Annexe C : Un brin de logique...

Proposition

Une **proposition** est un énoncé susceptible d'être vrai ou faux : « un quadrilatère a quatre côtés ».
Certains énoncés ne sont pas des expressions : « x^2 est positif » n'est pas une expression car, ne sachant pas ce que représente x, on ne peut pas dire si cet énoncé est vrai ou faux. Cependant, « Pour tout nombre réel x, x^2 est positif » est cette fois une proposition, vraie en l'occurrence.
Il est recommandé de ne pas mélanger phrases en français et expressions mathématiques. Il est alors utile d'utiliser des symboles logiques comme par exemple :
– $\forall$: pour tout (ou quelque soit) ;
– $\exists$: il existe au moins ;
– $\exists!$: il existe un unique.
Par exemple, « Pour tout nombre réel x, x^2 est positif » s'écrit « $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0$ ».

Négation

La proposition qui dit le contraire d'une proposition A est appelée **négation** de A. On la note $\overline{\mathrm{A}}$ qui se lit « non-A ».
Par exemple, la négation de « la nuit, tous les chats sont gris » est « la nuit, tous les chats ne sont pas gris » ou, plus précisément, « la nuit, il existe au moins un chat qui n'est pas gris ».
Prenons un exemple plus mathématique. Soit A la proposition

$$« \forall n \in [\![1,+\infty[\![, -n \in \mathbb{N} ».$$

Écrivons sa négation $\overline{\mathrm{A}}$ en remplaçant $\forall$ par $\exists$:

$$« \exists n \in [\![1,+\infty]\!], -n \notin \mathbb{N} »$$

qui est vraie en prenant $n = 1$. Comme $\overline{\mathrm{A}}$ est vraie, alors A est fausse.

Opérateurs « et » et « ou »

Soit A et B deux propositions.
– La proposition **A OU B** est vraie (on la note $\mathrm{A} \vee \mathrm{B}$) si l'une *au moins* des propositions est vraie et elle est fausse sinon. On dit que le OU est *inclusif*.
– La proposition **A ET B** est vraie (on la note $\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}$) si les deux propositions sont *simultanément* vraies et elle est fausse sinon.
Ainsi, par exemple, $(2 = 3) \vee (2 > 0)$ est vraie mais $(2 = 3) \wedge (2 > 0)$ est fausse.

Remarque : XCAS traite ce genre d'opération en renvoyant 1 pour vrai et 0 pour faux. Il faut se souvenir que le test d'égalité se note `==`. *Ici, les commandes* `2==0 or 2>0` *et* `2==0 and 2>0` *renvoient respectivement 1 et 0*

Notez bien que l'action de la négation sur les opérateurs $\vee$ et $\wedge$:

$$\overline{\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \vee \overline{\mathrm{B}} \qquad \overline{\mathrm{A} \vee \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \wedge \overline{\mathrm{B}}$$

En effet, « A et B » est faux si A est faux ou B est faux ; « A ou B » est faux si A et B sont faux simultanément.

Implication et réciproque

La proposition « $A \Longrightarrow B$ » qui se lit « A **implique** B » est fausse si A est vraie et B est fausse. Dans tous les autres cas, l'implication est vraie !
Cette définition de l'implication s'éloigne donc de l'idée intuitive de l'implication. Par exemple, la proposition « ma tante est un homme $\Longrightarrow$ 2 est négatif » est vraie puisque chacune des propositions « ma tante est un homme » et « 2 est négatif » est fausse...
C'est pourquoi il est important d'écrire « $\forall x \in \mathbb{R},\ x = 2 \Longrightarrow x^2 = 4$ » et non pas seulement « $x = 2 \Longrightarrow x^2 = 4$ ». En effet, la proposition reste vraie même en prenant $x = 37$ ou $x = -2$ mais on ne peut pas avoir simultanément « $x = 2$ » vraie et « $x^2 = 4$ » fausse !
Si la proposition « $A \Longrightarrow B$ » est vraie, alors A est une **condition suffisante** pour que B soit vraie ou que B est une **condition nécessaire** pour que A soit vraie.
La **réciproque** de $A \Longrightarrow B$ est $B \Longrightarrow A$.

Équivalence

La proposition « $A \Longleftrightarrow B$ » qui se lit « A **est équivalent à** B » est vraie si A et B sont simultanément vraies ou simultanément fausses.
Dans tous les autres cas, $A \Longleftrightarrow B$ est fausse.
Par exemple, considérons la proposition « $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 0 \Longleftrightarrow -x < 0$ ». Cette proposition est vraie pour $x = 1$ (les deux propositions sont vraies) mais aussi pour $x = -2$ (les deux propositions sont simultanément fausses).
Lorsque « $A \Longleftrightarrow B$ » est vraie, on dit encore que « A **si, et seulement si**, B » ou « A est **une condition nécessaire et suffisante** pour B ».

Contraposée

La **contraposée** de $A \Longrightarrow B$ est $\overline{B} \Longrightarrow \overline{A}$. Une proposition et sa contraposée sont équivalentes.
Par exemple, la contraposée de « $x = 2 \Longrightarrow x^2 = 4$ » est « $x^2 \neq 4 \Longrightarrow x \neq 2$ ».
Attention ! Il ne faut pas confondre *contraposée* et *négation*. En effet, une proposition et sa contraposée sont toujours simultanément vraies ou fausses mais une proposition et sa négation ne sont jamais simultanément vraies ou fausses !
La **négation** de « $A \Longrightarrow B$ » est « $A \wedge \overline{B}$ ».

Lien avec la théorie des ensembles

Comme souvent en mathématiques, on retrouve des structures semblables dans des domaines différents.
Ainsi on peut faire le rapprochement entre l'implication des propositions et l'inclusion des ensembles, « vrai » correspondant « $\in$ ».
Ainsi, si deux ensembles A et B vérifient $A \subset B$, alors il est impossible de trouver un élément x tel que $x \in A$ et $x \notin B$. Tous les autres cas sont possibles.
De même, si $A \Longrightarrow B$, il est impossible que A soit vraie et B soit fausse. Toutes les autres propositions sont vraies.
On fait le même rapprochement entre l'équivalence des propositions et l'égalité des ensembles. Merveilleuses mathématiques...