4 - k^4$ , en déduire que

$$(n+1)^4 - 1 = 4S_n + 6 \sum_{k=1}^n k^2 + 4 \sum_{k=1}^n k + n$$

et retrouver l'expression de  $S_n$ .

3. a. Justifier que  $(n+1-k)^3 = (n+1)^3 - 3(n+1)^2k + 3(n+1)k^2 - k^3$ .  
 b. En déduire que

$$S_n = n(n+1)^3 - 3(n+1)^2 \sum_{k=1}^n k + 3(n+1) \sum_{k=1}^n k^2 - S_n$$

et retrouver l'expression de  $S_n$ .

4. a. En calculant de deux façons  $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} j^2$ , montrer que

$$S_n = \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{3}S_n + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i^2 - \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n i.$$

- b. Retrouver alors l'expression de  $S_n$ .

1. Le raisonnement par récurrence est bien possible puisque l'expression de la somme des premiers cubes est un attendu du programme.



Pour  $n \geq 1$ , notons  $\mathcal{P}_n$  la proposition «  $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$  ».

Pour l'initialisation,  $S_1 = \sum_{k=1}^1 k^3 = 1^3 = 1$  d'une part et  $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{2^2}{4} = 1$  d'autre part donc  $\mathcal{P}_1$  est vraie.

Pour l'hérédité, supposons  $\mathcal{P}_n$  vraie pour un certain  $n \geq 1$ , alors

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2}{4} [n^2 + 4(n+1)] \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} (n^2 + 4n + 4) = \frac{(n+1)^2 [(n+1) + 1]^2}{4} \end{aligned}$$

donc  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie.

Finalement, par principe de récurrence, pour tout  $n \geq 1$ ,  $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ .

2. On commence par développer pour visualiser la simplification.

\*. On trouvera une cinquième méthode dans l'exercice 2.6 en page 37.



D'après la formule du binôme de Newton,

$$(k + 1)^4 - k^4 = (k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1.$$

Le terme général de  $S_n$  apparaît dans le membre de droite, on va donc sommer cette égalité pour  $1 \leq k \leq n$  pour faire apparaître  $S_n$ .



En sommant cette égalité, pour  $k$  variant entre 1 et  $n$ , on obtient

$$\sum_{k=1}^n [(k + 1)^4 - k^4] = \sum_{k=1}^n (4k^3 + 6k^2 + 4k + 1).$$

D'où, par télescopage dans le membre de gauche et par linéarité de la sommation dans le membre de droite,

$$(n + 1)^4 - 1 = 4S_n + 6 \sum_{k=1}^n k^2 + 4 \sum_{k=1}^n k + n.$$

En isolant  $S_n$ , on conclut que

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{4} \left[ (n + 1)^4 - 1 - n - 4 \sum_{k=1}^n k - 6 \sum_{k=1}^n k^2 \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[ (n + 1)^4 - (n + 1) - 2n(n + 1) - n(n + 1)(2n + 1) \right] \\ &= \frac{n + 1}{4} \left[ (n + 1)^3 - 1 - 2n - n(2n + 1) \right] \\ &= \frac{n + 1}{4} \left[ n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1 - 2n - 2n^2 - n \right] \\ &= \frac{n + 1}{4} (n^3 + n^2) = \frac{n^2(n + 1)^2}{4}. \end{aligned}$$

**3.a.** On reconnaît les coefficients de la formule du binôme, il suffit donc de bien découper  $n + 1 - k$  en  $(n + 1) - k$ .



D'après la formule du binôme de Newton,

$$(n + 1 - k)^3 = [(n + 1) - k]^3 = (n + 1)^3 - 3(n + 1)^2k + 3(n + 1)k^2 - k^3.$$

**3.b.** Là encore, on reconnaît à droite le terme général de  $S_n$  et on somme donc l'égalité.



Par linéarité de la sommation,

$$\sum_{k=1}^n (n + 1 - k)^3 = (n + 1)^3 n - 3(n + 1)^2 \sum_{k=1}^n k + 3(n + 1) \sum_{k=1}^n k^2 - S_n.$$

On doit aussi reconnaître  $S_n$  dans le membre de gauche ce qu'on constate en écrivant la somme en extension  $\sum_{k=1}^n (n + 1 - k)^3 = n^3 + (n - 1)^3 + \dots + 2^3 + 1^3$  et qui incite donc à faire un changement d'indice par symétrie.



En outre, avec le changement d'indice  $j = n + 1 - k$ ,  $\sum_{k=1}^n (n + 1 - k)^3 = S_n$  donc

$$S_n = n(n+1)^3 - 3(n+1)^2 \frac{n(n+1)}{2} + 3(n+1) \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - S_n$$

$$\text{i.e. } 2S_n = \frac{n(n+1)^2}{2} [2(n+1) - 3(n+1) + (2n+1)]$$

$$\text{i.e. } S_n = \frac{n(n+1)^2}{4} [-(n+1) + (2n+1)]$$

$$\text{i.e. } S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

**4.a.** Il s'agit évidemment d'écrire la somme double comme deux sommes imbriquées avec les deux ordres possibles de sommation.



D'une part,

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} j^2 = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^j j^2 \right) = \sum_{j=1}^n (j^2 \times j) = S_n$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} j^2 &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=i}^n j^2 \right) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n j^2 - \sum_{j=1}^{i-1} j^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left[ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(i-1)i(2i-1)}{6} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{6}(2i^3 - 3i^2 + i) \right]. \end{aligned}$$

D'où, par linéarité de la sommation,

$$S_n = \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{3}S_n + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i^2 - \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n i.$$

**4.b.** Il ne reste plus qu'à extraire  $S_n$  de l'égalité précédente et utiliser là encore les sommes connues des premiers entiers et premiers carrés.



En regroupant toutes les occurrences de  $S_n$  dans le membre de gauche,

$$S_n = \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{3}S_n + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i^2 - \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n i$$

$$\text{i.e. } \frac{4}{3}S_n = \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{6} \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{i.e. } S_n = \frac{3}{4} \frac{n(n+1)}{6} \left[ n(2n+1) + \frac{2n+1}{2} - \frac{1}{2} \right]$$

$$\text{i.e. } S_n = \frac{n(n+1)}{4} \frac{n(2n+1) + n}{2}$$

$$\text{i.e. } S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

**Exercice 1.6 : La formule de Vandermonde**

1. En procédant par récurrence sur  $n$ , montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left( \forall (m, p) \in \mathbb{N}^2, \sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n}{p-k} = \binom{m+n}{p} \right).$$

2. En utilisant l'égalité précédente, déterminer la valeur de  $\sum_{k=0}^p k \binom{m}{k} \binom{n}{p-k}$ .

3. Calculer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$ .

1. Il suffit de faire attention à bien mettre l'universalité en  $(m, p)$  dans l'hypothèse de récurrence.



Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathcal{P}_n$  la proposition

$$\forall (m, p) \in \mathbb{N}^2, \sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n}{p-k} = \binom{m+n}{p}.$$

On tient aussi compte du fait que le coefficient binomial  $\binom{n}{k}$  est, par convention, nul lorsque la condition  $0 \leq k \leq n$  n'est pas vérifiée.



Commençons par l'initialisation, pour  $n = 0$ ,  $\binom{n}{p-k}$  n'est non nul que pour  $k = p$  de sorte que  $\sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n}{p-k} = \binom{m}{p} \binom{0}{0} = \binom{m+0}{p}$  et l'assertion  $\mathcal{P}_0$  est vraie.

Passons maintenant à l'hérédité en supposant la proposition  $\mathcal{P}_n$  vraie pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $(m, p) \in \mathbb{N}^2$ , si  $p = 0$ , alors

$$\sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n+1}{p-k} = \binom{m}{0} \binom{n+1}{0} = 1 = \binom{m+n+1}{0},$$

sinon, par la relation de Pascal,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n+1}{p-k} &= \sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \left[ \binom{n}{p-k} + \binom{n}{p-k-1} \right] \\ &= \sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n}{p-k} + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{m}{k} \binom{n}{p-k-1} \end{aligned}$$

C'est ici que l'on utilise l'hypothèse de récurrence pour le triplet  $(n, m, p)$  mais aussi pour le triplet  $(n, m, p - 1)$ .