mini Manuel de

Mécanique du point

Cours + Exos

Michel Henry
Maître de conférences à ESPE de l'Académie de Nantes (Le Mans)
Agrégé de physique

Nicolas Delorme
Maître de conférences à l'université du Maine (Le Mans)

2e édition

DUNOD

ISBN 978-2-10-071015-7

Table des matières

CHAPITRE 1

Cinématique du point

PLAN

OBJECTIFS

- L'objet de la cinématique du point est l'étude du mouvement d'un point sans se préoccuper des causes (les forces) qui lui donnent naissance
- Connaître le système de coordonnées cartésiennes et polaires ou cylindriques
- Connaître l'expression des vecteurs position, vitesse et accélération dans les systèmes de coordonnées cartésiennes et cylindriques
- Connaître la définition de quelques mouvements particuliers

1.1 RELATIVITÉ DU MOUVEMENT : NÉCESSITÉ D'UN RÉFÉRENTIEL

a) Introduction

L'étude du mouvement d'un point implique nécessairement la présence simultanée du point et d'un observateur qui analyse le mouvement de ce point. Selon la position de l'observateur les conclusions peuvent être différentes alors que l'étude porte sur le même point. Considérons l'exemple simple de la chute d'une bille réalisée dans le wagon d'un train qui se déplace sur une voie rectiligne à vitesse constante. Les résultats de l'étude de ce mouvement obtenus par un observateur assis dans ce wagon et un autre immobile sur le quai seront inévitablement différents (voir *figure 1.1*).

Le mouvement d'un point est donc ***relatif*** à un observateur fixe dans un ***référentiel*** d'étude.

➤ Il n'est pas faux par exemple de dire que le soleil est en mouvement par rapport à la Terre si l'observateur est fixe sur Terre. Il faut donc à chaque fois préciser par rapport à quoi l'étude du mouvement est effectuée.

➤ Dans le langage courant ce référentiel est sous entendu. Dans l'expression « le train se déplace à vitesse constante » il est évident que c'est par rapport au sol et donc la Terre. Le voyageur assis dans un wagon du train peut dire : « je suis immobile », tout le monde comprendra que c'est par rapport au siège du wagon et du wagon lui-même. Il peut dire aussi « je me déplace à grande vitesse » et on comprendra que c'est par rapport à la Terre.

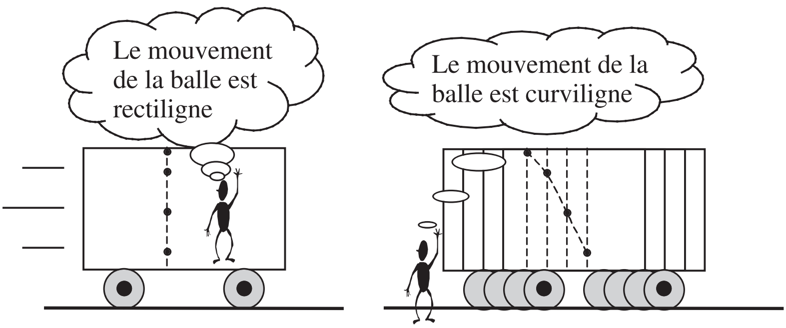


Figure 1.1 Relativité du mouvement pour la chute d'une balle dans un wagon en mouvement rectiligne uniforme : positions d'une balle à différents instants pour un observateur dans le wagon et pour un autre immobile sur le quai.

En mécanique, pour qu'il n'y ait pas de doute possible, il est impératif de préciser par rapport à quoi l'étude du mouvement sera effectuée c'est-à-dire indiquer le ***référentiel*** choisi.

b) Notion de référentiel

Un ***référentiel*** (ou ***solide de référence***) est un ensemble de points tous fixes les uns par rapport aux autres. L'observateur qui étudie le mouvement d'un point est lui-même immobile dans ce référentiel.

Exemple : l'observateur est dans le train, le référentiel est le train. L'observateur est sur le quai, le référentiel est la Terre.

➤ Un référentiel peut être caractérisé par son nom. Dans les exemples précédents on peut parler du référentiel « train » (constitué de tout ce qui est fixe par rapport au train) ou du référentiel « Terrestre » (constitué de tout ce qui est fixe par rapport à la Terre) sans qu'il y ait d'ambiguïté.

➤ Un référentiel peut aussi être caractérisé par un point O et trois directions fixes dans ce référentiel c'est-à-dire par un repère (O, x, y, z). Tout ce qui est fixe dans ce repère constitue le référentiel.

Par exemple, pour l'étude du mouvement d'une bille dans un laboratoire il est possible de choisir un point O correspondant à la position de la bille à un instant initial et 3 axes Ox (longueur), Oy (largeur) et Oz (hauteur) liés au laboratoire. Le repère $R(O, x, y, z)$ définit le référentiel d'étude correspondant au référentiel « laboratoire ».

Pour un référentiel donné il existe une infinité de repères possibles (infinité de possibilités de choisir une origine et 3 axes)
Pour un repère donné il n'existe qu'un référentiel associé (tout ce qui est fixe dans le repère forme le référentiel)

c) Exemples de référentiel à connaître

➤ Le ***référentiel de Copernic*** (ou héliocentrique du grec *Hêlios* signifiant Soleil). L'origine du repère définissant ce référentiel correspond au centre d'inertie du système solaire (pratiquement confondu avec le centre d'inertie du Soleil). Les 3 axes du repère sont dirigés vers 3 étoiles qui s'éloignent du Soleil toujours dans la même direction.

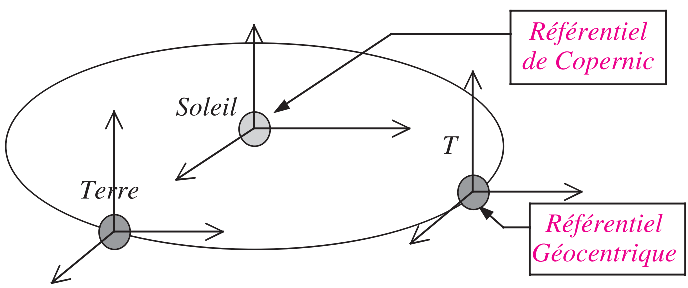


Figure 1.2 Les référentiels de Copernic et géocentrique : le référentiel géocentrique est en mouvement de translation circulaire uniforme par rapport au référentiel de Copernic.

➤ Le ***référentiel géocentrique*** (du grec *géo* signifiant Terre). Le repère caractérisant ce référentiel a pour origine le centre de la Terre et les 3 axes sont des axes qui restent parallèles à ceux du référentiel de Copernic.

➤ Le ***référentiel terrestre*** : l'origine de repère choisi est liée à la Terre ainsi que les 3 axes.

Le référentiel terrestre est un référentiel en rotation uniforme par rapport au référentiel géocentrique (rotation autour d'un axe Nord-Sud fixe dans le référentiel géocentrique).

Le référentiel géocentrique est en mouvement de translation circulaire uniforme par rapport au référentiel de Copernic (voir *figure 1.2*).

Un référentiel est défini soit par son nom (exemple : référentiel terrestre) soit par un de ses repères $R(O, x, y, z)$.

1.2 REPÈRES

L'étude cinématique du mouvement d'un point revient à pouvoir répondre aux questions « où ? » (où se trouve le point ?) et « quand ? » (à quel moment dans le temps ?). Pour répondre à ces questions il est nécessaire de définir un repère d'espace et un repère de temps.

a) Repère d'espace

Un repère d'espace est défini par une origine O qui est fixe dans le référentiel et des axes de référence orthonormés c'est-à-dire orthogonaux et munis d'une unité de longueur (vecteur unitaire de norme égale à 1) qui vont permettre à l'observateur de juger dans quelle direction se trouve le point. Les trois axes forment un trièdre direct (voir figure 1.3).

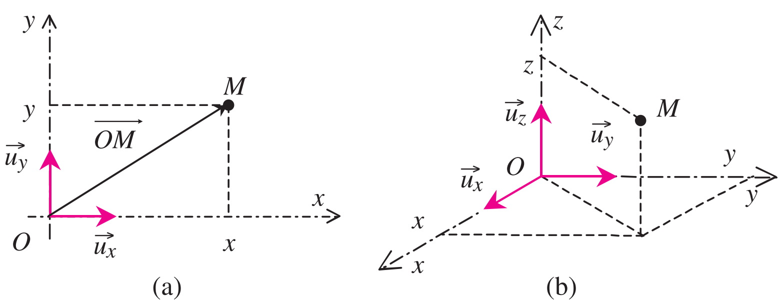


Figure 1.3 Repère dans un plan (a) et dans l'espace (b).

L'étude du mouvement dans un plan nécessite 2 axes (Ox, Oy) et dans l'espace 3 axes (Ox, Oy, Oz). À chacun de ces axes est associé un vecteur unitaire respectivement $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$. Les vecteurs $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ forment une base orthonormée.

b) Repère de temps

Pour pouvoir répondre à la question « quand? » il faut ajouter un repère de temps c'est-à-dire une grandeur qui est la variable de temps. La durée écoulée entre 2 événements ou 2 instants est mesurée au moyen d'une horloge ou chronomètre. Tout mouvement périodique (mouvement qui se reproduit identiquement à lui-même à intervalle de temps successifs et égaux pris comme unité de temps) peut servir d'horloge. Le repère de temps est constitué d'une origine des temps fixée par l'observateur et d'une durée unitaire fixant une chronologie.

À chaque instant, on associe un nombre réel t appelé date qui correspond à la durée écoulée depuis l'instant origine.

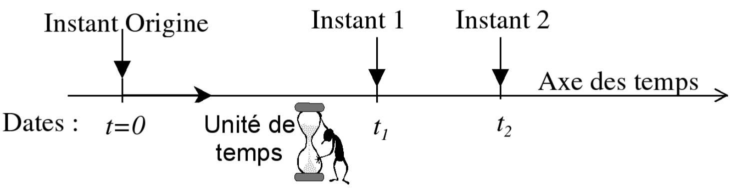


Figure 1.4 Repère de temps : la durée Δt entre les instants 1 et 2 correspond à la différence de leur date $t_2 - t_1$.

En mécanique classique ou newtonienne, on postule que le repère de temps est le même pour tous les référentiels et que le temps s'écoule de la même manière dans des référentiels en mouvement les uns par rapport aux autres.

c) Le système de coordonnées cartésiennes

Dans le repère d'espace (O, x, y, z) défini précédemment (voir *figure 1.3*), un point M est repéré par ses coordonnées d'espace (x, y, z) correspondant à la mesure algébrique de la projection de M successivement sur les 3 axes du repère. Ces 3 coordonnées sont de même nature et homogènes à une longueur.

Dans le référentiel R d'étude, la base associée à ce système d'axe $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est une base orthonormée qui ne change pas au cours du temps. On dit encore que la base est *fixe* dans R.

Quand on dit que la base est *fixe* dans R cela signifie que ces vecteurs gardent la même direction, le même sens et la même norme au cours du temps. Ces vecteurs ne sont pas liés à un point : ils peuvent être représentés n'importe où dans l'espace mais par habitude et commodité ils sont en général représentés au point origine O.

Il est pratique de positionner le point M en se donnant le vecteur position $\overrightarrow{OM}$. Les composantes de ce vecteur, dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ correspondent alors aux coordonnées du point M :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z \qquad (1.1)$$

(x, y, z) sont les coordonnées cartésiennes du point M.
(x, y, z) sont aussi les composantes du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

d) Le système de coordonnées polaires

Il existe d'autres systèmes permettant de positionner un point dans le repère d'étude comme par exemple le système de coordonnées polaires utilisé dans le cas où le point M est mobile dans un plan.

Le point M est parfaitement repéré si on connaît la distance $OM = \rho$ et l'angle θ que fait le segment OM avec l'axe Ox (voir *figure 1.5* (a)).

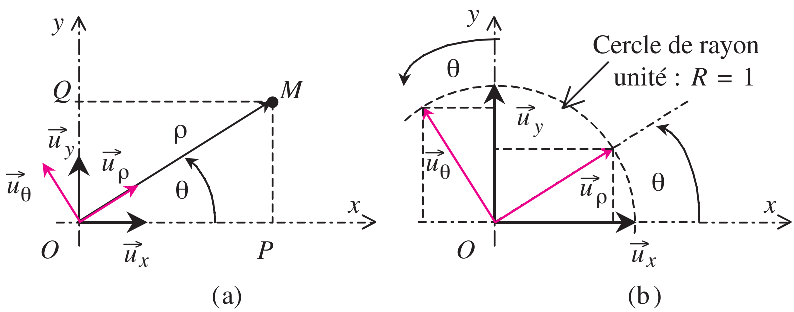


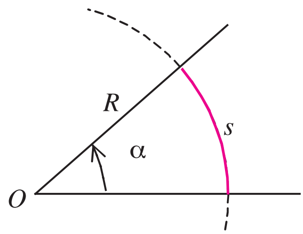
Figure 1.5 Les coordonnées polaires (ρ,θ) et la base associée $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$.

- Le point origine O correspond au « pôle » d'où le terme coordonnée polaire. La longueur du segment OM correspond à sa ***coordonnée radiale.*** Elle est notée ρ (rhô : lettre grecque) ou r.
- L'autre coordonnée est la ***coordonnée angulaire*** également appelée angle polaire ou azimut et noté θ (thêta : lettre grecque). Cet angle est mesuré par rapport à l'axe des abscisses Ox appelé alors axe polaire.

Contrairement aux coordonnées cartésiennes x et y, les coordonnées polaires ρ et θ ne sont pas de même nature. La coordonnée radiale ρ a la dimension d'une longueur comme x et y. La coordonnée angulaire s'exprime en radian qui est une unité d'angle sans dimension (voir encart 1.1).

Encart 1.1 Définition d'un angle

Soit un cercle de rayon R, de centre O et un angle α de sommet O exprimé en radian. La mesure s de la longueur de l'arc de cercle intercepté par cet angle est donnée par : $s = R\alpha$. L'angle α apparaît comme le rapport de 2 longueurs et est donc sans dimension.



Mesure s de l'arc de cercle :

$$s = R\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{s}{R}$$

Figure 1.6 Définition d'un angle exprimé en radian.

➤ Pour exprimer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ il est commode d'introduire une nouvelle base orthonormée directe $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ naturellement associée à ce système de coordonnées et définie de la façon suivante (voir *figure 1.5*) :

• $\vec{u}_\rho$ est le vecteur unitaire suivant la direction et le sens de O vers M. c'est le vecteur *radial* (suivant le rayon) ;

• $\vec{u}_\theta$ est le vecteur unitaire perpendiculaire au vecteur $\vec{u}_\rho$. Il est obtenu en effectuant une rotation d'un angle de $+\frac{\pi}{2}$ à partir du vecteur $\vec{u}_\rho$. C'est le vecteur *orthoradial* (perpendiculaire au rayon).

Le vecteur position s'écrit alors :

$$\overrightarrow{OM} = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| \vec{u}_\rho = \rho \vec{u}_\rho \qquad (1.2)$$

(ρ,θ) sont les coordonnées polaires du point M mais ne correspondent pas aux composantes du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ (contrairement à ce qu'on obtient en coordonnées cartésiennes). Les composantes de ce vecteur position sont $(\rho,0)$: il n'y a pas de composante suivant $\vec{u}_\theta$ mais uniquement une composante ρ suivant $\vec{u}_\rho$.

Encart 1.2 Le produit scalaire

➤ Le produit scalaire est une opération entre deux vecteurs :
Le <u>résultat est un scalaire</u> :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos(\vec{a}, \vec{b}) = ab\cos\alpha$$

avec α l'angle que fait le vecteur $\vec{b}$ avec le vecteur $\vec{a}$.

Si le vecteur $\vec{b}$ est unitaire ($\|\vec{b}\| = 1$) alors le produit scalaire représente la projection du vecteur $\vec{a}$ sur la direction de $\vec{b}$.

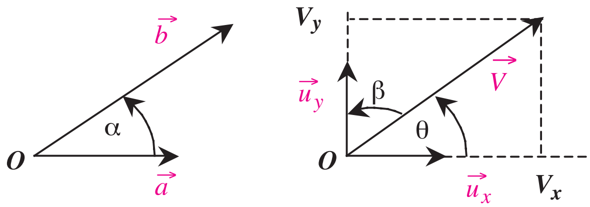


Figure encart : Produit scalaire et projection d'un vecteur.

➤ Projection d'un vecteur $\vec{V}$ sur la direction $\vec{u}_x$ (vecteur unitaire) :

$$\vec{V} \cdot \vec{u}_x = \|\vec{V}\|\|\vec{u}_x\|\cos\theta = V\cos\theta = V_x$$

➤ Projection d'un vecteur $\vec{V}$ sur la direction $\vec{u}_y$ (vecteur unitaire) :

$$\vec{V} \cdot \vec{u}_y = \|\vec{V}\|\|\vec{u}_y\|\cos\beta = V\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = V\sin\theta = V_y$$

➤ Expression du produit scalaire en fonction des composantes :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_a\vec{u}_x + y_a\vec{u}_y + z_a\vec{u}_z) \cdot (x_b\vec{u}_x + y_b\vec{u}_y + z_b\vec{u}_z)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$$

➤ Produit scalaire et norme :

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = \|\vec{a}\|^2 = a^2 = x_a^2 + y_a^2 + z_a^2$$

➤ **Angle** entre deux vecteurs : $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab}$

➤ **Propriétés** : $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ si $\vec{a}$ est perpendiculaire à $\vec{b}$

e) Liens entre les systèmes de coordonnées polaires et cartésiennes

➤ Avec les notations de la *figure 1.5* (a) nous pouvons écrire en utilisant le triangle rectangle (OPM) :

$$\cos\theta = \frac{OP}{OM} = \frac{x}{\rho} \Rightarrow x = \rho\cos\theta \tag{1.3}$$

$$\sin\theta = \frac{PM}{OM} = \frac{OQ}{\rho} = \frac{y}{\rho} \Rightarrow y = \rho\sin\theta \tag{1.4}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x} \tag{1.5}$$

➤ En appliquant le théorème de Pythagore on a :

$$OM = \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.6}$$

On en déduit alors les expressions suivantes :

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{1.7}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{1.8}$$

Si les coordonnées polaires (ρ,θ) sont connues on obtient les coordonnées cartésiennes en utilisant les relations (1.3) et (1.4).

Si les coordonnées cartésiennes (x,y) sont connues on obtient les coordonnées polaires en utilisant les relations (1.5), (1.6) (1.7) et (1.8).

➤ De même il est possible de passer d'une base d'un système de coordonnées à l'autre. En s'aidant de la *figure 1.5* (b) les composantes des vecteurs unitaires $\vec{u}_\rho$ et $\vec{u}_\theta$ dans la base cartésienne sont :

$$\vec{u}_\rho = (\cos\theta)\vec{u}_x + (\sin\theta)\vec{u}_y \tag{1.9}$$

$$\vec{u}_\theta = (-\sin\theta)\vec{u}_x + (\cos\theta)\vec{u}_y \tag{1.10}$$

De même, en inversant les relations précédentes on peut écrire :

$$\vec{u}_x = (\cos\theta)\vec{u}_\rho - (\sin\theta)\vec{u}_\theta \tag{1.11}$$

$$\vec{u}_y = (\sin\theta)\vec{u}_\rho + (\cos\theta)\vec{u}_\theta \tag{1.12}$$

Un moyen simple de retrouver rapidement les composantes d'un vecteur sur une base est d'utiliser les propriétés du produit scalaire (voir encart 1.2). En effet on peut écrire par exemple :

Composante de $\vec{u}_\rho$ sur $\vec{u}_x$: $\vec{u}_\rho \cdot \vec{u}_x = \|\vec{u}_\rho\|\|\vec{u}_x\|\cos\theta = \cos\theta$

Composante de $\vec{u}_\rho$ sur $\vec{u}_y$: $\vec{u}_\rho \cdot \vec{u}_y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$

On retrouve ainsi la relation (1.9).

Avec ses relations, il est toujours possible de passer d'un système de coordonnées à l'autre.

Si l'étude est effectuée en coordonnées cartésiennes seules doivent apparaître les grandeurs $(x, y, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$. En coordonnées polaires n'apparaîtront que les grandeurs $(\rho, \theta, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$. Il ne faut en aucun cas conserver des expressions comportant un mélange de ses grandeurs.

f) Le système de coordonnées cylindriques

Si le point doit être repéré dans l'espace il est possible d'utiliser les coordonnées cylindriques. Il suffit de compléter le système de coordonnées polaires par un troisième axe : l'axe Oz avec sa coordonnée cartésienne z (appelée la cote).

La projection P du point M dans le plan (O, x, y) est repérée en coordonnées polaires (ρ,θ). La projection de M sur l'axe Oz donne la cote z (voir *figure 1.7*).

La base associée est composée de la base polaire et du vecteur unitaire $\vec{u}_z$ suivant l'axe Oz.

Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ s'obtient en utilisant la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{u}_z \tag{1.13}$$

$$\begin{gathered} \|\overrightarrow{OM}\| = OM = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{gathered} \tag{1.14}$$

Les coordonnées cylindriques de M sont donc (ρ,θ,z). Les composantes du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ sont $(\rho,0,z)$ dans la base cylindrique $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

Le point M est situé sur un cylindre d'axe Oz, de rayon ρ d'où le terme coordonnées cylindriques. Pour positionner un point sur le cylindre il suffit de préciser la cote z et la coordonnée angulaire θ.

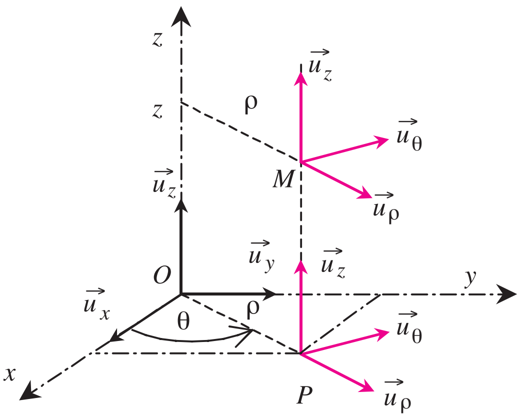


Figure 1.7 Le système de coordonnées cylindriques.

g) Base fixe et base mobile dans le référentiel d'étude

Dans le repère choisi du référentiel d'étude il est possible d'utiliser différentes bases.

- La base du système de coordonnées cartésiennes $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est une base dite « *fixe* » c'est-à-dire que ces vecteurs gardent la même norme unitaire, la même direction et le même sens au cours du temps.

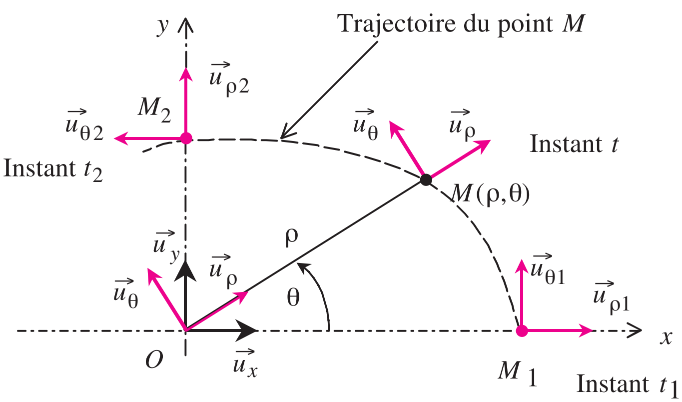


Figure 1.8 Représentation de la base polaire $(\vec{u}_\theta, \vec{u}_\rho)$ à différents instants au cours du mouvement d'un point *M* dans le plan.

- La base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ associée aux coordonnées polaires est dite « *mobile* ». Au cours du déplacement du point *M* dans le plan, le vecteur unitaire $\vec{u}_\rho$ suivant *OM* change de direction ainsi que $\vec{u}_\theta$ (voir *figure 1.8*). Ces vecteurs, définis à partir du point *M*, peuvent être représentés en n'importe quel point du plan. Par habitude ou commodité ils sont en général représentés en M ou bien en O. Cela signifie aussi que ces vecteurs ne peuvent subir que des rotations au cours du temps.

La *figure 1.8* représente la trajectoire d'un point M dans le plan. À l'instant t, il se trouve au point de coordonnées polaires (ρ,θ).

- À l'instant t_1, M est en M_1 sur l'axe Ox, de coordonnées cartésiennes $(x,y) = (x_1,0)$ et polaires $(\rho,\theta) = (\rho_1,\theta_1) = (x_1,0)$.
- À l'instant t_2, M est en M_2 sur l'axe Oy, de coordonnées cartésiennes $(x,y) = (0,y_2)$ et polaires $(\rho,\theta) = (\rho_2,\theta_2) = \left(y_2,\frac{\pi}{2}\right)$.

La base polaire $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ est représentée à ces différents instants t, t_1 et t_2. On constate alors qu'à l'instant t_1, les vecteurs de base $(\vec{u}_{\rho 1}, \vec{u}_{\theta 1})$ se confondent avec la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$. À l'instant t_2, le vecteur $\vec{u}_\rho = \vec{u}_{\rho 2}$ correspond au vecteur $\vec{u}_y$ alors que le vecteur $\vec{u}_\theta = \vec{u}_{\theta 2} = \vec{u}_{\frac{\pi}{2}}$ correspond au vecteur $(-\vec{u}_x)$.

En représentant ces vecteurs en un même point (voir *figure 1.9*), on constate bien la rotation des vecteurs de la base polaire. En considérant les expressions (1.9) et (1.10) ces vecteurs apparaissent bien comme une fonction de l'angle θ.

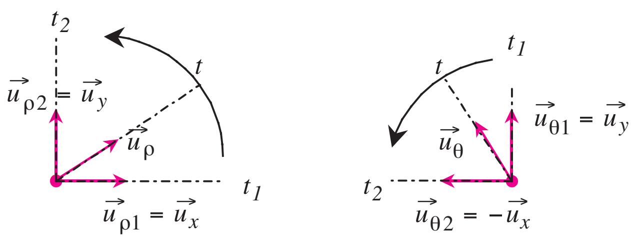


Figure 1.9 Rotation des vecteurs de la base polaire : représentation à différents instants définis sur la *figure 1.8*.

h) Choix du système de coordonnées

Le choix du système de coordonnées dépendra du type de mouvement du point mobile. Dans le cas d'un mouvement rectiligne il est évident que le système de coordonnées cartésiennes est le mieux adapté. Ce ne sera plus le cas pour des mouvements curvilignes pour lesquels le système de coordonnées polaires ou cylindriques sera le plus souvent utilisé.

Exemple : trajectoire circulaire

On peut donner comme exemple le cas d'un mouvement circulaire. L'équation d'un cercle de centre O et de rayon R s'écrit en cartésienne :

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad \text{et} \quad x \in [-R,R]\,;\, y \in [-R,R]$$

En coordonnées polaires le même cercle se définit simplement par :

$$\rho = R$$

Cet exemple simple montre l'intérêt d'utiliser le système de coordonnées polaires.

1.3 VECTEUR VITESSE D'UN POINT

a) Vitesse moyenne

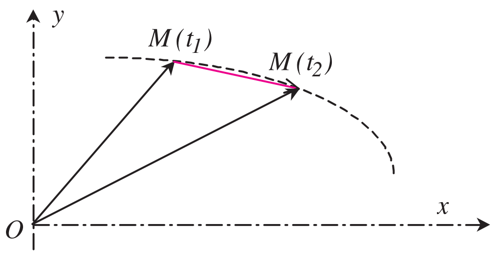


Figure 1.10 Variation de la position dans le temps : vitesse moyenne.

➤ Le même déplacement d'un point M entre 2 positions peut se faire pendant des durées différentes. Pour caractériser un mouvement il peut être intéressant de connaître la distance parcourue par unité de temps c'est-à-dire la vitesse moyenne. Si la position du point mobile M à l'instant t_1 correspond au point $M(t_1) = M_1$ et à l'instant t_2 au point $M(t_2) = M_2$ le vecteur vitesse moyenne se définit par :

$$\vec{V}_m = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{\Delta t} \qquad (1.15)$$

Ce vecteur a pour direction et sens ceux du mouvement (de M_1 vers M_2). La norme renseigne sur la distance parcourue en moyenne par unité de temps.

Une vitesse s'exprime, dans le système international, en mètre/seconde, symbole : $m \cdot s^{-1}$.

b) Vecteur vitesse instantanée

La vitesse instantanée (vitesse à un instant t, celle par exemple qui apparaît sur le compteur de vitesse d'un véhicule) peut se définir comme une vitesse moyenne entre la position $M_1 = M(t)$ du point mobile à la date t et la position $M_2 = M(t + \Delta t)$ de ce même point à la date $t + \Delta t$ où Δt représente une durée très faible. Cette vitesse moyenne tend d'autant plus vers la vitesse instantanée à la date t que la durée Δt tend vers zéro. Le vecteur position $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(t)$ est une fonction du temps et la vitesse instantanée correspond alors à la dérivée par rapport au temps du vecteur position :

$$\vec{V}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM}(t+\Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t} \qquad (1.16)$$

Lorsqu'on considère une durée *élémentaire* dt « infiniment petite » le point mobile passe d'une position M à une position M' « infiniment proche » de M. Le déplacement *élémentaire* correspondant peut s'écrire : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$. La durée élémentaire est choisie suffisamment petite pour que la vitesse moyenne sur le déplacement élémentaire coïncide avec la vitesse instantanée. Avec ces notations, le vecteur vitesse $\vec{V}(t)$, dérivée du vecteur position $\overrightarrow{OM}$, s'écrit :

$$\vec{V}(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} \qquad (1.17)$$

Lorsque le point M' tend vers le point M, la corde MM' tend vers la tangente à la trajectoire au point M. Le vecteur vitesse est un vecteur tangent à la trajectoire au point considéré.

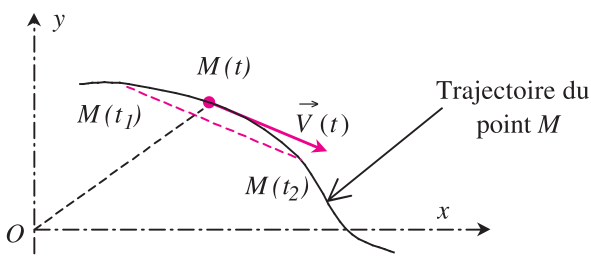


Figure 1.11 Vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ tangent à la trajectoire au point $M(t)$ considéré.

La durée *élémentaire* dt correspond à la différence entre 2 dates infiniment proches et s'appelle aussi la *différentielle* de la variable t.

De même, le vecteur $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$, noté aussi $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}\vec{l}$ est le résultat de la différence entre 2 vecteurs position infiniment proches et s'appelle la *différentielle* du vecteur position. Il correspond aussi à ce qu'on nomme un déplacement *élémentaire* (infiniment petit ou aussi petit que nécessaire). À partir de la définition (1.17) du vecteur vitesse instantanée le déplacement *élémentaire* s'écrit :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \vec{V}(t) \cdot \mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{l} \tag{1.18}$$

c) Expression en coordonnées cartésiennes

À partir de l'expression (1.1) du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ et de la définition (1.17) du vecteur vitesse $\vec{V}$ on obtient :

$$\vec{V}(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}[x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z]}{\mathrm{d}t} \tag{1.19a}$$

En appliquant la règle de dérivation d'une somme l'expression devient :

$$\vec{V}(t) = \frac{\mathrm{d}(x\vec{u}_x)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}(y\vec{u}_y)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}(z\vec{u}_z)}{\mathrm{d}t} \tag{1.19b}$$

Les vecteurs de la base cartésienne sont des vecteurs indépendants du temps. Si le point M est mobile, seules les composantes x, y et z sont des fonctions du temps : $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$. L'expression devient :

$$\vec{V}(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{u}_x + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{u}_y + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{u}_z \tag{1.19c}$$

Par convention et pour alléger les expressions, la « dérivation d'une variable X par rapport au temps t » est notée par la variable surmontée d'un point pour la dérivée première, de 2 points pour la dérivée seconde etc.

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = \dot{X} ; \frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{X} \tag{1.20}$$

Avec cette convention, le vecteur vitesse s'écrit en cartésienne :

$$\vec{V}(t) = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z \tag{1.21a}$$

$$\vec{V}(V_x = \dot{x}, V_y = \dot{y}, V_z = \dot{z}) \tag{1.21b}$$