

mini Manuel

de

Mathématiques
pour la physique

Tout le catalogue sur
www.dunod.com



mini Manuel

de

Mathématiques pour la physique

Cours + Exercices corrigés

François Reynaud

Professeur de physique à la faculté des sciences de Limoges

Daniel Fredon

Maître de conférences en mathématiques appliquées

Michel Bridier

Maître de conférences en physique

DUNOD

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



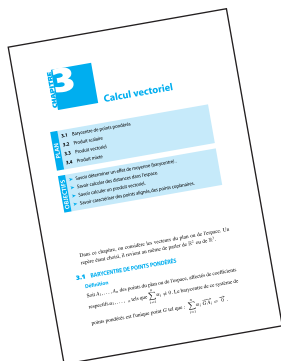
© Dunod, Paris, 2012
ISBN 978-2-10-058265-5

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Comment utiliser le Mini-Manuel ?

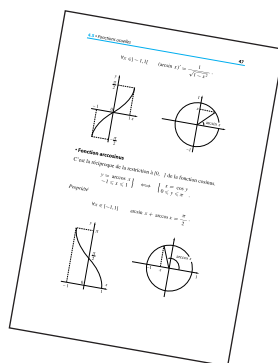
La page d'entrée de chapitre



Elle donne le plan du cours, ainsi qu'un rappel des objectifs pédagogiques du chapitre.

Le cours

Le cours, concis et structuré, expose les notions importantes du programme.



Les rubriques



Une erreur à éviter



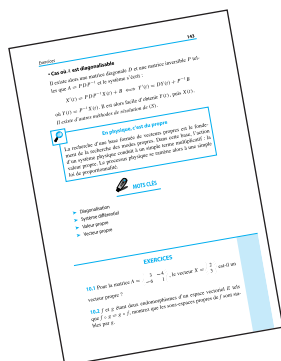
Un peu de méthode



Un exemple pour comprendre



Les points clés à retenir



Les exercices

Ils sont proposés en fin de chapitre, avec leur solution, pour se tester tout au long de l'année.

Table des matières

1	Grandeurs et mesures	1
1.1	Grandeurs physiques	1
	Définition	1
	Étalons	1
	Système International d'unités (SI)	2
	Préfixes	2
	Constantes fondamentales	2
1.2	Analyse dimensionnelle	3
	Dimension d'une grandeur physique	3
	Équation aux dimensions	3
1.3	Mesure des grandeurs	3
	Mesurage	3
	Présentation d'un résultat	4
	Utilisation d'un grand nombre de mesures	4
	<i>Mots clés</i>	5
	<i>Exercices</i>	6
	<i>Solutions</i>	6
2	Les nombres	8
2.1	Nombres réels	8
	Généralités	8
	Sommes et produits	9
	Approximations décimales	9
2.2	Nombres complexes	10
	Forme algébrique	10
	Forme trigonométrique	11
	Exponentielle complexe	12
2.3	Systèmes linéaires	13
	Généralités	13

Systèmes triangulaires	13
Méthode du pivot de Gauss	14
<i>Mots clés</i>	15
<i>Exercices</i>	15
<i>Solutions</i>	17
3 Calcul vectoriel	23
3.1 Barycentre de points pondérés	23
Définition	23
Propriétés	24
Applications	24
3.2 Produit scalaire	24
Définition	24
Propriétés	26
Orthogonalité	26
Applications	27
3.3 Produit vectoriel	27
Définitions	27
Propriétés	28
Applications	28
3.4 Produit mixte	28
Définition	28
Propriétés	28
Applications	28
<i>Mots clés</i>	29
<i>Exercices</i>	29
<i>Solutions</i>	31
4 Fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R}	36
4.1 Généralités	36
Sens de variation	36
Parité, périodicité	37
4.2 Limites	37
Définitions	37
Propriétés des limites	38
Fonctions équivalentes	39
4.3 Continuité	40
Définitions	40

Continuité et opérations	40
Image d'un intervalle par une fonction continue	40
4.4 Dérivabilité	41
Définitions	41
Interprétations	41
Propriétés	42
4.5 Fonctions usuelles	44
Fonctions logarithmes, exponentielles, puissances	44
Fonctions circulaires réciproques	46
<i>Mots clés</i>	49
<i>Exercices</i>	50
<i>Solutions</i>	51
5 Compléments sur les fonctions dérivables	58
5.1 Étude globale des fonctions dérivables	58
Extrémum	58
Théorèmes de Rolle et des accroissements finis	59
Inégalité de Taylor-Lagrange	59
5.2 Étude locale des fonctions dérivables	60
Formule de Taylor-Young	60
Développements limités	60
Opérations sur les développements limités	62
Applications des développements limités	63
5.3 Convexité	63
Définitions	63
Fonctions convexes dérivables	65
<i>Mots clés</i>	65
<i>Exercices</i>	65
<i>Solutions</i>	67
6 Calcul intégral	74
6.1 Intégration sur un segment	74
Approche théorique	74
Propriétés	76
Exemples en physique	77
6.2 Calcul des primitives	78
Linéarité	78
Intégration par parties	78
Intégration par changement de variable	79

6.3	Intégrales généralisées	79
	Définitions	79
	Propriétés	80
	Situations de référence	80
	Fonctions sommables	82
	<i>Mots clés</i>	82
	<i>Exercices</i>	83
	<i>Solutions</i>	84
7	Équations différentielles	90
7.1	Définitions générales	90
	Équations différentielles	90
	Problème de Cauchy	91
7.2	Équations différentielles du premier ordre	91
	Exemple	91
	Équations à variables séparables (ou séparées)	92
7.3	Équations linéaires du premier ordre	92
	Définition	92
	Théorème du à la linéarité	92
	Résolution de l'équation homogène associée	93
	Recherche d'une solution particulière	93
7.4	Équations différentielles linéaires	
	du second ordre à coefficients constants	93
	Définition	93
	Théorèmes dus à la linéarité	93
	Résolution de l'équation homogène associée	94
	Résolution de l'équation complète dans quelques cas	95
	<i>Mots clés</i>	96
	<i>Exercices</i>	96
	<i>Solutions</i>	99
8	Suites numériques	109
8.1	Généralités	109
	Définition	109
	Suite monotone	109
	Suite bornée	110
8.2	Limite d'une suite	110
	Suite convergente	110

Limites infinies	110
Opérations sur les suites convergentes	111
Relation d'ordre	111
8.3 Existence de limites	112
Convergence des suites monotones	112
Suites adjacentes	112
Suites extraites	112
8.4 Suites récurrentes	113
Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$	113
Suites récurrentes linéaires du second ordre	113
<i>Mots clés</i>	115
<i>Exercices</i>	115
<i>Solutions</i>	116
9 Fondements du calcul matriciel	120
9.1 Espaces vectoriels	120
Généralités	120
Sous-espaces vectoriels	121
Bases d'un espace vectoriel, dimension	121
Applications linéaires	122
9.2 Matrices	122
Généralités	122
Écritures matricielles	123
Opérations	124
Changement de bases	125
9.3 Déterminants	126
Généralités	126
Opérations sur les lignes ou les colonnes	127
Autres propriétés	127
<i>Mots clés</i>	129
<i>Exercices</i>	130
<i>Solutions</i>	132
10 Réduction des matrices	140
10.1 Valeurs propres et vecteurs propres	140
Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme	140
Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice carrée	141
Polynôme caractéristique	141

10.2 Diagonalisation	141
Définitions	141
Conditions	142
10.3 Applications	142
Calcul de A^m	142
Systèmes différentiels à coefficients constants	142
<i>Mots clés</i>	143
<i>Exercices</i>	143
<i>Solutions</i>	146
11 Fonctions de plusieurs variables	160
11.1 Espace \mathbb{R}^n	160
Norme sur un espace vectoriel	160
Parties remarquables de \mathbb{R}^n	161
11.2 Fonctions de plusieurs variables	162
Définitions	162
Limite et continuité	163
Composition des fonctions continues	163
11.3 Dérivées partielles ; différentielle	164
Dérivation d'ordre 1	164
Dérivées partielles d'ordre supérieur	165
Différentielle	166
11.4 Optimisation d'une fonction de 2 variables	168
Définitions	168
Existence d'un minimum et d'un maximum globaux	168
Condition nécessaire d'extrémum local	168
Condition suffisante d'extrémum local	168
<i>Mots clés</i>	169
<i>Exercices</i>	170
<i>Solutions</i>	172
12 Champs scalaires, champs vectoriels	181
12.1 Coordonnées non cartésiennes dans le plan et dans l'espace	181
Coordonnées polaires (dans le plan)	181
Coordonnées cylindriques (dans l'espace)	183
Coordonnées sphériques (dans l'espace)	184
12.2 Champs de vecteurs du plan ou de l'espace	185
Définition	185

Divergence d'un champ de vecteurs du plan ou de l'espace	186
Rotationnel d'un champ de vecteurs de l'espace	186
Expression de la divergence et du rotationnel en coordonnées non cartésiennes	187
Propriétés des opérateurs classiques	187
Théorème de Poincaré	188
12.3 Formes différentielles	188
Définitions	188
Propriétés	189
<i>Mots clés</i>	190
<i>Exercices</i>	190
<i>Solutions</i>	192
13 Intégrales multiples	198
13.1 Intégrales doubles	198
Intégrale d'une fonction continue sur un rectangle	198
Extension à une partie fermée bornée du plan	200
Changement de variables	201
13.2 Intégrales triples	201
Approche et calcul	201
Changement de variables	202
13.3 Applications	202
Interprétations d'une intégrale double ou triple	202
Moments et centres d'inertie	203
<i>Mots clés</i>	205
<i>Exercices</i>	205
<i>Solutions</i>	207
14 Intégrales curvilignes	214
14.1 Arc de courbe paramétré	214
Définition	214
Droite tangente et plan normal	215
Arc orienté	215
Longueur d'un arc de courbe paramétré	215
14.2 Intégrale curviligne	216
Intégrale curviligne d'une fonction	216
Circulation d'un champ de vecteurs le long d'une courbe orientée	216

Intégrale d'une forme différentielle le long d'une courbe orientée	217
Propriétés de l'intégrale curviligne	217
Circulation d'un champ de gradients	218
Formule de Green - Riemann	219
<i>Mots clés</i>	219
<i>Exercices</i>	220
<i>Solutions</i>	222

15 Intégrales de surface 227

15.1 Surface paramétrée	227
Définition	227
Plan tangent et droite normale	227
Aire d'une surface	228
15.2 Intégrale de surface	229
Intégrale de surface d'une fonction	229
Flux d'un champ de vecteurs	229
Formule de Stokes	230
Autre énoncé	230
Formule d'Ostrogradski	230
<i>Mots clés</i>	231
<i>Exercices</i>	231
<i>Solutions</i>	233

Index 241



Grandeurs et mesures

PLAN

- 1.1 Grandeurs physiques
- 1.2 Analyse dimensionnelle
- 1.3 Mesure des grandeurs

OBJECTIFS

- Savoir utiliser une équation aux dimensions pour vérifier l'homogénéité d'une formule
- Connaître l'incertitude associée à une somme de mesures indépendantes

1.1 GRANDEURS PHYSIQUES

Définition

On appelle grandeur physique toute propriété de la nature qui peut être quantifiée par la mesure ou par le calcul, et dont les différentes valeurs possibles s'expriment à l'aide d'un nombre accompagné d'une unité de mesure.

| **Exemples** : un temps, une longueur, une masse.

Étalons

Un étalon est un modèle de poids ou de mesure qui sert de point de référence. Aujourd'hui, les étalons fondamentaux donnent des définitions très précises des unités de base.

| **Exemple** : Le mètre.

Système International d'unités (SI)

Le SI fixe des règles pour les préfixes, les unités dérivées... Le SI est fondé sur un choix de 7 unités de base bien définies, considérées comme indépendantes du point de vue dimensionnel et qui permettent de définir toutes les autres.

grandeurs de base	unités	symboles
masse	kilogramme	kg
longueur	mètre	m
temps	seconde	s
intensité du courant électrique	ampère	A
température	kelvin	K
quantité de matière	mole	mol
intensité lumineuse	candela	cd

Préfixes

facteurs	noms	symboles	facteurs	noms	symboles
10^3	kilo	k	10^{-3}	milli	m
10^6	méga	M	10^{-6}	micro	μ
10^9	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	téra	T	10^{-12}	pico	p
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	f
10^{18}	exa	E	10^{-18}	atto	a
10^{21}	zetta	Z	10^{-21}	zepto	z
10^{24}	yotta	Y	10^{-24}	yocto	y

Constantes fondamentales

Les constantes fondamentales régissent les théories de la physique. Les plus générales, comme :

c la vitesse de la lumière, G la constante gravitationnelle.

1.2 ANALYSE DIMENSIONNELLE

Dimension d'une grandeur physique

Les grandeurs fondamentales du SI vont être désignées par des lettres majuscules :

masse M ; longueur L ; temps T ; intensité du courant électrique I ; température Θ ; quantité de matière N , intensité lumineuse J .

On attribue à toutes les grandeurs dérivées, une dimension qui s'exprime par un produit (avec des puissances entières positives, négatives ou nulles) des dimensions des grandeurs fondamentales.

Exemples :

- Dans le cas d'un mouvement rectiligne, l'accélération s'écrit

$a = \frac{d^2x}{dt^2}$ où x est une longueur et t un temps. On lui attribue la dimension :

$$[a] = \frac{[x]}{[t]^2} = \frac{L}{T^2} = LT^{-2} \text{ (unité : m} \cdot \text{s}^{-2}\text{)}.$$

- Une force F est le produit d'une masse et d'une accélération. On lui attribue la dimension : $[F] = [m] \times [a] = MLT^{-2}$ (unité : Newton).

- Une énergie ou un travail $W = \vec{F} \cdot \vec{OM}$. On lui attribue la dimension : $[W] = ML^2T^{-2}$. L'unité est le Joule.

Équation aux dimensions

L'analyse dimensionnelle consiste à déterminer les dimensions attribuées aux expressions reliant des grandeurs physiques.

Cela permet de contrôler la cohérence de formules ou d'égalités. En effet, pour additionner, ou égaliser, deux expressions reliant des grandeurs physiques, il est nécessaire (mais pas suffisant) qu'elles aient la même dimension.

1.3 MESURE DES GRANDEURS

Mesurage

La mesure est l'ensemble des opérations ayant pour but de déterminer une valeur numérique d'une grandeur physique.

Le mesurande est la grandeur soumise à mesurage.

L'objectif d'un mesurage est d'obtenir la valeur x d'un mesurande X .

Mais divers types d'erreurs apparaissent :

- des **erreurs systématiques** dues à la technique de mesure, à l'appareil, à l'opérateur, à l'erreur de modélisation du système étudié ;
- des **erreurs aléatoires**.

Ces erreurs entraînent un écart entre le résultat du mesurage et la valeur vraie (inaccessible) du mesurande. Elles sont souvent appelées « bruit ».

Présentation d'un résultat

Après avoir réduit au mieux les erreurs, il reste toujours une incertitude $\pm I$. L'affichage $x \pm I$ signifie que la valeur vraie du mesurande appartient à l'intervalle $[x - I; x + I]$ avec une forte probabilité. L'incertitude I dépend de la loi de probabilité correspondant au cas expérimental étudié.

Si les erreurs restantes sont surtout aléatoires, il est très fréquent que le bruit sur la mesure corresponde à une loi normale. Dans ce cas, on choisit souvent $I = 2\sigma$ (où σ désigne l'écart type des mesures d'une même grandeur) qui correspond à une probabilité de 95 % que la vraie valeur soit dans l'intervalle affiché.

Dans l'affichage du résultat, pensez aussi à ne conserver qu'un nombre de chiffres après la virgule qui ait du sens.

Exemple : ne concluez pas avec $358,646\,327 \pm 4,128$, mais plutôt avec $358,6 \pm 4,2$.

Arrondissez la mesure au plus près, et majorez l'incertitude.

Utilisation d'un grand nombre de mesures

Supposons que les erreurs systématiques aient été réduites autant que possible et qu'il ne reste que des erreurs aléatoires. Ces erreurs sont alors indépendantes et les diverses variances s'additionnent, ce qui n'est pas le cas des écarts type. Autrement dit, on a :

$$\text{mesure} = x + \text{bruits } 1 + \text{bruits } 2 + \dots = x \pm 2\sigma$$

$$\text{avec } \sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots}$$

Quand on répète n fois une mesure et qu'on calcule la moyenne des résultats, l'incertitude mesurée par des écarts type est alors réduite :

$$\text{elle est multipliée par } \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Pour comprendre ce phénomène, il suffit de penser que les différences (avec la vraie valeur) positives et négatives se compensent en partie.



Brève histoire du mètre

Les longueurs ont longtemps été mesurées par rapport à l'homme (pied, pouce, toise, . . .), ce qui posait des problèmes de communication car les hommes sont différents. De plus, en prenant le roi comme personne de référence, on avait un fort symbole monarchique.

Le 26 mars 1791, l'assemblée constituante définit le mètre comme la dix millionième partie du quart du méridien terrestre. Les astronomes Delambre et Méchain sont alors chargés par l'Académie des Sciences de mesurer la méridienne de Dunkerque à Barcelone. À partir d'une longueur connue et disposant d'outils pour mesurer les angles, ils vont avancer par triangulation en utilisant le théorème des sinus. Leur aventure durera 7 ans et nécessitera environ 500 000 mesures d'angles.

La mesure obtenue sera diffusée dans le monde grâce à la fabrication d'étalons de platine. Une mesure effectuée par satellite en 1980 montre que leur estimation de la longueur de la méridienne comportait une erreur de 10 m seulement !

En 1960, le mètre est défini comme étant égal à 1 650 765,73 fois la longueur d'onde d'une radiation orangée émise par l'isotope 86 du Krypton.

En 1983, le mètre est redéfini comme étant la distance parcourue par la lumière dans le vide en $1/299\,792\,458$ secondes.



MOTS CLÉS

- Équation aux dimensions
- Incertitude

EXERCICES

1.1 Déterminez la dimension de l'énergie, de la puissance, du potentiel U et de la résistance R .

1.2 Déterminez la dimension de la capacité C d'un condensateur.

1.3 Vérifiez l'homogénéité de la relation $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ qui représente la fréquence f d'oscillation d'un système solide-ressort. m est la masse du solide, k la constante de raideur. La force de rappel \vec{F} est liée à l'allongement $\vec{\Delta l}$ par la relation : $\vec{F} = -k\vec{\Delta l}$.

1.4 En utilisant l'expression de la quantité de travail échangé avec un gaz parfait $\delta W = -p dV$ et celle du travail d'une force, retrouver la dimension d'une pression.

SOLUTIONS

1.1 • Énergie

En partant de la relation $E_c = \frac{1}{2}mv^2$, on obtient d'abord :
 $[E_c] = [m] [v]^2$.

Par ailleurs comme la vitesse $v = \frac{dx}{dt}$ s'exprime en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, on a
 $[v] = LT^{-1}$. On obtient donc $[E_c] = ML^2T^{-2}$; l'unité est le Joule.

• Puissance

La puissance est l'énergie par unité de temps. On a donc
 $[P] = ML^2T^{-3}$; l'unité est le Watt.

• Potentiel

De $P = UI$ (où U est en Volt et I en Ampère) on déduit :
 $[P] = [U][I]$, puis $[U] = [P][I]^{-1} = ML^2T^{-3}I^{-1}$.

• Résistance

La loi d'Ohm s'écrit $U = RI$, ce qui entraîne :
 $[R] = [U][I]^{-1} = ML^2T^{-3}I^{-2}$.

1.2 L'énergie emmagasinée par le condensateur est $E_c = \frac{1}{2}CU_c^2$.

Avec l'exercice précédent, on sait que $[E_c] = ML^2T^{-2}$ et $[U_c] = ML^2T^{-3}I^{-1}$.

On en déduit : $[C] = \frac{[E_c]}{[U_c]^2} = M^{-1}L^{-2}T^4I^2$.

1.3 Il s'agit de vérifier que les deux membres de la relation ont la même dimension.

• Comme f est une fréquence, on a $[f] = T^{-1}$.

• Déterminons la dimension du second membre. On a $\left[\frac{1}{2\pi}\right] = 1$ et

$[m] = M$. De l'égalité $\vec{F} = -k\vec{\Delta}l$ on déduit : $[F] = [k]L$.

Comme $[F] = MLT^{-2}$ (voir le cours), on en déduit que $[k] = MT^{-2}$,

puis $\left[\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}\right] = \sqrt{\frac{[k]}{[m]}} = \sqrt{\frac{MT^{-2}}{M}} = T^{-1}$.

• Les deux membres ont donc la même dimension : la relation est homogène.

1.4 En utilisant la formule donnée, on a : $[\delta W] = [p] \times [dV]$.

Comme : $[\delta W] = [F]L = MLT^{-2}L = ML^2T^{-2}$ et $[dV] = L^3$, on en déduit :

$$[p] = ML^{-1}T^{-2}.$$

L'unité est le Pascal.