idem

La science selon HENRI POINCARÉ

La science et l'hypothèse
La valeur de la science
Science et méthode

TEXTES PRÉSENTÉS PAR JEAN-PIERRE BOURGUIGNON

DUNOD

Illustration de couverture : Henri Poincaré © Hachette Livre

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.
Le Code de la propriété intellectuelle du 1er juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.
Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

DANGER
LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

© Dunod, Paris, 2013
978-2-10-070234-3

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Présentation

Le génie d'Henri Poincaré a rayonné sur la science de son temps : dans une période charnière où des avancées extraordinaires ont vu le jour, il a donné des contributions très remarquables dans des sujets très divers et ouvert de nombreux nouveaux chapitres (en mécanique céleste, fondant la dynamique moderne, en mathématiques pour l'étude des espaces avec sa fameuse « Analysis Sitûs »…) ; cependant réduire l'influence d'Henri Poincaré dans le monde des sciences à cela serait gravement fautif car il a aussi apporté à la philosophie des sciences des clarifications décisives. Il l'a fait dans des textes limpides, accessibles au grand public, écrits dans une langue simple et efficace, ce qui est un cas assez unique. Il y va droit au but pour désigner les objets qui l'intéressent et les questions dont il s'occupe. De plus, bien que le paysage scientifique ait considérablement changé en un siècle, ses textes restent d'une grande actualité comme modèles d'exposition et pour son traitement des relations entre science et société.

Il est donc particulièrement bienvenu que *La Science et l'hypothèse* (1902), *La valeur de la Science* (1905) et *Science et méthode* (1908) soient rassemblés dans ce volume pour une nouvelle génération de lecteurs.

L'objet de cette présentation est de mettre en exergue quelques-uns des traits saillants de ces trois textes. Ils entretiennent entre eux des liens étroits, comme le montrent leurs tables des matières, tout en étant conçus avec des points de vue assez différents, comme en rendent bien compte leurs introductions.

La Science abordée comme un tout

Henri Poincaré conçoit la Science comme un tout, parce qu'elle est tout à la fois le lieu d'action de la méthode scientifique et s'enrichit de ses conquêtes. À propos de son œuvre, il n'y a donc pas lieu de parler d'interdisciplinarité puisqu'il voit la Science comme un continuum dont les composantes sont en interaction constante.

Dans ces trois livres, il dresse un panorama des sciences en prenant soin de mettre en perspective la façon dont la théorie structure la pensée scientifique, tout en accordant une grande place à l'expérience et aux conditions dans lesquelles elle est menée pour que l'on puisse conduire une analyse fondée des différents champs scientifiques. Cependant, dans chaque livre, un aspect prend une place particulière : l'hypothèse dans le premier, la méthode dans le troisième (titres obligent), et la vérité dans la second.

Il y fait une place spéciale aux mathématiques, un des domaines qu'il a marqué de façon exceptionnelle, et y développe des arguments très forts pour justifier ce qui est, en fait, une petite révolution : l'affirmation explicite de leur autonomie par rapport au monde sensible. Ce faisant, il donne toute sa place à la notion de modèle mathématique, sans que cette dénomination soit solennellement introduite. Il le fait notamment à propos de la géométrie qui a, trop longtemps, pâti de son étymologie la liant à la « *mesure de la Terre* ». Il argue que « *les axiomes géométriques… sont des conventions* » quand, quelques décennies avant 1900, on trouvait encore des mathématiciens qui renâclaient à accepter les géométries non-euclidiennes parce qu'elles seraient contradictoires avec le monde sensible.

Pour lui cette libre activité de l'esprit est le fondement de la rigueur « *mais entendons-nous : ces décrets s'imposent à notre science, qui, sans eux, serait impossible ; ils ne s'imposent pas à la nature* ». C'est dans cette dialectique que se déploie la Science sous ces différentes dimensions pour Henri Poincaré.

Si mathématiques et physique, et cette science déclinée de plusieurs façons, constituent le plat de choix des explorations auxquelles Henri Poincaré invite ses lecteurs, il convient de souligner la place qu'il fait à une question de biologie humaine tout à fait intéressante, à savoir la restitution de la troisième dimension par la vision binoculaire. Un des points, de grande portée épistémologique, qu'il discute notamment est le recours à un phénomène non-linéaire, l'intensité de l'effort musculaire pour la mise au point visuelle pour prendre connaissance du monde qui nous entoure, dont on donne pourtant un modèle linéaire. Il fait aussi une grande place à l'astronomie du fait de la parfaite connaissance qu'il en a et de son rôle dans la constitution de la pensée scientifique au cours de l'Histoire.

La place de la vérité

Henri Poincaré ne fait pas mystère de ce que la recherche de la vérité est « *la seule fin digne de notre activité* ». Là encore, dans le cadre de la « totalisation » déjà notée à propos de l'étude de la science, il insiste sur le fait que, si la morale et la science sont des catégories indépendantes, la recherche de la vérité dans ces deux domaines est le cœur des activités humaines. Pour lui, « *il ne peut pas y avoir de science immorale, pas plus qu'il ne peut y avoir de morale scientifique* », formule souvent reprise mais dont le sens ne doit pas être dévoyé : par là il veut signifier que la science est la quête de compréhension du monde et pas l'accumulation de résultats, qui peuvent bien entendu être mésutilisés, alors que l'adjectif « *scientifique* » accolé à « *morale* » fait référence à l'impossibilité de fonder la morale « *dans la science* ».

Sans confondre « *vérité* » et « *certitude* », il est intéressant de constater que, dans son étude de la nature, il fait une place particulière au hasard et au calcul des probabilités. Il commence par considérer comme un fait

© Dunod – Toute reproduction non autorisée est un délit.

acquis que les scientifiques sont « *devenus des déterministes* » (ce qui pourrait donner à ses contributions un caractère suranné vu la place considérable prise au XX^{e} siècle par la théorie des probabilités dans l'ensemble de la Science et la nouvelle approche du déterminisme qu'elle a nourrie) mais, très vite, il se reprend pour blâmer cette réduction du hasard à l'ignorance des causes. S'appuyant sur la valeur du calcul des probabilités pour « *le directeur d'une compagnie d'assurances* », il entreprend une analyse dans laquelle il entrevoit un phénomène d'une importance considérable dans la Science, à savoir que « *de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux* ». Les nombreux exemples qu'il explore pour discuter des différentes facettes du hasard sont particulièrement bien choisis… et toujours d'actualité comme celui de la météorologie, dont il parle en général et en particulier.

Science et société

Henri Poincaré n'élude pas la question de la motivation des scientifiques dans leur quête de connaissances : doivent-ils se laisser guider par « *le simple caprice de [leur] curiosité* » ou « *l'utilité, [et les] besoins pratiques et surtout moraux* » ? Il souligne bien entendu la variabilité du sens du mot « *utilité* » suivant qui l'utilise et surtout l'immensité de ce qu'il y a à observer et à découvrir, ce qui l'amène à dire : « *Vouloir faire tenir la nature dans la science, ce serait vouloir faire entrer le tout dans la partie* ».

Il souligne l'apport aux conquêtes de l'industrie des « *fous désintéressés… qui ne pensaient jamais à l'utile* ». Il emprunte à Ernst Mach la formule « *ces fous ont économisé à leurs successeurs la peine de penser* », opposant ainsi la vanité d'une recherche trop focalisée sur une application immédiate. Pour lui la pensée est exigeante et force à sortir de la routine. Il ne fait pourtant pas mystère de ce que cet effort n'est pas naturel à l'homme, ce qui impose à ceux qui le peuvent de faire que « *chacune de [leurs] pensées soit aussi souvent utile que possible* ».

On voit donc la prise de position catégorique d'Henri Poincaré pour laisser à la recherche fondamentale un espace de liberté qui conditionne sa capacité à ouvrir des voies nouvelles, voies qui devront ensuite être exploitées pour des applications mais pas forcément dans la ligne de leur motivation initiale. Cette question de la finalisation de la recherche est d'une encore plus grande actualité, aujourd'hui où le financement de la recherche est assumé par les gouvernements comme une des clés essentielles pour le développement de l'économie, avec la tentation (perverse) de lui dicter ses priorités et les objectifs à atteindre.

Le réalisme humaniste d'Henri Poincaré

Henri Poincaré n'hésite pas à affronter la question de la réalité et de ce que la Science peut nous en faire connaître, sûrement pas « *la véritable nature des choses* » mais « *les véritables rapports des choses* ». Il se préoccupe vivement de la pérennité des relations des hommes avec la vision de la réalité construite par la Science. Même si les théories sont éphémères, quelque chose d'essentiel en elles perdure avec un caractère objectif, c'est-à-dire « *transmissible par le discours* ». Ce point permet de mieux comprendre le rôle de ces livres dans l'ensemble de son œuvre.

Le rôle des hommes dans l'intelligibilité du monde est, pour Henri Poincaré, consubstantiel à l'appréhension qu'ils ont de la réalité. C'est ainsi qu'il le formule : « *une réalité complètement indépendante de l'esprit qui la conçoit, la voit ou la sent, c'est une impossibilité* » et « *ce que nous appelons la réalité objective, c'est, en dernière analyse, ce qui est commun à plusieurs êtres pensants, et pourrait être commun à tous* », faisant encore un clin d'œil à la dissémination des connaissances.

Dès lors il n'est pas surprenant qu'il conclue *La valeur de la Science* ainsi : « *La pensée n'est qu'un éclair au milieu d'une longue nuit. Mais c'est cet éclair qui est tout* », maxime que le CNRS a gravée au dos de toutes ses médailles à côté d'une reproduction du *Penseur* d'Auguste Rodin.

Jean-Pierre Bourguignon,
Mathématicien, Directeur de recherche au CNRS

Biographie d'Henri Poincaré

Jules Henri Poincaré naît le 29 avril 1854 à Nancy. Sa famille appartient à l'élite intellectuelle de la ville : son père est professeur à la faculté de médecine et son cousin, Raymond, sera président de la République de 1913 à 1920. Il devient un élève d'exception au Lycée Impérial de Nancy, et, après un passage brillant en classes préparatoires, se classe premier au concours d'entrée à l'École polytechnique en 1873. Il est ensuite nommé ingénieur des mines en 1879 à Vesoul. Il obtient la même année son doctorat à la Faculté des sciences de Paris, et devient chargé de cours d'analyse à la faculté des sciences de Caen.

Il obtient deux ans plus tard ses premiers résultats marquants sur la représentation des coordonnées de toute courbe algébrique par des fonctions uniformes et l'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients algébriques. Il se montre particulièrement novateur en appliquant ses découvertes à d'autres disciplines, comme la mécanique, la physique ou l'astronomie.

En 1885, il est nommé chargé du Cours de mécanique physique et expérimentale à la Faculté des sciences de Paris où il occupera également en 1886 la chaire de physique mathématique et de calcul des probabilités, et en 1896, succédant à Félix Tisserand, la chaire d'astronomie mathématique et de mécanique céleste.

Répétiteur, puis professeur à l'École polytechnique dès 1883, il enseigne à partir de 1902 l'électricité théorique à l'École professionnelle supérieure des Postes et Télégraphes.

Il est considéré comme un des derniers grands savants universels, maîtrisant en particulier l'ensemble des branches des mathématiques de son époque mais aussi la philosophie des sciences.

Le 28 juin 1909, il entre à l'Académie Française, privilège rare pour un scientifique. Il décède le 17 juillet 1912 à Paris en laissant une œuvre immense derrière lui.

I

La science et l'hypothèse

Introduction

Pour un observateur superficiel, la vérité scientifique est hors des atteintes du doute ; la logique de la science est infaillible et, si les savants se trompent quelquefois, c'est pour en avoir méconnu les règles.

Les vérités mathématiques dérivent d'un petit nombre de propositions évidentes par une chaîne de raisonnements impeccables ; elles s'imposent non seulement à nous, mais à la nature elle-même. Elles enchaînent pour ainsi dire le Créateur et lui permettent seulement de choisir entre quelques solutions relativement peu nombreuses. Il suffira alors de quelques expériences pour nous faire savoir quel choix il a fait. De chaque expérience, une foule de conséquences pourront sortir par une série de déductions mathématiques, et c'est ainsi que chacune d'elles nous fera connaître un coin de l'Univers.

Voilà quelle est pour bien des gens du monde, pour les lycéens qui reçoivent les premières notions de physique, l'origine de la certitude scientifique. Voilà comment ils comprennent le rôle de l'expérimentation et des mathématiques. C'est ainsi également que le comprenaient, il y a cent ans, beaucoup de savants qui rêvaient de construire le monde en empruntant à l'expérience aussi peu de matériaux que possible.

Quand on a un peu plus réfléchi, on a aperçu la place tenue par l'hypothèse ; on a vu que le mathématicien ne saurait s'en passer et que l'expérimentateur ne s'en passe pas davantage. Et alors, on s'est demandé si toutes ces constructions étaient bien solides et on a cru qu'un souffle allait les abattre. Être sceptique de cette façon, c'est encore être superficiel. Douter de tout ou tout croire, ce sont deux solutions également commodes, qui l'une et l'autre nous dispensent de réfléchir.

Au lieu de prononcer une condamnation sommaire, nous devons donc examiner avec soin le rôle de l'hypothèse ; nous reconnaîtrons alors, non seulement qu'il est nécessaire, mais que le plus souvent il est légitime. Nous verrons aussi qu'il y a plusieurs sortes d'hypothèses, que les unes sont vérifiables et qu'une fois confirmées par l'expérience, elles deviennent des vérités fécondes ; que les autres, sans pouvoir nous induire en erreur, peuvent nous être utiles en fixant notre pensée, que d'autres enfin ne sont des hypothèses qu'en apparence et se réduisent à des définitions ou à des conventions déguisées.

Ces dernières se rencontrent surtout dans les mathématiques et dans les sciences qui y touchent. C'est justement de là que ces sciences tirent leur rigueur ; ces conventions sont l'œuvre de la libre activité de notre esprit, qui, dans ce domaine ne reconnaît pas d'obstacle. Là, notre esprit peut affirmer parce qu'il décrète ; mais entendons-nous : ces décrets s'imposent à *notre* science, qui, sans eux, serait impossible ; ils ne s'imposent pas à la nature. Ces décrets, pourtant, sont-ils arbitraires ? Non, sans cela ils seraient stériles. L'expérience nous laisse notre libre choix, mais elle le guide en nous aidant à discerner le chemin le plus commode. Nos décrets sont donc comme ceux d'un prince absolu, mais sage, qui consulterait son Conseil d'État.

Quelques personnes ont été frappées de ce caractère de libre convention qu'on reconnaît dans certains principes fondamentaux des sciences. Elles ont voulu généraliser outre mesure et en même temps elles ont oublié que la liberté n'est pas l'arbitraire. Elles ont abouti ainsi à ce que l'on appelle le *nominalisme* et elles se sont demandé si le savant n'est pas dupe de ses définitions et si le monde qu'il croit découvrir n'est pas tout simplement créé par son caprice[1]. Dans ces conditions, la science serait certaine, mais dépourvue de portée.

S'il en était ainsi, la science serait impuissante. Or, nous la voyons chaque jour agir sous nos yeux. Cela ne pourrait être si elle ne nous faisait connaître quelque chose de la réalité ; mais ce qu'elle peut atteindre, ce ne sont pas les choses elles-mêmes, comme le pensent les dogmatistes naïfs, ce sont seulement les rapports entre les choses ; en dehors de ces rapports, il n'y a pas de réalité connaissable.

Telle est la conclusion à laquelle nous parviendrons, mais pour cela il nous faudra parcourir la série des sciences depuis l'arithmétique et la géométrie jusqu'à la mécanique et à la physique expérimentale.

Quelle est la nature du raisonnement mathématique ? Est-il réellement déductif comme on le croit d'ordinaire ? Une analyse approfondie nous

1. Voir M. Le Roy, Science et Philosophie. (*Revue de Métaphysique et de Morale*, 1901.)

montre qu'il n'en est rien, qu'il participe dans une certaine mesure de la nature du raisonnement inductif et que c'est par là qu'il est fécond. Il n'en conserve pas moins son caractère de rigueur absolue ; c'est ce que nous avions d'abord à montrer.

Connaissant mieux maintenant l'un des instruments que les mathématiques mettent entre les mains du chercheur, nous avions à analyser une autre notion fondamentale, celle de la grandeur mathématique. La trouvons-nous dans la nature, ou est-ce nous qui l'y introduisons ? Et, dans ce dernier cas, ne risquons-nous pas de tout fausser ? Comparant les données brutes de nos sens et ce concept extrêmement complexe et subtil que les mathématiciens appellent grandeur, nous sommes bien forcés de reconnaître une divergence ; ce cadre où nous voulons tout faire rentrer, c'est donc nous qui l'avons fait ; mais nous ne l'avons pas fait au hasard, nous l'avons fait pour ainsi dire sur mesure et c'est pour cela que nous pouvons y faire rentrer les faits sans dénaturer ce qu'ils ont d'essentiel.

Un autre cadre que nous imposons au monde, c'est l'espace. D'où viennent les premiers principes de la géométrie ? Nous sont-ils imposés par la logique ? Lobatchevsky a montré que non en créant les géométries non euclidiennes. L'espace nous est-il révélé par nos sens ? Non encore, car celui que nos sens pourraient nous montrer diffère absolument de celui du géomètre. La géométrie dérive-t-elle de l'expérience ? Une discussion approfondie nous montrera que non. Nous conclurons donc que ses principes ne sont que des conventions ; mais ces conventions ne sont pas arbitraires, et transportés dans un autre monde (que j'appelle le monde non euclidien et que je cherche à imaginer), nous aurions été amenés à en adopter d'autres.

En mécanique, nous serions conduits à des conclusions analogues et nous verrions que les principes de cette science, quoique plus directement appuyés sur l'expérience, participent encore du caractère conventionnel des postulats géométriques. Jusqu'ici le nominalisme triomphe, mais nous arrivons aux sciences physiques proprement dites. Ici la scène change ; nous rencontrons une autre sorte d'hypothèses et nous en voyons toute la fécondité. Sans doute, au premier abord, les théories nous semblent fragiles, et l'histoire de la science nous prouve qu'elles sont éphémères : elles ne meurent pas tout entières pourtant, et de chacune d'elles il reste quelque chose. C'est ce quelque chose qu'il faut chercher à démêler, parce que c'est là, et là seulement, qu'est la véritable réalité.

© Dunod – Toute reproduction non autorisée est un délit.

La méthode des sciences physiques repose sur l'induction qui nous fait attendre la répétition d'un phénomène quand se reproduisent les circonstances où il avait une première fois pris naissance. Si *toutes* ces circonstances pouvaient se reproduire à la fois, ce principe pourrait être appliqué sans crainte : mais cela n'arrivera jamais ; quelques-unes de ces circonstances feront toujours défaut. Sommes-nous absolument sûrs qu'elles sont sans importance ? Évidemment non. Cela pourra être vraisemblable, cela ne pourra pas être rigoureusement certain. De là le rôle considérable que joue dans les sciences physiques la notion de probabilité. Le calcul des probabilités n'est donc pas seulement une récréation ou un guide pour les joueurs de baccara, et nous devons chercher à en approfondir les principes. Sous ce rapport, je n'ai pu donner que des résultats bien incomplets, tant ce vague instinct, qui nous fait discerner la vraisemblance, est rebelle à l'analyse.

Après avoir étudié les conditions dans lesquelles travaille le physicien, j'ai cru qu'il fallait le montrer à l'œuvre. Pour cela j'ai pris quelques exemples dans l'histoire de l'optique et dans celle de l'électricité. Nous verrons d'où sont sorties les idées de Fresnel, celles de Maxwell, et quelles hypothèses inconscientes faisaient Ampère et les autres fondateurs de l'électrodynamique.

Première partie
Le nombre et la grandeur

Chapitre premier – Sur la nature du raisonnement mathématique

I

La possibilité même de la science mathématique semble une contradiction insoluble. Si cette science n'est déductive qu'en apparence, d'où lui vient cette parfaite rigueur que personne ne songe à mettre en doute ? Si, au contraire, toutes les propositions qu'elle énonce peuvent se tirer les unes des autres par les règles de la logique formelle, comment la mathématique ne se réduit-elle pas à une immense tautologie ? Le syllogisme ne peut rien nous apprendre d'essentiellement nouveau et, si tout devait sortir du principe d'identité, tout devrait aussi pouvoir s'y ramener. Admettra-t-on donc que les énoncés de tous ces théorèmes qui remplissent tant de volumes ne soient que des manières détournées de dire que A est A ?

Sans doute, on peut remonter aux axiomes qui sont à la source de tous les raisonnements. Si on juge qu'on ne peut les réduire au principe de contradiction, si on ne veut pas non plus y voir des faits expérimentaux qui ne pourraient participer à la nécessité mathématique, on a encore la ressource de les classer parmi les jugements synthétiques *a priori.* Ce n'est pas résoudre la difficulté, c'est seulement la baptiser ; et lors même que la nature des jugements synthétiques n'aurait plus pour nous de mystère, la contradiction ne se serait pas évanouie, elle n'aurait fait que reculer ; le raisonnement syllogistique reste incapable de rien ajouter aux données qu'on lui fournit ; ces données se réduisent à quelques axiomes et on ne devrait pas retrouver autre chose dans les conclusions.

Aucun théorème ne devrait être nouveau si dans sa démonstration n'intervenait un axiome nouveau ; le raisonnement ne pourrait nous rendre que les vérités immédiatement évidentes empruntées à l'intuition directe ; il ne serait plus qu'un intermédiaire parasite et dès lors n'aurait-on pas lieu de se demander si tout l'appareil syllogistique ne sert pas uniquement à dissimuler notre emprunt ?

La contradiction nous frappera davantage si nous ouvrons un livre quelconque de mathématiques ; à chaque page l'auteur annoncera l'intention de généraliser une proposition déjà connue. Est-ce donc que la méthode mathématique procède du particulier au général et comment alors peut-on l'appeler déductive ?

Si enfin la science du nombre était purement analytique ou pouvait sortir analytiquement d'un petit nombre de jugements synthétiques, il semble qu'un esprit assez puissant pourrait d'un seul coup d'œil en apercevoir toutes les vérités ; que dis-je ! on pourrait même espérer qu'un jour on inventera pour les exprimer un langage assez simple pour qu'elles apparaissent ainsi immédiatement à une intelligence ordinaire.

Si l'on se refuse à admettre ces conséquences, il faut bien concéder que le raisonnement mathématique a par lui-même une sorte de vertu créatrice et par conséquent qu'il se distingue du syllogisme.

La différence doit même être profonde. Nous ne trouverons pas par exemple la clef du mystère dans l'usage fréquent de cette règle d'après laquelle une même opération uniforme appliquée à deux nombres égaux donnera des résultats identiques.

Tous ces modes de raisonnement, qu'ils soient ou non réductibles au syllogisme proprement dit, conservent le caractère analytique et sont par cela même impuissants.

II

Le débat est ancien ; déjà Leibnitz cherchait à démontrer que 2 et 2 font 4 ; examinons un peu sa démonstration.

Je suppose que l'on ait défini le nombre 1 et l'opération $x + 1$ qui consiste à ajouter l'unité à un nombre donné x.

Ces définitions, quelles qu'elles soient, n'interviendront pas dans la suite du raisonnement.

Je définis ensuite les nombres 2, 3 et 4 par les égalités :

(1) $1 + 1 = 2$; (2) $2 + 1 = 3$; (3) $3 + 1 = 4$.

Je définis de même l'opération $x + 2$ par la relation :

$$(4) \qquad x + 2 = (x + 1) + 1.$$

Cela posé nous avons :

$$2 + 2 = (2 + 1) + 1 \text{ (Définition 4)}$$
$$(2 + 1) + 1 = 3 + 1 \text{ (Définition 2)}$$
$$3 + 1 = 4 \text{ (Définition 3)}$$

d'où

$$2 + 2 = 4 \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

On ne saurait nier que ce raisonnement ne soit purement analytique. Mais interrogez un mathématicien quelconque : « Ce n'est pas une démonstration proprement dite, vous répondra-t-il, c'est une vérification ». On s'est borné à rapprocher l'une de l'autre deux définitions purement conventionnelles et on a constaté leur identité, on n'a rien appris de nouveau. La *vérification* diffère précisément de la véritable démonstration, parce qu'elle est purement analytique et parce qu'elle est stérile. Elle est stérile parce que la conclusion n'est que la traduction des prémisses dans un autre langage. La démonstration véritable est féconde au contraire parce que la conclusion y est en un sens plus générale que les prémisses.

L'égalité $2 + 2 = 4$ n'a été ainsi susceptible d'une vérification que parce qu'elle est particulière. Tout énoncé particulier en mathématique pourra toujours être vérifié de la sorte. Mais si la mathématique devait se réduire à une suite de pareilles vérifications, elle ne serait pas une science. Ainsi un joueur d'échecs, par exemple, ne crée pas une science en gagnant une partie. Il n'y a de science que du général.

On peut même dire que les sciences exactes ont précisément pour objet de nous dispenser de ces vérifications directes.

III

Voyons donc le géomètre à l'œuvre et cherchons à surprendre ses procédés.

La tâche n'est pas sans difficulté ; il ne suffit pas d'ouvrir un ouvrage au hasard et d'y analyser une démonstration quelconque.

Nous devons exclure d'abord la géométrie où la question se complique des problèmes ardus relatifs au rôle des postulats, à la nature et à l'origine de la notion d'espace. Pour des raisons analogues nous ne pouvons nous

© Dunod – Toute reproduction non autorisée est un délit.

adresser à l'analyse infinitésimale. Il nous faut chercher la pensée mathématique là où elle est restée pure, c'est-à-dire en arithmétique.

Encore faut-il choisir ; dans les parties les plus élevées de la théorie des nombres, les notions mathématiques primitives ont déjà subi une élaboration si profonde, qu'il devient difficile de les analyser.

C'est donc au début de l'arithmétique que nous devons nous attendre à trouver l'explication que nous cherchons, mais il arrive justement que c'est dans la démonstration des théorèmes les plus élémentaires que les auteurs des traités classiques ont déployé le moins de précision et de rigueur. Il ne faut pas leur en faire un crime ; ils ont obéi à une nécessité ; les débutants ne sont pas préparés à la véritable rigueur mathématique ; ils n'y verraient que de vaines et fastidieuses subtilités ; on perdrait son temps à vouloir trop tôt les rendre plus exigeants ; il faut qu'ils refassent rapidement, mais sans brûler d'étapes, le chemin qu'ont parcouru lentement les fondateurs de la science.

Pourquoi une si longue préparation est-elle nécessaire pour s'habituer à cette rigueur parfaite, qui, semble-t-il, devrait s'imposer naturellement à tous les bons esprits ? C'est là un problème logique et psychologique bien digne d'être médité.

Mais nous ne nous y arrêterons pas ; il est étranger à notre objet ; tout ce que je veux retenir, c'est que, sous peine de manquer notre but, il nous faut refaire les démonstrations des théorèmes les plus élémentaires et leur donner non la forme grossière qu'on leur laisse pour ne pas lasser les débutants, mais celle qui peut satisfaire un géomètre exercé.

Définition de l'addition

Je suppose qu'on ait défini préalablement l'opération $x + 1$, qui consiste à ajouter le nombre 1 à un nombre donné x.

Cette définition, quelle qu'elle soit d'ailleurs, ne jouera plus aucun rôle dans la suite des raisonnements.

Il s'agit maintenant de définir l'opération $x + a$, qui consiste à ajouter le nombre a à un nombre donné x.

Supposons que l'on ait défini l'opération

$$x + (a - 1),$$

l'opération $x + a$ sera définie par l'égalité :

(1) $$x + a = [x + (a - 1)] + 1.$$

Nous saurons donc ce que c'est que $x + a$ quand nous saurons ce que c'est que $x + (a - 1)$, et comme j'ai supposé au début que l'on savait ce que c'est que $x + 1$, on pourra définir successivement et « par récurrence » les opérations $x + 2$, $x + 3$, etc.

Cette définition mérite un moment d'attention, elle est d'une nature particulière qui la distingue déjà de la définition purement logique ; l'égalité (1) contient en effet une infinité de définitions distinctes, chacune d'elles n'ayant un sens que quand on connaît celle qui la précède.

Propriétés de l'addition

Associativité

Je dis que

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

En effet le théorème est vrai pour $c = 1$; il s'écrit alors

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1,$$

ce qui n'est autre chose, à la différence des notations près, que l'égalité (1) par laquelle je viens de définir l'addition.

Supposons que le théorème soit vrai pour $c = \gamma$, je dis qu'il sera vrai pour $c = \gamma + 1$, soit en effet

$$(a + b) + \gamma = a + (b + \gamma),$$

on en déduira successivement :

$$[(a + b) + \gamma] + 1 = [a + (b + \gamma)] + 1,$$

ou en vertu de la définition (1)

$$(a + b) + (\gamma + 1) = a + (b + \gamma + 1) = a + [b + (\gamma + 1)],$$

ce qui montre, par une série de déductions purement analytiques, que le théorème est vrai pour $\gamma + 1$.

Étant vrai pour $c = 1$, on verrait ainsi successivement qu'il l'est pour $c - 2$, pour $c = 3$, etc.

Commutativité

1° Je dis que

$$a + 1 = 1 + a.$$

Le théorème est évidemment vrai pour $a = 1$, on pourrait *vérifier* par des raisonnements purement analytiques que s'il est vrai pour $a = \gamma$, il le

© Dunod – Toute reproduction non autorisée est un délit.

sera pour $a = \gamma + 1$; or il l'est pour $a = 1$, il le sera donc pour $a = 2$, pour $a = 3$, etc. ; c'est ce qu'on exprime en disant que la proposition énoncée est démontrée par récurrence.

2° Je dis que

$$a + b = b + a.$$

Le théorème vient d'être démontré pour $b = 1$, on peut *vérifier* analytiquement que s'il est vrai pour $b = \beta$, il le sera pour $b = \beta + 1$.

La proposition est donc établie par récurrence.

Définition de la multiplication

Nous définirons la multiplication par les égalités.

$$a \times 1 = a$$

$$a \times b = [a \times (b - 1)] + a. \tag{2}$$

L'égalité (2) renferme comme l'égalité (1) une infinité de définitions ; ayant défini $a \times 1$ elle permet de définir successivement : $a \times 2$, $a \times 3$, etc.

Propriétés de la multiplication

Distributivité

Je dis que

$$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c).$$

On vérifie analytiquement que l'égalité est vraie pour $c = 1$; puis que si le théorème est vrai pour $c = \gamma$ il sera vrai pour $c = \gamma + 1$.

La proposition est encore démontrée par récurrence.

Commutativité

1° Je dis que

$$a \times 1 = 1 \times a$$

Le théorème est évident pour $a = 1$.

On vérifie analytiquement que s'il est vrai pour $a = \alpha$ il sera vrai pour $a = \alpha + 1$.

2° Je dis que

$$a \times b = b \times a.$$

Le théorème vient d'être démontré pour $b = 1$. On vérifierait analytiquement que s'il est vrai pour $b = \beta$ il le sera pour $b = \beta + 1$.

IV

J'arrête là cette série monotone de raisonnements. Mais cette monotonie même a mieux fait ressortir le procédé qui est uniforme et qu'on retrouve à chaque pas.

Ce procédé est la démonstration par récurrence. On établit d'abord un théorème pour $n = 1$; on montre ensuite que s'il est vrai de $n - 1$, il est vrai de n et on en conclut qu'il est vrai pour tous les nombres entiers.

On vient de voir comment on peut s'en servir pour démontrer les règles de l'addition et de la multiplication, c'est-à-dire les règles du calcul algébrique ; ce calcul est un instrument de transformation qui se prête à beaucoup plus de combinaisons diverses que le simple syllogisme ; mais c'est encore un instrument purement analytique et incapable de rien nous apprendre de nouveau. Si les mathématiques n'en avaient pas d'autre elles seraient donc tout de suite arrêtées dans leur développement ; mais elles ont de nouveau recours au même procédé, c'est-à-dire au raisonnement par récurrence et elles peuvent continuer leur marche en avant.

À chaque pas, si on y regarde bien, on retrouve ce mode de raisonnement, soit sous la forme simple que nous venons de lui donner, soit sous une forme plus ou moins modifiée.

C'est donc bien là le raisonnement mathématique par excellence et il nous faut l'examiner de plus près.

V

Le caractère essentiel du raisonnement par récurrence c'est qu'il contient, condensés pour ainsi dire en une formule unique, une infinité de syllogismes.

Pour qu'on s'en puisse mieux rendre compte, je vais énoncer les uns après les autres ces syllogismes qui sont, si l'on veut me passer l'expression, disposés en cascade.

Ce sont bien entendu des syllogismes hypothétiques.

Le théorème est vrai du nombre 1.

Or s'il est vrai de 1, il est vrai de 2.

Donc il est vrai de 2.

Or s'il est vrai de 2, il est vrai de 3.

Donc il est vrai de 3, et ainsi de suite.

© Dunod – Toute reproduction non autorisée est un délit.

On voit que la conclusion de chaque syllogisme sert de mineure au suivant.

De plus les majeures de tous nos syllogismes peuvent être ramenées à une formule unique.

Si le théorème est vrai de $n - 1$, il l'est de n.

On voit donc que, dans les raisonnements par récurrence, on se borne à énoncer la mineure du premier syllogisme, et la formule générale qui contient comme cas particuliers toutes les majeures.

Cette suite de syllogismes qui ne finirait jamais se trouve ainsi réduite à une phrase de quelques lignes.

Il est facile maintenant de comprendre pourquoi toute conséquence particulière d'un théorème peut, comme je l'ai expliqué plus haut, être vérifiée par des procédés purement analytiques.

Si au lieu de montrer que notre théorème est vrai de tous les nombres, nous voulons seulement faire voir qu'il est vrai du nombre 6 par exemple, il nous suffira d'établir les 5 premiers syllogismes de notre cascade ; il nous en faudrait 9 si nous voulions démontrer le théorème pour le nombre 10 ; il nous en faudrait davantage encore pour un nombre plus grand ; mais quelque grand que soit ce nombre nous finirions toujours par l'atteindre, et la vérification analytique serait possible.

Et cependant, quelque loin que nous allions ainsi, nous ne nous élèverions jamais jusqu'au théorème général, applicable à tous les nombres, qui seul peut être objet de science. Pour y arriver, il faudrait une infinité de syllogismes, il faudrait franchir un abîme que la patience de l'analyste, réduit aux seules ressources de la logique formelle, ne parviendra jamais à combler.

Je demandais au début pourquoi on ne saurait concevoir un esprit assez puissant pour apercevoir d'un seul coup d'œil l'ensemble des vérités mathématiques.

La réponse est aisée maintenant ; un joueur d'échecs peut combiner quatre coups, cinq coups d'avance, mais, si extraordinaire qu'on le suppose, il n'en préparera jamais qu'un nombre fini ; s'il applique ses facultés à l'arithmétique, il ne pourra en apercevoir les vérités générales d'une seule intuition directe ; pour parvenir au plus petit théorème, il ne pourra s'affranchir de l'aide du raisonnement par récurrence parce que c'est un instrument qui permet de passer du fini à l'infini.

Cet instrument est toujours utile, puisque, nous faisant franchir d'un bond autant d'étapes que nous le voulons, il nous dispense de vérifications longues, fastidieuses et monotones qui deviendraient rapidement impraticables. Mais il devient indispensable dès qu'on vise au théorème général, dont la vérification analytique nous rapprocherait sans cesse, sans nous permettre de l'atteindre.

Dans ce domaine de l'arithmétique, on peut se croire bien loin de l'analyse infinitésimale, et, cependant, nous venons de le voir, l'idée de l'infini mathématique joue déjà un rôle prépondérant, et sans elle il n'y aurait pas de science parce qu'il n'y aurait rien de général.

VI

Le jugement sur lequel repose le raisonnement par récurrence peut être mis sous d'autres formes ; on peut dire par exemple que dans une collection infinie de nombres entiers différents, il y en a toujours un qui est plus petit que tous les autres.

On pourra passer facilement d'un énoncé à l'autre et se donner ainsi l'illusion qu'on a démontré la légitimité du raisonnement par récurrence. Mais on sera toujours arrêté, on arrivera toujours à un axiome indémontrable qui ne sera au fond que la proposition à démontrer traduite dans un autre langage.

On ne peut donc se soustraire à cette conclusion que la règle du raisonnement par récurrence est irréductible au principe de contradiction.

Cette règle ne peut non plus nous venir de l'expérience ; ce que l'expérience pourrait nous apprendre, c'est que la règle est vraie pour les dix, pour les cent premiers nombres par exemple, elle ne peut atteindre la suite indéfinie des nombres, mais seulement une portion plus ou moins longue mais toujours limitée de cette suite.

Or, s'il ne s'agissait que de cela, le principe de contradiction suffirait, il nous permettrait toujours de développer autant de syllogismes que nous voudrions, c'est seulement quand il s'agit d'en enfermer une infinité dans une seule formule, c'est seulement devant l'infini que ce principe échoue, c'est également là que l'expérience devient impuissante. Cette règle, inaccessible à la démonstration analytique et à l'expérience, est le véritable type du jugement synthétique *a priori*. On ne saurait d'autre part songer à y voir une convention, comme pour quelques-uns des postulats de la géométrie.

© Dunod – Toute reproduction non autorisée est un délit.

Pourquoi donc ce jugement s'impose-t-il à nous avec une irrésistible évidence ? C'est qu'il n'est que l'affirmation de la puissance de l'esprit qui se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible. L'esprit a de cette puissance une intuition directe et l'expérience ne peut être pour lui qu'une occasion de s'en servir et par là d'en prendre conscience.

Mais, dira-t-on, si l'expérience brute ne peut légitimer le raisonnement par récurrence, en est-il de même de l'expérience aidée de l'induction ? Nous voyons successivement qu'un théorème est vrai du nombre 1, du nombre 2, du nombre 3 et ainsi de suite, *la loi est manifeste*, disons-nous, et elle l'est au même titre que toute loi physique appuyée sur des observations dont le nombre est très grand, mais limité.

On ne saurait méconnaître qu'il y a là une analogie frappante avec les procédés habituels de l'induction. Mais une différence essentielle subsiste. L'induction, appliquée aux sciences physiques, est toujours incertaine, parce qu'elle repose sur la croyance à un ordre général de l'Univers, ordre qui est en dehors de nous. L'induction mathématique, c'est-à-dire la démonstration par récurrence, s'impose au contraire nécessairement, parce qu'elle n'est que l'affirmation d'une propriété de l'esprit lui-même.

VII

Les mathématiciens, je l'ai dit plus haut, s'efforcent toujours de *généraliser* les propositions qu'ils ont obtenues, et pour ne pas chercher d'autre exemple, nous avons tout à l'heure démontré l'égalité :

$$a + 1 = 1 + a,$$

et nous nous en sommes servi ensuite pour établir l'égalité

$$a + b = b + a,$$

qui est manifestement plus générale.

Les mathématiques peuvent donc comme les autres sciences procéder du particulier au général.

Il y a là un fait qui nous aurait paru incompréhensible au début de cette étude, mais qui n'a plus pour nous rien de mystérieux, depuis que nous avons constaté les analogies de la démonstration par récurrence avec l'induction ordinaire.

Sans doute le raisonnement mathématique récurrent et le raisonnement physique inductif reposent sur des fondements différents, mais leur marche est parallèle, ils vont dans le même sens, c'est-à-dire du particulier au général.

Examinons la chose d'un peu plus près.

Pour démontrer l'égalité :

(1) $$a + 2 = 2 + a,$$

il nous suffit d'appliquer deux fois la règle

$$a + 1 = 1 + a,$$

et d'écrire :

(2) $a + 2 = a + 1 + 1 = 1 + a + 1 = 1 + 1 + a = 2 + a.$

L'égalité (2) ainsi déduite par voie purement analytique de l'égalité (1) n'en est pas cependant un simple cas particulier : elle est autre chose.

On ne peut donc même pas dire que dans la partie réellement analytique et déductive des raisonnements mathématiques, on procède du général au particulier, au sens ordinaire du mot.

Les deux membres de l'égalité (2) sont simplement des combinaisons plus compliquées que les deux membres de l'égalité (1) et l'analyse ne sert qu'à séparer les éléments qui entrent dans ces combinaisons et à en étudier les rapports.

Les mathématiciens procèdent donc « par construction », ils « construisent » des combinaisons de plus en plus compliquées. Revenant ensuite par l'analyse de ces combinaisons, de ces ensembles, pour ainsi dire, à leurs éléments primitifs, ils aperçoivent les rapports de ces éléments et en déduisent les rapports des ensembles eux-mêmes.

C'est là une marche purement analytique, mais ce n'est pas pourtant une marche du général au particulier, car les ensembles ne sauraient évidemment être regardés comme plus particuliers que leurs éléments.

On a attaché, et à juste titre, une grande importance à ce procédé de la « construction » et on a voulu y voir la condition nécessaire et suffisante des progrès des sciences exactes.

Nécessaire, sans doute, mais suffisante, non.

Pour qu'une construction puisse être utile, pour qu'elle ne soit pas une vaine fatigue pour l'esprit, pour qu'elle puisse servir de marchepied à qui veut s'élever plus haut, il faut d'abord qu'elle possède une sorte d'unité, qui permette d'y voir autre chose que la juxtaposition de ses éléments.

Ou plus exactement, il faut qu'on trouve quelque avantage à considérer la construction plutôt que ses éléments eux-mêmes.

© Dunod – Toute reproduction non autorisée est un délit.

Quel peut être cet avantage ?

Pourquoi raisonner sur un polygone par exemple, qui est toujours décomposable en triangles, et non sur les triangles élémentaires ?

C'est qu'il y a des propriétés que l'on peut démontrer pour les polygones d'un nombre quelconque de côtés et qu'on peut ensuite appliquer immédiatement à un polygone particulier quelconque.

Le plus souvent, au contraire, ce n'est qu'au prix des plus longs efforts qu'on pourrait les retrouver en étudiant directement les rapports des triangles élémentaires. La connaissance du théorème général nous épargne ces efforts.

Une construction ne devient donc intéressante que quand on peut la ranger à côté d'autres constructions analogues, formant les espèces d'un même genre.

Si le quadrilatère est autre chose que la juxtaposition de deux triangles, c'est qu'il appartient au genre polygone.

Encore faut-il qu'on puisse démontrer les propriétés du genre sans être forcé de les établir successivement pour chacune des espèces.

Pour y arriver, il faut nécessairement remonter du particulier au général, en gravissant un ou plusieurs échelons.

Le procédé analytique « par construction » ne nous oblige pas à en descendre, mais il nous laisse au même niveau.

Nous ne pouvons nous élever que par l'induction mathématique, qui seule peut nous apprendre quelque chose de nouveau. Sans l'aide de cette induction différente à certains égards de l'induction physique, mais féconde comme elle, la construction serait impuissante à créer la science.

Observons en terminant que cette induction n'est possible que si une même opération peut se répéter indéfiniment. C'est pour cela que la théorie du jeu d'échec ne pourra jamais devenir une science, puisque les différents coups d'une même partie ne se ressemblent pas.

Chapitre II – La grandeur mathématique et l'expérience

Si l'on veut savoir ce que les mathématiciens entendent par un continu, ce n'est pas à la géométrie qu'il faut le demander. Le géomètre cherche toujours plus ou moins à se représenter les figures qu'il étudie, mais ses représentations ne sont pour lui que des instruments ; il fait de la géométrie avec de l'étendue comme il en fait avec de la craie ; aussi doit-on prendre garde d'attacher trop d'importance à des accidents qui n'en ont souvent pas plus que la blancheur de la craie.

L'analyste pur n'a pas à craindre cet écueil. Il a dégagé la science mathématique de tous les éléments étrangers, et il peut répondre à notre question : Qu'est-ce au juste que ce continu sur lequel les mathématiciens raisonnent ? Beaucoup d'entre eux, qui savent réfléchir sur leur art, l'ont fait déjà ; M. Tannery, par exemple, dans son *Introduction à la théorie des Fonctions d'une variable.*

Partons de l'échelle des nombres entiers ; entre deux échelons consécutifs, intercalons un ou plusieurs échelons intermédiaires, puis entre ces échelons nouveaux d'autres encore, et ainsi de suite indéfiniment. Nous aurons ainsi un nombre illimité de termes, ce seront les nombres que l'on appelle fractionnaires, rationnels ou commensurables. Mais ce n'est pas assez encore ; entre ces termes qui sont pourtant déjà en nombre infini, il faut encore en intercaler d'autres, que l'on appelle irrationnels ou incommensurables.

Avant d'aller plus loin, faisons une première remarque. Le continu ainsi conçu n'est plus qu'une collection d'individus rangés dans un certain ordre, en nombre infini, il est vrai, mais *extérieurs* les uns aux autres. Ce n'est pas là la conception ordinaire, où l'on suppose entre les éléments du continu une sorte de lien intime qui en fait un tout, où le point ne préexiste pas à la ligne, mais la ligne au point. De la célèbre formule, le continu est l'unité dans la multiplicité, la multiplicité seule subsiste, l'unité a disparu. Les analystes n'en ont pas moins raison de définir leur continu comme ils le font, puisque c'est toujours sur celui-là qu'ils raisonnent depuis qu'ils se piquent de rigueur. Mais c'est assez pour nous avertir que le véritable continu mathématique est tout autre chose que celui des physiciens et celui des métaphysiciens.

© Dunod – Toute reproduction non autorisée est un délit.

On dira peut-être aussi que les mathématiciens qui se contentent de cette définition sont dupes de mots, qu'il faudrait dire d'une façon précise ce que sont chacun de ces échelons intermédiaires, expliquer comment il faut les intercaler et démontrer qu'il est possible de le faire. Mais ce serait à tort ; la seule propriété de ces échelons qui intervienne dans leurs raisonnements[1], c'est celle de se trouver avant ou après tels autres échelons ; elle doit donc seule aussi intervenir dans la définition.

Ainsi, il n'y a pas à s'inquiéter de la manière dont on doit intercaler les termes intermédiaires ; d'autre part, personne ne doutera que cette opération ne soit possible, à moins d'oublier que ce dernier mot, dans le langage des géomètres, signifie simplement exempt de contradiction.

Notre définition, toutefois, n'est pas complète encore, et j'y reviens après cette trop longue digression.

Définition des incommensurables

Les mathématiciens de l'École de Berlin, M. Kronecker en particulier, se sont préoccupés de construire cette échelle continue des nombres fractionnaires et irrationnels sans se servir d'autres matériaux que du nombre entier. Le continu mathématique serait, dans cette manière de voir, une pure création de l'esprit, où l'expérience n'aurait aucune part.

La notion du nombre rationnel ne leur semblant pas présenter de difficulté, ils se sont surtout efforcés de définir le nombre incommensurable. Mais avant de reproduire ici leur définition, je dois faire une observation, afin de prévenir l'étonnement qu'elle ne manquerait pas de provoquer chez les lecteurs peu familiers avec les habitudes des géomètres.

Les mathématiciens n'étudient pas des objets, mais des relations entre les objets ; il leur est donc indifférent de remplacer ces objets par d'autres, pourvu que les relations ne changent pas. La matière ne leur importe pas, la forme seule les intéresse.

Si l'on ne s'en souvenait, on ne comprendrait pas que M. Dedekind désigne par le nom de *nombre incommensurable* un simple symbole, c'est-

1. Avec celles qui sont contenues dans les conventions spéciales qui servent à définir l'addition et dont nous parlerons plus loin.

à-dire quelque chose de très différent de l'idée que l'on croit se faire d'une quantité, qui doit être mesurable et presque tangible.

Voici maintenant quelle est la définition de M. Dedekind :

On peut répartir d'une infinité de manières les nombres commensurables en deux classes, en s'assujettissant à cette condition qu'un nombre quelconque de la première classe soit plus grand qu'un nombre quelconque de la seconde classe.

Il peut arriver que parmi les nombres de la première classe, il y en ait un qui soit plus petit que tous les autres ; si, par exemple, on range dans la première classe tous les nombres plus grands que 2 et 2 lui-même, et dans la seconde classe tous les nombres plus petits que 2, il est clair que 2 sera le plus petit de tous les nombres de la première classe. Le nombre 2 pourra être choisi comme symbole de cette répartition.

Il peut se faire, au contraire, que parmi les nombres de la seconde classe, il y en ait un qui soit plus grand que tous les autres ; c'est ce qui a lieu, par exemple, si la première classe comprend tous les nombres plus grands que 2, et la seconde tous les nombres plus petits que 2 et 2 lui-même. Ici encore, le nombre 2 pourra être choisi comme symbole de cette répartition.

Mais il peut arriver également que l'on ne puisse trouver ni dans la première classe un nombre plus petit que tous les autres, ni dans la seconde un nombre plus grand que tous les autres. Supposons, par exemple, que l'on mette dans la première classe tous les nombres commensurables dont le carré est plus grand que 2 et dans la seconde tous ceux dont le carré est plus petit que 2. On sait qu'il n'y en a aucun dont le carré soit précisément égal à 2. Il n'y aura évidemment pas dans la première classe de nombre plus petit que tous les autres, car quelque voisin que le carré d'un nombre soit de 2, on pourra toujours trouver un nombre commensurable dont le carré soit encore plus rapproché que 2.

Dans la manière de voir de M. Dedekind, le nombre incommensurable

$$\sqrt{2}$$

n'est autre chose que le symbole de ce mode particulier de répartition des nombres commensurables ; et à chaque mode de répartition correspond ainsi un nombre commensurable ou non, qui lui sert de symbole.

© Dunod – Toute reproduction non autorisée est un délit.

Mais se contenter de cela, ce serait trop oublier l'origine de ces symboles ; il reste à expliquer comment on a été conduit à leur attribuer une sorte d'existence concrète, et, d'autre part, la difficulté ne commence-t-elle pas pour les nombres fractionnaires eux-mêmes ? Aurions-nous la notion de ces nombres, si nous ne connaissions d'avance une matière que nous concevons comme divisible à l'infini, c'est-à-dire comme un continu ?

Le continu physique

On en vient alors à se demander si la notion du continu mathématique n'est pas tout simplement tirée de l'expérience. Si cela était, les données brutes de l'expérience, qui sont nos sensations, seraient susceptibles de mesure. On pourrait être tenté de croire qu'il en est bien ainsi, puisque l'on s'est, dans ces derniers temps, efforcé de les mesurer et que l'on a même formulé une loi, connue sous le nom de loi de Fechner, et d'après laquelle la sensation serait proportionnelle au logarithme de l'excitation.

Mais si l'on examine de près les expériences par lesquelles on a cherché à établir cette loi, on sera conduit à une conclusion toute contraire. On a observé, par exemple, qu'un poids A de 10 grammes et un poids B de 11 grammes produisaient des sensations identiques, que le poids B ne pouvait non plus être discerné d'un poids C de 12 grammes, mais que l'on distinguait facilement le poids A du poids C. Les résultats bruts de l'expérience peuvent donc s'exprimer par les relations suivantes :

$$A = B, \qquad B = C, \qquad A < C,$$

qui peuvent être regardées comme la formule du continu physique.

Il y a là, avec le principe de contradiction, un désaccord intolérable, et c'est la nécessité de le faire cesser qui nous a contraints à inventer le continu mathématique.

On est donc forcé de conclure que cette notion a été créée de toutes pièces par l'esprit, mais que c'est l'expérience qui lui en a fourni l'occasion.

Nous ne pouvons croire que deux quantités égales à une même troisième ne soient pas égales entre elles, et c'est ainsi que nous sommes amenés à supposer que A est différent de B et B de C, mais que l'imperfection de nos sens ne nous avait pas permis de les discerner.