

# mini Manuel

de

## Mécanique du point

Cours + Exos

**Michel Henry**

Maître de conférences à ESPE de l'Académie de Nantes (Le Mans)  
Agrégré de physique

**Nicolas Delorme**

Maître de conférences à l'université du Maine (Le Mans)

2<sup>e</sup> édition

DUNOD

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1<sup>er</sup> juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du

droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Paris, 2008, 2014  
ISBN 978-2-10-071015-7

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Cinématique du point</b>	<b>1</b>
<b>1.1</b>	<b>Relativité du mouvement : nécessité d'un référentiel</b>	<b>1</b>
	a) Introduction	1
	b) Notion de référentiel	2
	c) Exemples de référentiel à connaître	3
<b>1.2</b>	<b>Repères</b>	<b>4</b>
	a) Repère d'espace	4
	b) Repère de temps	5
	c) Le système de coordonnées cartésiennes	5
	d) Le système de coordonnées polaires	6
	e) Liens entre les systèmes de coordonnées polaires et cartésiennes	9
	f) Le système de coordonnées cylindriques	10
	g) Base fixe et base mobile dans le référentiel d'étude	11
	h) Choix du système de coordonnées	12
<b>1.3</b>	<b>Vecteur vitesse d'un point</b>	<b>13</b>
	a) Vitesse moyenne	13
	b) Vecteur vitesse instantanée	14
	c) Expression en coordonnées cartésiennes	15
	d) Expression en coordonnées polaires	16
	e) Expression en coordonnées cylindriques	20
	f) Vecteur vitesse angulaire	21
	g) Vecteur déplacement élémentaire	22
<b>1.4</b>	<b>Vecteur accélération d'un point</b>	<b>24</b>
	a) Définition	24
	b) Expression en coordonnées cartésiennes	24
	c) Expression en coordonnées polaires	25
	d) Expression en coordonnées cylindriques	26
<b>1.5</b>	<b>Exemples de mouvement</b>	<b>28</b>
	a) Définitions	28
	b) Mouvements rectilignes	28

c) Mouvements circulaires	32
d) Autre type de mouvement : le mouvement parabolique	39
<b>Points clefs</b>	42
<b>Exercices</b>	43
<b>Solutions</b>	46

## **2 Lois de Newton et Forces** **57**

<b>2.1 Principe d'inertie (1re loi de Newton)</b>	<b>57</b>
a) Définitions	57
b) Principe d'inertie : 1re loi de Newton	61
c) Référentiels galiléens	62
<b>2.2 Principe fondamental de la dynamique (2<sup>e</sup> loi de Newton)</b>	<b>64</b>
a) Notion de force	64
b) Principe fondamental de la dynamique	64
<b>2.3 Actions réciproques (3<sup>e</sup> loi de Newton)</b>	<b>67</b>
<b>2.4 Les forces</b>	<b>68</b>
a) Le poids d'un corps : force d'interaction à distance	69
b) Les forces de contact	72
<b>Points clefs</b>	79
<b>Exercices</b>	83
<b>Solutions</b>	88

## **3 Travail, puissance et énergie** **105**

<b>3.1 Travail d'une force</b>	<b>105</b>
a) Définition	105
b) Exemples de calcul du travail d'une force sur un trajet AB	108
c) Puissance d'une force	112
<b>3.2 L'énergie en mécanique</b>	<b>113</b>
a) L'énergie cinétique : une énergie liée au mouvement	113
b) L'énergie potentielle : une énergie liée à la position	115
c) L'énergie potentielle de pesanteur	119
d) L'énergie potentielle élastique	120
e) Force conservative et énergie potentielle	122
f) L'énergie mécanique	123
g) Exemple d'utilisation de l'énergie pour la résolution d'un problème	125

<b>3.3 États liés et stabilité d'un système mécaniquement isolé</b>	<b>128</b>
a) Les états liés	128
b) Stabilité d'un système soumis à une force conservative	129
c) Exemple d'une bille sur un sol en forme de cuvette	129
<b>3.4 Chocs entre particules</b>	<b>131</b>
a) Définition	131
b) Propriétés des chocs	132
c) Détermination des vitesses après le choc	134
<b>Points clefs</b>	140
<b>Exercices</b>	142
<b>Solutions</b>	146
<b>4 Oscillateurs mécaniques libres</b>	<b>157</b>
<b>4.1 Oscillateur harmonique</b>	<b>157</b>
a) Définitions	157
b) Exemples d'oscillateurs harmoniques	160
c) Étude énergétique de l'oscillateur harmonique	168
<b>4.2 Oscillateur amorti par frottement visqueux</b>	<b>171</b>
a) Équation différentielle et solutions	171
b) Oscillateur à frottement faible	173
c) Oscillateur à frottement fort	179
d) Cas limite de l'amortissement critique	182
e) Étude énergétique de l'oscillateur amorti	184
<b>Points clefs</b>	187
<b>Exercices</b>	188
<b>Solutions</b>	191
<b>5 Oscillateurs mécaniques forcés</b>	<b>197</b>
<b>5.1 Oscillations forcées</b>	<b>197</b>
a) Introduction	197
b) Équation différentielle du mouvement	198
<b>5.2 Étude de l'élongation</b>	<b>201</b>
a) Expression de l'amplitude complexe	201
<b>5.3 Étude de la vitesse</b>	<b>209</b>
a) Expression de la vitesse complexe	209
b) Résonance de vitesse	209

<b>5.4 Aspect énergétique</b>	<b>213</b>
a) Transfert de puissance	213
b) Facteur de qualité et bande passante	215
<b>Points clefs</b>	218
<b>Exercices</b>	219
<b>Solutions</b>	221
<b>6 Solide mobile autour d'un axe fixe</b>	<b>225</b>
<b>6.1 Éléments cinétiques d'un solide</b>	<b>225</b>
a) Définition du solide	225
b) Éléments cinétiques pour un solide	227
<b>6.2 Mouvement d'un solide</b>	<b>228</b>
a) Mouvement d'ensemble, mouvement propre	228
b) Solide mobile autour d'un axe fixe	229
c) Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe	232
<b>6.3 Théorème du moment cinétique</b>	<b>237</b>
a) Cas d'une masse ponctuelle	237
b) Cas d'un solide	237
c) Théorème du moment cinétique pour un solide mobile autour d'un axe fixe.	238
d) Moment d'une force par rapport à un axe	239
<b>6.4 Exemples d'application</b>	<b>242</b>
a) Introduction	242
b) Équilibre d'un solide mobile autour d'un axe fixe	243
c) Conservation du moment cinétique	243
d) Mouvement d'un pendule de torsion	244
<b>Points clefs</b>	246
<b>Exercices</b>	247
<b>Solutions</b>	248
<b>Annexe : Utilisation de la représentation complexe</b>	<b>253</b>
<b>Index</b>	<b>259</b>

- 1.1 Relativité du mouvement : nécessité d'un référentiel
- 1.2 Repère de temps et d'espace
- 1.3 Vecteur vitesse d'un point mobile
- 1.4 Vecteur accélération d'un point mobile
- 1.5 Exemples de mouvement
- 1.6 Récapitulatif

- L'objet de la cinématique du point est l'étude du mouvement d'un point sans se préoccuper des causes (les forces) qui lui donnent naissance
- Connaître le système de coordonnées cartésiennes et polaires ou cylindriques
- Connaître l'expression des vecteurs position, vitesse et accélération dans les systèmes de coordonnées cartésiennes et cylindriques
- Connaître la définition de quelques mouvements particuliers

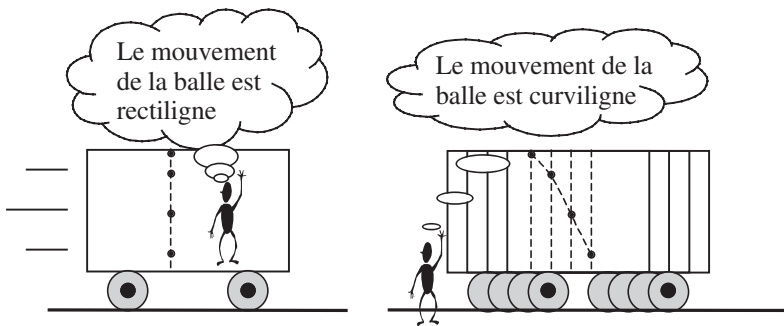
## 1.1 RELATIVITÉ DU MOUVEMENT : NÉCESSITÉ D'UN RÉFÉRENTIEL

### a) Introduction

L'étude du mouvement d'un point implique nécessairement la présence simultanée du point et d'un observateur qui analyse le mouvement de ce point. Selon la position de l'observateur les conclusions peuvent être différentes alors que l'étude porte sur le même point. Considérons l'exemple simple de la chute d'une bille réalisée dans le wagon d'un train qui se déplace sur une voie rectiligne à vitesse constante. Les résultats de l'étude de ce mouvement obtenus par un observateur assis dans ce wagon et un autre immobile sur le quai seront inévitablement différents (voir *figure 1.1*).

Le mouvement d'un point est donc *relatif* à un observateur fixe dans un *référentiel* d'étude.

- Il n'est pas faux par exemple de dire que le soleil est en mouvement par rapport à la Terre si l'observateur est fixe sur Terre. Il faut donc à chaque fois préciser par rapport à quoi l'étude du mouvement est effectuée.
- Dans le langage courant ce référentiel est sous-entendu. Dans l'expression « le train se déplace à vitesse constante » il est évident que c'est par rapport au sol et donc la Terre. Le voyageur assis dans un wagon du train peut dire : « je suis immobile », tout le monde comprendra que c'est par rapport au siège du wagon et du wagon lui-même. Il peut dire aussi « je me déplace à grande vitesse » et on comprendra que c'est par rapport à la Terre.



**Figure 1.1** Relativité du mouvement pour la chute d'une balle dans un wagon en mouvement rectiligne uniforme : positions d'une balle à différents instants pour un observateur dans le wagon et pour un autre immobile sur le quai.



En mécanique, pour qu'il n'y ait pas de doute possible, il est impératif de préciser par rapport à quoi l'étude du mouvement sera effectuée c'est-à-dire indiquer le *référentiel* choisi.

## b) Notion de référentiel

Un *référentiel* (ou *solide de référence*) est un ensemble de points tous fixes les uns par rapport aux autres. L'observateur qui étudie le mouvement d'un point est lui-même immobile dans ce référentiel.



Exemple : l'observateur est dans le train, le référentiel est le train. L'observateur est sur le quai, le référentiel est la Terre.



- Un référentiel peut être caractérisé par son nom. Dans les exemples précédents on peut parler du référentiel « train » (constitué de tout ce qui est fixe par rapport au train) ou du référentiel « Terrestre » (constitué de tout ce qui est fixe par rapport à la Terre) sans qu'il y ait d'ambiguïté.
- Un référentiel peut aussi être caractérisé par un point  $O$  et trois directions fixes dans ce référentiel c'est-à-dire par un repère  $(O, x, y, z)$ . Tout ce qui est fixe dans ce repère constitue le référentiel.

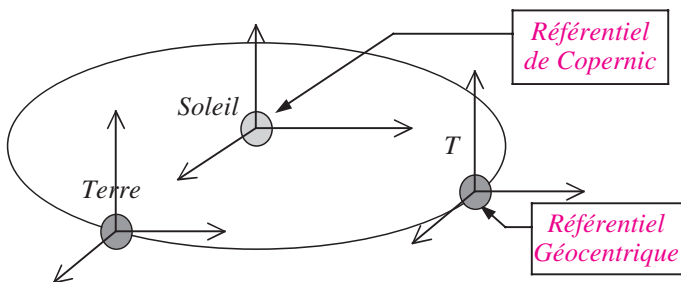
Par exemple, pour l'étude du mouvement d'une bille dans un laboratoire il est possible de choisir un point  $O$  correspondant à la position de la bille à un instant initial et 3 axes  $Ox$  (longueur),  $Oy$  (largeur) et  $Oz$  (hauteur) liés au laboratoire. Le repère  $R(O, x, y, z)$  définit le référentiel d'étude correspondant au référentiel « laboratoire ».



Pour un référentiel donné il existe une infinité de repères possibles (infinité de possibilités de choisir une origine et 3 axes)  
 Pour un repère donné il n'existe qu'un référentiel associé (tout ce qui est fixe dans le repère forme le référentiel)

### c) Exemples de référentiel à connaître

- Le **référentiel de Copernic** (ou héliocentrique du grec *Hêlios* signifiant Soleil). L'origine du repère définissant ce référentiel correspond au centre d'inertie du système solaire (pratiquement confondu avec le centre d'inertie du Soleil). Les 3 axes du repère sont dirigés vers 3 étoiles qui s'éloignent du Soleil toujours dans la même direction.



**Figure 1.2** Les référentiels de Copernic et géocentrique : le référentiel géocentrique est en mouvement de translation circulaire uniforme par rapport au référentiel de Copernic.

- Le **référentiel géocentrique** (du grec *géo* signifiant Terre). Le repère caractérisant ce référentiel a pour origine le centre de la Terre et les 3 axes sont des axes qui restent parallèles à ceux du référentiel de Copernic.

► Le **référentiel terrestre** : l'origine de repère choisi est liée à la Terre ainsi que les 3 axes.

Le référentiel terrestre est un référentiel en rotation uniforme par rapport au référentiel géocentrique (rotation autour d'un axe Nord-Sud fixe dans le référentiel géocentrique).

Le référentiel géocentrique est en mouvement de translation circulaire uniforme par rapport au référentiel de Copernic (voir figure 1.2).

Un référentiel est défini soit par son nom (exemple : référentiel terrestre) soit par un de ses repères  $R(O, x, y, z)$ .

## 1.2 REPÈRES

L'étude cinématique du mouvement d'un point revient à pouvoir répondre aux questions « où ? » (où se trouve le point ?) et « quand ? » (à quel moment dans le temps ?). Pour répondre à ces questions il est nécessaire de définir un repère d'espace et un repère de temps.

### a) Repère d'espace

Un repère d'espace est défini par une origine  $O$  qui est fixe dans le référentiel et des axes de référence orthonormés c'est-à-dire orthogonaux et munis d'une unité de longueur (vecteur unitaire de norme égale à 1) qui vont permettre à l'observateur de juger dans quelle direction se trouve le point. Les trois axes forment un trièdre direct (voir figure 1.3).

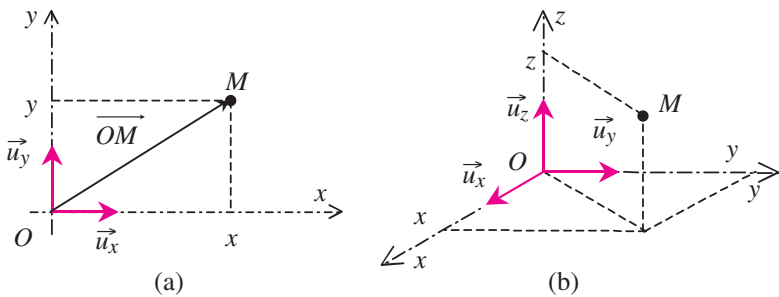


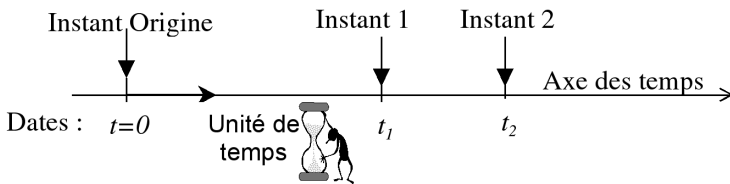
Figure 1.3 Repère dans un plan (a) et dans l'espace (b).

L'étude du mouvement dans un plan nécessite 2 axes ( $Ox, Oy$ ) et dans l'espace 3 axes ( $Ox, Oy, Oz$ ). À chacun de ces axes est associé un vecteur unitaire respectivement  $\vec{u}_x$ ,  $\vec{u}_y$  et  $\vec{u}_z$ . Les vecteurs ( $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ ) forment une base orthonormée.

## b) Repère de temps

Pour pouvoir répondre à la question « quand? » il faut ajouter un repère de temps c'est-à-dire une grandeur qui est la variable de temps. La durée écoulée entre 2 événements ou 2 instants est mesurée au moyen d'une horloge ou chronomètre. Tout mouvement périodique (mouvement qui se reproduit identiquement à lui-même à intervalle de temps successifs et égaux pris comme unité de temps) peut servir d'horloge. Le repère de temps est constitué d'une origine des temps fixée par l'observateur et d'une durée unitaire fixant une chronologie.

À chaque instant, on associe un nombre réel  $t$  appelé date qui correspond à la durée écoulée depuis l'instant origine.



**Figure 1.4** Repère de temps : la durée  $\Delta t$  entre les instants 1 et 2 correspond à la différence de leur date  $t_2 - t_1$ .

En mécanique classique ou newtonienne, on postule que le repère de temps est le même pour tous les référentiels et que le temps s'écoule de la même manière dans des référentiels en mouvement les uns par rapport aux autres.

## c) Le système de coordonnées cartésiennes

Dans le repère d'espace  $(O, x, y, z)$  défini précédemment (voir *figure 1.3*), un point  $M$  est repéré par ses coordonnées d'espace  $(x, y, z)$  correspondant à la mesure algébrique de la projection de  $M$  successivement sur les 3 axes du repère. Ces 3 coordonnées sont de même nature et homogènes à une longueur.

Dans le référentiel  $R$  d'étude, la base associée à ce système d'axe  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  est une base orthonormée qui ne change pas au cours du temps. On dit encore que la base est *fixe* dans  $R$ .



Quand on dit que la base est *fixe* dans  $R$  cela signifie que ces vecteurs gardent la même direction, le même sens et la même norme au cours du temps. Ces vecteurs ne sont pas liés à un point : ils peuvent être représentés n'importe où dans l'espace mais par habitude et commodité ils sont en général représentés au point origine  $O$ .

Il est pratique de positionner le point  $M$  en se donnant le vecteur position  $\overrightarrow{OM}$ . Les composantes de ce vecteur, dans la base cartésienne  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  correspondent alors aux coordonnées du point  $M$  :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z \quad (1.1)$$



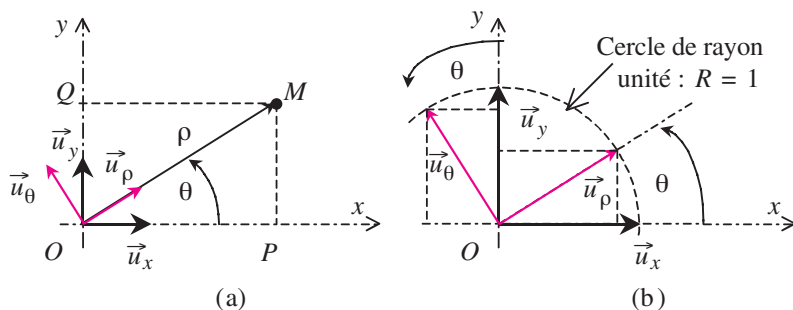
$(x, y, z)$  sont les coordonnées cartésiennes du point  $M$ .

$(x, y, z)$  sont aussi les composantes du vecteur position  $\overrightarrow{OM}$  dans la base cartésienne  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ .

### d) Le système de coordonnées polaires

Il existe d'autres systèmes permettant de positionner un point dans le repère d'étude comme par exemple le système de coordonnées polaires utilisé dans le cas où le point  $M$  est mobile dans un plan.

Le point  $M$  est parfaitement repéré si on connaît la distance  $OM = \rho$  et l'angle  $\theta$  que fait le segment  $OM$  avec l'axe  $Ox$  (voir *figure 1.5 (a)*).



**Figure 1.5** Les coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$  et la base associée  $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ .

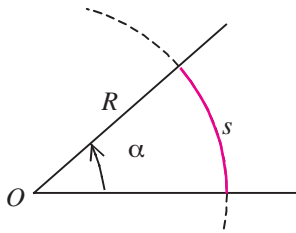
- Le point origine  $O$  correspond au « pôle » d'où le terme coordonnée polaire. La longueur du segment  $OM$  correspond à sa **coordonnée radiale**. Elle est notée  $\rho$  (rhô : lettre grecque) ou  $r$ .
- L'autre coordonnée est la **coordonnée angulaire** également appelée angle polaire ou azimut et noté  $\theta$  (thêta : lettre grecque). Cet angle est mesuré par rapport à l'axe des abscisses  $Ox$  appelé alors axe polaire.



Contrairement aux coordonnées cartésiennes  $x$  et  $y$ , les coordonnées polaires  $\rho$  et  $\theta$  ne sont pas de même nature. La coordonnée radiale  $\rho$  a la dimension d'une longueur comme  $x$  et  $y$ . La coordonnée angulaire s'exprime en radian qui est une unité d'angle sans dimension (voir encart 1.1).

### Encart 1.1 Définition d'un angle

Soit un cercle de rayon  $R$ , de centre  $O$  et un angle  $\alpha$  de sommet  $O$  exprimé en radian. La mesure  $s$  de la longueur de l'arc de cercle intercepté par cet angle est donnée par :  $s = R\alpha$ . L'angle  $\alpha$  apparaît comme le rapport de 2 longueurs et est donc sans dimension.



Mesure  $s$  de l'arc de cercle :

$$s = R\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{s}{R}$$

Figure 1.6 Définition d'un angle exprimé en radian.

► Pour exprimer le vecteur position  $\overrightarrow{OM}$  il est commode d'introduire une nouvelle base orthonormée directe  $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$  naturellement associée à ce système de coordonnées et définie de la façon suivante (voir figure 1.5) :

- $\vec{u}_\rho$  est le vecteur unitaire suivant la direction et le sens de  $O$  vers  $M$ . C'est le vecteur *radial* (suivant le rayon) ;
- $\vec{u}_\theta$  est le vecteur unitaire perpendiculaire au vecteur  $\vec{u}_\rho$ . Il est obtenu en effectuant une rotation d'un angle de  $+\frac{\pi}{2}$  à partir du vecteur  $\vec{u}_\rho$ . C'est le vecteur *orthoradial* (perpendiculaire au rayon).

Le vecteur position s'écrit alors :

$$\overrightarrow{OM} = \|\overrightarrow{OM}\| \vec{u}_\rho = \rho \vec{u}_\rho \quad (1.2)$$



$(\rho, \theta)$  sont les coordonnées polaires du point  $M$  mais ne correspondent pas aux composantes du vecteur position  $\overrightarrow{OM}$  (contrairement à ce qu'on obtient en coordonnées cartésiennes). Les composantes de ce vecteur position sont  $(\rho, 0)$  : il n'y a pas de composante suivant  $\vec{u}_\theta$  mais uniquement une composante  $\rho$  suivant  $\vec{u}_\rho$ .

### Encart 1.2 Le produit scalaire

► Le produit scalaire est une opération entre deux vecteurs :  
Le résultat est un scalaire :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = ab \cos \alpha$$

avec  $\alpha$  l'angle que fait le vecteur  $\vec{b}$  avec le vecteur  $\vec{a}$ .

Si le vecteur  $\vec{b}$  est unitaire ( $\|\vec{b}\| = 1$ ) alors le produit scalaire représente la projection du vecteur  $\vec{a}$  sur la direction de  $\vec{b}$ .

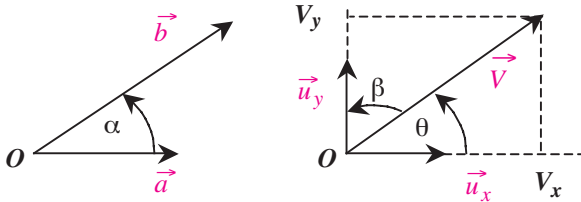


Figure encart : Produit scalaire et projection d'un vecteur.

► Projection d'un vecteur  $\vec{V}$  sur la direction  $\vec{u}_x$  (vecteur unitaire) :

$$\vec{V} \cdot \vec{u}_x = \|\vec{V}\| \|\vec{u}_x\| \cos \theta = V \cos \theta = V_x$$

► Projection d'un vecteur  $\vec{V}$  sur la direction  $\vec{u}_y$  (vecteur unitaire) :

$$\vec{V} \cdot \vec{u}_y = \|\vec{V}\| \|\vec{u}_y\| \cos \beta = V \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = V \sin \theta = V_y$$

► Expression du produit scalaire en fonction des composantes :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_a \vec{u}_x + y_a \vec{u}_y + z_a \vec{u}_z) \cdot (x_b \vec{u}_x + y_b \vec{u}_y + z_b \vec{u}_z)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$$

► Produit scalaire et norme :

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = \|\vec{a}\|^2 = a^2 = x_a^2 + y_a^2 + z_a^2$$

► **Angle** entre deux vecteurs :  $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab}$

► **Propriétés** :  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  si  $\vec{a}$  est perpendiculaire à  $\vec{b}$

## e) Liens entre les systèmes de coordonnées polaires et cartésiennes

- Avec les notations de la *figure 1.5 (a)* nous pouvons écrire en utilisant le triangle rectangle (*OPM*) :

$$\cos\theta = \frac{OP}{OM} = \frac{x}{\rho} \Rightarrow x = \rho \cos\theta \quad (1.3)$$

$$\sin\theta = \frac{PM}{OM} = \frac{OQ}{\rho} = \frac{y}{\rho} \Rightarrow y = \rho \sin\theta \quad (1.4)$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x} \quad (1.5)$$

- En appliquant le théorème de Pythagore on a :

$$OM = \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.6)$$

On en déduit alors les expressions suivantes :

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (1.7)$$

$$\sin\theta = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (1.8)$$



Si les coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$  sont connues on obtient les coordonnées cartésiennes en utilisant les relations (1.3) et (1.4).

Si les coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  sont connues on obtient les coordonnées polaires en utilisant les relations (1.5), (1.6) (1.7) et (1.8).

- De même il est possible de passer d'une base d'un système de coordonnées à l'autre. En s'aidant de la *figure 1.5 (b)* les composantes des vecteurs unitaires  $\vec{u}_\rho$  et  $\vec{u}_\theta$  dans la base cartésienne sont :

$$\vec{u}_\rho = (\cos\theta)\vec{u}_x + (\sin\theta)\vec{u}_y \quad (1.9)$$

$$\vec{u}_\theta = (-\sin\theta)\vec{u}_x + (\cos\theta)\vec{u}_y \quad (1.10)$$

De même, en inversant les relations précédentes on peut écrire :

$$\vec{u}_x = (\cos\theta)\vec{u}_\rho - (\sin\theta)\vec{u}_\theta \quad (1.11)$$

$$\vec{u}_y = (\sin\theta)\vec{u}_\rho + (\cos\theta)\vec{u}_\theta \quad (1.12)$$



Un moyen simple de retrouver rapidement les composantes d'un vecteur sur une base est d'utiliser les propriétés du produit scalaire (voir encart 1.2). En effet on peut écrire par exemple :

$$\text{Composante de } \vec{u}_\rho \text{ sur } \vec{u}_x : \vec{u}_\rho \cdot \vec{u}_x = \|\vec{u}_\rho\| \|\vec{u}_x\| \cos\theta = \cos\theta$$

$$\text{Composante de } \vec{u}_\rho \text{ sur } \vec{u}_y : \vec{u}_\rho \cdot \vec{u}_y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$

On retrouve ainsi la relation (1.9).

Avec ses relations, il est toujours possible de passer d'un système de coordonnées à l'autre.



Si l'étude est effectuée en coordonnées cartésiennes seules doivent apparaître les grandeurs  $(x, y, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ . En coordonnées polaires n'apparaîtront que les grandeurs  $(\rho, \theta, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ . Il ne faut en aucun cas conserver des expressions comportant un mélange de ses grandeurs.

## f) Le système de coordonnées cylindriques

Si le point doit être repéré dans l'espace il est possible d'utiliser les coordonnées cylindriques. Il suffit de compléter le système de coordonnées polaires par un troisième axe : l'axe  $Oz$  avec sa coordonnée cartésienne  $z$  (appelée la cote).

La projection  $P$  du point  $M$  dans le plan  $(O, x, y)$  est repérée en coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$ . La projection de  $M$  sur l'axe  $Oz$  donne la cote  $z$  (voir figure 1.7).

La base associée est composée de la base polaire et du vecteur unitaire  $\vec{u}_z$  suivant l'axe  $Oz$ .

Le vecteur position  $\overrightarrow{OM}$  s'obtient en utilisant la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = \rho \vec{u}_\rho + z \vec{u}_z \quad (1.13)$$

$$\|\overrightarrow{OM}\| = OM = \sqrt{\rho^2 + z^2} \quad (1.14)$$

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Les coordonnées cylindriques de  $M$  sont donc  $(\rho, \theta, z)$ . Les composantes du vecteur position  $\overrightarrow{OM}$  sont  $(\rho, 0, z)$  dans la base cylindrique  $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ .



Le point  $M$  est situé sur un cylindre d'axe  $Oz$ , de rayon  $\rho$  d'où le terme coordonnées cylindriques. Pour positionner un point sur le cylindre il suffit de préciser la cote  $z$  et la coordonnée angulaire  $\theta$ .



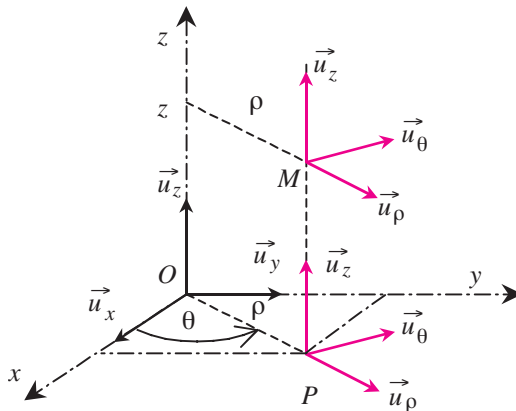


Figure 1.7 Le système de coordonnées cylindriques.

### g) Base fixe et base mobile dans le référentiel d'étude

Dans le repère choisi du référentiel d'étude il est possible d'utiliser différentes bases.

- La base du système de coordonnées cartésiennes ( $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ ) est une base dite « fixe » c'est-à-dire que ces vecteurs gardent la même norme unitaire, la même direction et le même sens au cours du temps.

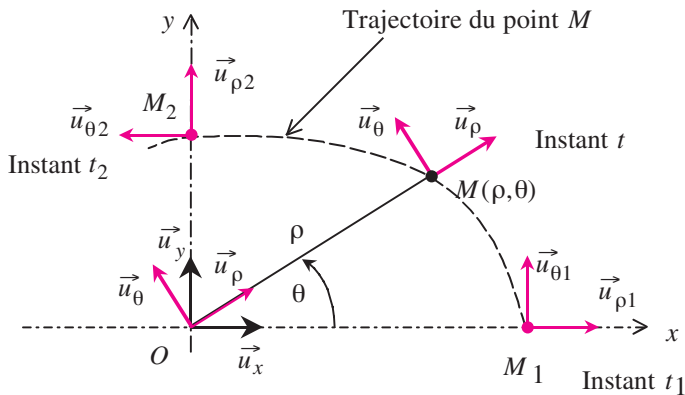


Figure 1.8 Représentation de la base polaire ( $\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta$ ) à différents instants au cours du mouvement d'un point  $M$  dans le plan.

- La base ( $\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta$ ) associée aux coordonnées polaires est dite « mobile ». Au cours du déplacement du point  $M$  dans le plan, le vecteur unitaire  $\vec{u}_\rho$  suivant  $OM$  change de direction ainsi que  $\vec{u}_\theta$  (voir figure 1.8). Ces vecteurs, définis à partir du point  $M$ , peuvent

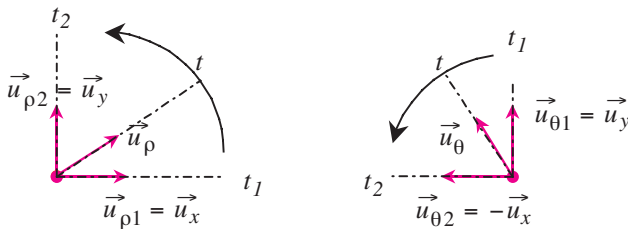
être représentés en n'importe quel point du plan. Par habitude ou commodité ils sont en général représentés en  $M$  ou bien en  $O$ . Cela signifie aussi que ces vecteurs ne peuvent subir que des rotations au cours du temps.

La *figure 1.8* représente la trajectoire d'un point  $M$  dans le plan. À l'instant  $t$ , il se trouve au point de coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$ .

- ▶ À l'instant  $t_1$ ,  $M$  est en  $M_1$  sur l'axe  $Ox$ , de coordonnées cartésiennes  $(x, y) = (x_1, 0)$  et polaires  $(\rho, \theta) = (\rho_1, \theta_1) = (x_1, 0)$ .
- ▶ À l'instant  $t_2$ ,  $M$  est en  $M_2$  sur l'axe  $Oy$ , de coordonnées cartésiennes  $(x, y) = (0, y_2)$  et polaires  $(\rho, \theta) = (\rho_2, \theta_2) = \left(y_2, \frac{\pi}{2}\right)$ .

La base polaire  $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$  est représentée à ces différents instants  $t_1$  et  $t_2$ . On constate alors qu'à l'instant  $t_1$ , les vecteurs de base  $(\vec{u}_{\rho 1}, \vec{u}_{\theta 1})$  se confondent avec la base cartésienne  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ . À l'instant  $t_2$ , le vecteur  $\vec{u}_\rho = \vec{u}_{\rho 2}$  correspond au vecteur  $\vec{u}_y$  alors que le vecteur  $\vec{u}_\theta = \vec{u}_{\theta 2} = \vec{u}_{\frac{\pi}{2}}$  correspond au vecteur  $(-\vec{u}_x)$ .

En représentant ces vecteurs en un même point (voir *figure 1.9*), on constate bien la rotation des vecteurs de la base polaire. En considérant les expressions (1.9) et (1.10) ces vecteurs apparaissent bien comme une fonction de l'angle  $\theta$ .



**Figure 1.9** Rotation des vecteurs de la base polaire : représentation à différents instants définis sur la *figure 1.8*.

## h) Choix du système de coordonnées



Le choix du système de coordonnées dépendra du type de mouvement du point mobile. Dans le cas d'un mouvement rectiligne il est évident que le système de coordonnées cartésiennes est le mieux adapté. Ce ne sera plus le cas pour des mouvements curvilignes pour lesquels le système de coordonnées polaires ou cylindriques sera le plus souvent utilisé.



Exemple : trajectoire circulaire

On peut donner comme exemple le cas d'un mouvement circulaire. L'équation d'un cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$  s'écrit en cartésienne :

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad \text{et} \quad x \in [-R, R]; y \in [-R, R]$$

En coordonnées polaires le même cercle se définit simplement par :

$$\rho = R$$

Cet exemple simple montre l'intérêt d'utiliser le système de coordonnées polaires.

## 1.3 VECTEUR VITESSE D'UN POINT

### a) Vitesse moyenne

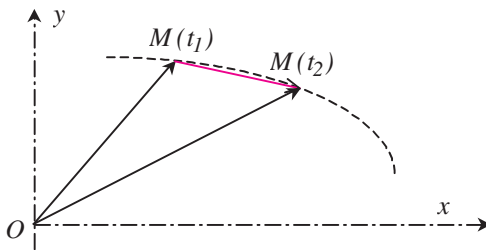


Figure 1.10 Variation de la position dans le temps : vitesse moyenne.

- Le même déplacement d'un point  $M$  entre 2 positions peut se faire pendant des durées différentes. Pour caractériser un mouvement il peut être intéressant de connaître la distance parcourue par unité de temps c'est-à-dire la vitesse moyenne. Si la position du point mobile  $M$  à l'instant  $t_1$  correspond au point  $M(t_1) = M_1$  et à l'instant  $t_2$  au point  $M(t_2) = M_2$  le vecteur vitesse moyenne se définit par :

$$\vec{V}_m = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{\Delta t} \quad (1.15)$$



Ce vecteur a pour direction et sens ceux du mouvement (de  $M_1$  vers  $M_2$ ). La norme renseigne sur la distance parcourue en moyenne par unité de temps.

Une vitesse s'exprime, dans le système international, en mètre/seconde, symbole :  $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

## b) Vecteur vitesse instantanée

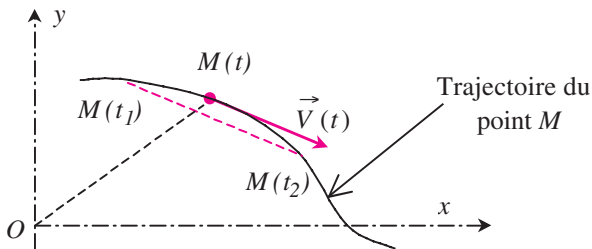
La vitesse instantanée (vitesse à un instant  $t$ , celle par exemple qui apparaît sur le compteur de vitesse d'un véhicule) peut se définir comme une vitesse moyenne entre la position  $M_1 = M(t)$  du point mobile à la date  $t$  et la position  $M_2 = M(t + \Delta t)$  de ce même point à la date  $t + \Delta t$  où  $\Delta t$  représente une durée très faible. Cette vitesse moyenne tend d'autant plus vers la vitesse instantanée à la date  $t$  que la durée  $\Delta t$  tend vers zéro. Le vecteur position  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(t)$  est une fonction du temps et la vitesse instantanée correspond alors à la dérivée par rapport au temps du vecteur position :

$$\vec{V}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{OM}(t + \Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t} \quad (1.16)$$

Lorsqu'on considère une durée *élémentaire*  $dt$  « infiniment petite » le point mobile passe d'une position  $M$  à une position  $M'$  « infiniment proche » de  $M$ . Le déplacement *élémentaire* correspondant peut s'écrire :  $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = d\overrightarrow{OM}$ . La durée élémentaire est choisie suffisamment petite pour que la vitesse moyenne sur le déplacement élémentaire coïncide avec la vitesse instantanée. Avec ces notations, le vecteur vitesse  $\vec{V}(t)$ , dérivée du vecteur position  $\overrightarrow{OM}$ , s'écrit :

$$\vec{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \quad (1.17)$$

Lorsque le point  $M'$  tend vers le point  $M$ , la corde  $MM'$  tend vers la tangente à la trajectoire au point  $M$ . Le vecteur vitesse est un vecteur tangent à la trajectoire au point considéré.



**Figure 1.11** Vecteur vitesse  $\vec{V}(t)$  tangent à la trajectoire au point  $M(t)$  considéré.

La durée *élémentaire*  $dt$  correspond à la différence entre 2 dates infiniment proches et s'appelle aussi la *différentielle* de la variable  $t$ .

De même, le vecteur  $d\overrightarrow{OM}$ , noté aussi  $d\overrightarrow{OM} = d\vec{l}$  est le résultat de la différence entre 2 vecteurs position infiniment proches et s'appelle la *différentielle* du vecteur position. Il correspond aussi à ce qu'on nomme un déplacement *élémentaire* (infiniment petit ou aussi petit que nécessaire). À partir de la définition (1.17) du vecteur vitesse instantanée le déplacement *élémentaire* s'écrit :

$$d\overrightarrow{OM} = \vec{V}(t) \cdot dt = d\vec{l} \quad (1.18)$$

### c) Expression en coordonnées cartésiennes

À partir de l'expression (1.1) du vecteur position  $\overrightarrow{OM}$  et de la définition (1.17) du vecteur vitesse  $\vec{V}$  on obtient :

$$\vec{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d[x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z]}{dt} \quad (1.19a)$$

En appliquant la règle de dérivation d'une somme l'expression devient :

$$\vec{V}(t) = \frac{d(x\vec{u}_x)}{dt} + \frac{d(y\vec{u}_y)}{dt} + \frac{d(z\vec{u}_z)}{dt} \quad (1.19b)$$

Les vecteurs de la base cartésienne sont des vecteurs indépendants du temps. Si le point  $M$  est mobile, seules les composantes  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont des fonctions du temps :  $x = x(t)$  ;  $y = y(t)$  ;  $z = z(t)$ . L'expression devient :

$$\vec{V}(t) = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z \quad (1.19c)$$



Par convention et pour alléger les expressions, la « dérivation d'une variable  $X$  par rapport au temps  $t$  » est notée par la variable surmontée d'un point pour la dérivée première, de 2 points pour la dérivée seconde etc.

$$\frac{dX}{dt} = \dot{X} ; \frac{d^2X}{dt^2} = \ddot{X} \quad (1.20)$$

Avec cette convention, le vecteur vitesse s'écrit en cartésienne :

$$\vec{V}(t) = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z \quad (1.21a)$$

$$\vec{V}(V_x = \dot{x}, V_y = \dot{y}, V_z = \dot{z}) \quad (1.21b)$$